T. Conde, J. Meinel,
D. Seus, S. Thelin,
R. Tielen, A. Wünsch

**1. Gruppenübung zur Vorlesung**

# Höhere Mathematik 1

M. Künzer
M. Stroppel

Wintersemester 2016/17

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 1.** *Umgang mit Summen*

*Hinweis:* Bereits behandelte Summenformeln aus dem Skript dürfen verwendet werden.

**(a)** Sei $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $\sum_{j=0}^{n}(a_{j+1} - a_j) = a_{n+1} - a_0$ für $n \in \mathbb{N}$.

**Lösungshinweise hierzu:** Der Term ist eine sogenannte Teleskopsumme. Mit elementaren Mitteln lassen sich folgende Umformungen durchführen, wobei vor allem die Indexverschiebung im zweiten Schritt essentiell ist:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}(a_{j+1} - a_j) &= \sum_{j=0}^{n} a_{j+1} - \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n+1} a_j - \sum_{j=0}^{n} a_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j + a_{n+1} - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j = a_{n+1} - a_0.\end{aligned}$$

**(b)** Berechnen Sie $\sum_{j=1}^{n-1}(j^2 - 2j)$.

**Lösungshinweise hierzu:** Nach Beispiel 1.2.2 aus dem Skript gilt $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$, und nach Beispiel 1.2.4 aus dem Skript gilt $\sum_{j=1}^{n}(j^2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Damit berechnet man

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1}(j^2 - 2j) &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} j^2\right) - 2\left(\sum_{j=1}^{n-1} j\right) \\ &= \frac{1}{6}(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1) - 2\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - (n-1)n \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-7),\end{aligned}$$

wobei man die Formeln aus dem Skript für $n-1$ anstelle von $n$ verwendet.

**(c)** Berechnen Sie $\sum_{j=3}^{n}(j^2 - 2j)$.

**Lösungshinweise hierzu:** Wieder verwenden wir die Beispiele 1.2.2 und 1.2.4, achten aber auf den geänderten Indexbereich der Summen:

$$\begin{aligned}\sum_{j=3}^{n}(j^2 - 2j) &= \left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{2} j^2\right) - 2\left(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{2} j\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - (1^2+2^2)\right) - 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - (1+2)\right) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 5 - n(n+1) + 6 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n-5) + 1.\end{aligned}$$

**(d)** Sei $a_j = (-1)^j \cdot j$ für $j \in \mathbb{N}$.
Berechnen Sie $\sum_{j=1}^{4} a_{2j}$ und $\sum_{j=4}^{8} a_{3j-9}$. Berechnen Sie $\sum_{j=1}^{2k+1} a_j$ für $k \in \mathbb{N}$.

**Lösungshinweise hierzu:** Man verwendet, dass $(-1)^{2j} = ((-1)^2)^j = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Damit erhält man

$$\sum_{j=1}^{4} a_{2j} = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{2j} \cdot 2j = \sum_{j=1}^{4} 2j = 2\frac{4(4+1)}{2} = 20.$$

Außerdem ist $(-1)^{3j-9} = ((-1)^3)^{j-3} = (-1)^{j-3}$, womit man die zweite Summe wie folgt umformt:

$$\sum_{j=4}^{8} a_{3j-9} = \sum_{j=4}^{8} (-1)^{3j-9}(3j-9) = \sum_{j=4}^{8} (-1)^{j-3} 3(j-3) = 3\sum_{j=1}^{5} (-1)^j j = -9.$$

Hierbei hat eine Indexverschiebung die Summe im vorletzten Schritt vereinfacht.
Es gilt $\sum_{j=1}^{2k+1} a_j = -k-1$ für $k \in \mathbb{N}$: Zur Berechnung sortiert man die Summanden zunächst nach geraden und ungeraden Indizes:

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_j = \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^j \cdot j = \left( \sum_{j=1}^{k} (-1)^{2j-1}(2j-1) + (-1)^{2j} 2j \right) + (-1)^{2k+1}(2k+1).$$

Anschließend vereinfacht man die Vorzeichen und formt die Summe zu dem Ausdruck

$$\left( \sum_{j=1}^{k} -(2j-1) + 2j \right) - (2k+1) = \left( \sum_{j=1}^{k} 1 \right) - (2k+1) = k - 2k - 1 = -k-1$$

um.

**Aufgabe H 2.** *Binomischer Lehrsatz*

Berechnen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen.

**(a)** $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$

**Lösungshinweise hierzu:** $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^3 = 0$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = 3$.

**(b)** $7x^4 + 28x^3 + 42x^2 + 28x + 15 = 8$

**Lösungshinweise hierzu:** Die Gleichung $7x^4 + 28x^3 + 42x^2 + 28x + 15 = 8$ ist äquivalent zu der Gleichung $7(x+1)^4 = 0$, somit ist die einzige Lösung $x = -1$.

**(c)** $x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 14 = 3x^3 + 4x^2 + 7$

**Lösungshinweise hierzu:** Die Gleichung $x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 14 = 3x^3 + 4x^2 + 7$ ist äquivalent zu der Gleichung $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$. Man faktorisiert $x^4 - 8x^2 + 7 = (x^2-7)(x^2-1) = (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x-1)(x+1)$, wobei man den ersten Schritt durch Substitution $t = x^2$ und anschließendes Lösen der quadratischen Gleichung $t^2 - 8t + 7 = 0$ sehen kann. Also erhält man als Lsüngsmenge die vier reellen Lösungen $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}, -1, 1\} \subsetneq \mathbb{R}$.

**(d)** $(x^2 + 4x + 4)(x^2 - 6x + 9) = -1$

**Lösungshinweise hierzu:** Die Gleichung $(x^2+4x+4)(x^2-6x+9) = -1$ ist äquivalent zu der Gleichung $(x+2)^2(x-3)^2 = -1$. Für alle reelle Zahlen $x$ gilt jedoch $(x+2)^2(x-3)^2 \geqq 0$, und somit gibt es keine reelle Lösung für diese Gleichung.

**Aufgabe H 3.** *Vollständige Induktion*

**(a)** Beweisen Sie mittels Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2+k}{2} = \binom{3+n}{n}.$$

**Lösungshinweise hierzu:** Wir führen einen Induktionsbeweis über $n \in \mathbb{N}$ durch:

**IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 1$. In der Tat gilt

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{2+k}{2} = \binom{2+0}{2} + \binom{2+1}{2} = 1 + 3 = 4 = \binom{4}{1} = \binom{3+1}{1}.$$

**IH** Nun nehmen wir an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. es gelte

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2+k}{2} = \binom{3+n}{n}.$$

**IS** Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für $n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{2+k}{2} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2+k}{2} + \binom{2+(n+1)}{2} \\
&= \binom{3+n}{n} + \binom{2+(n+1)}{2} && \text{unter Verwendung von } \mathbf{IH} \\
&= \binom{3+n}{n} + \binom{3+n}{(3+n)-2} && \text{Symmetrie von Binomialkoeffizienten 1.3.4 (2)} \\
&= \binom{(3+n)+1}{n+1} && \text{Addition von Binomialkoeffizienten 1.3.4 (3)} \\
&= \binom{3+(n+1)}{n+1},
\end{aligned}$$

womit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen ist.

**(b)** Zeigen Sie mit Induktion, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

**Lösungshinweise hierzu:** Wir führen einen Induktionsbeweis über $n \in \mathbb{N}$ durch:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$. In der Tat gilt

$$(a-b)\sum_{k=0}^{1-1} a^{1-1-k}b^k \;=\; (a-b)(a^{1-1-0}b^0) \;=\; a-b \;=\; a^1 - b^1.$$

IH Nun nehmen wir an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. es gelte

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für $n$:

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{(n+1)-1} a^{(n+1)-1-k}b^k \;&=\; (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{(n+1)-1-k}b^k \;+\; a^{(n+1)-1-n}b^n\right) \\
&=\; a\left((a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k\right) \;+\; (a-b)a^0b^n \\
&=\; a(a^n - b^n) \;+\; (a-b)a^0b^n \quad \text{unter Verwendung von } \textbf{IH} \\
&=\; (a^{n+1} - ab^n) \;+\; (ab^n - b^{n+1}) \\
&=\; a^{n+1} - b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0 bis 2 Punkte.

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 4.** *Abbildungen*

**(a)** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (2\cos(t), -\sin(t))$.
Ist $f$ injektiv? Ist $f$ surjektiv? Ist $f$ bijektiv?

**Lösungshinweise hierzu:** f ist nicht injektiv, weil (z.B.) $f(0) = (2,0) = f(2\pi)$.
Weil $|2\cos(t)| \leqq 2$ für alle $t \in \mathbb{R}$, gilt (z.B.), dass es keine reelle Zahl $t$ gibt mit $f(t) = (3,0)$, und deshalb ist $f$ nicht surjektiv.
Eine Funktion ist genau dann bijektiv, wenn es injektiv sowohl als auch surjektiv ist. Es folgt damit, dass $f$ nicht bijektiv ist.

**(b)** Konstruieren Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq -3\}$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

**Lösungshinweise hierzu:** Eine solche Funktion (es gibt unendlich viele) ist $g\colon \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq -3\}$ definiert durch $g\colon x \to x^2 - 3$. Dann gilt (z.B.) $g(1) = g(-1)$, so $g$ ist nicht injektiv. Außerdem gilt $g(\sqrt{y+3}) = y$ für alle $y \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq -3\}$, und deshalb ist $g$ surjektiv.

**(c)** Sei $h\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \colon z \mapsto \frac{1}{\overline{z}+\mathrm{i}}$. Ist $h$ injektiv? Ist $h$ surjektiv? Ist $h$ bijektiv?

**Lösungshinweise hierzu:** Seien $z, w \in \mathbb{C} \smallsetminus \{\mathrm{i}\}$ mit $h(z) = h(w)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\overline{z}+\mathrm{i}} = \frac{1}{\overline{w}+\mathrm{i}} \quad &\implies \quad \overline{z}+\mathrm{i} = \overline{w}+\mathrm{i} \\
&\implies \quad \overline{z} = \overline{w} \\
&\implies \quad z = w,
\end{aligned}$$

und deshalb ist $h$ injektiv. Sei weiter $u \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Dann gilt, für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{\mathrm{i}\}$, dass

$$\begin{aligned}
u = \frac{1}{\overline{z}+\mathrm{i}} \quad &\iff \quad \frac{1}{u} = \overline{z}+\mathrm{i} \\
&\iff \quad \frac{1}{u} - \mathrm{i} = \overline{z} \\
&\iff \quad \overline{\frac{1}{u} - \mathrm{i}} = z.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $h(\overline{\frac{1}{u} - \mathrm{i}}) = u$ für alle $u \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, und deshalb ist $h$ surjektiv. Weil $h$ injektiv sowohl als auch surjektiv ist, ist es auch bijektiv.

**(d)** Sei $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R} \colon z \mapsto \mathrm{Re}(|\mathrm{i}z|) - |\mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z)|$. Ist $u$ injektiv? Ist $u$ surjektiv? Ist $u$ bijektiv?

**Lösungshinweise hierzu:** Sei $z = a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\mathrm{Re}(|\mathrm{i}z|) = \mathrm{Re}(\sqrt{(-b)^2 + a^2}) = \sqrt{a^2+b^2}$ und $|\mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{i}a| = |a|$. Es folgt, dass $u(a + \mathrm{i}b) =$

$\sqrt{a^2+b^2} - |a|$. Deshalb gilt es, dass $i(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$, und deswegen ist $h$ nicht injektiv. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} u(a+\mathrm{i}b) &= \sqrt{a^2+b^2} - |a| \\ &\geqq \sqrt{a^2} - |a| \\ &= |a| - |a| \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Deshalb gibt es (z.B.) keine komplexe Zahl $z$ mit $h(z) = -1$, und deswegen ist $h$ nicht surjektiv. Weil eine Funktion genau dann bijektiv ist, wenn es injektiv sowohl als auch surjektiv ist, folgt es, dass $u$ nicht bijektiv ist.

**Aufgabe H 5.** *Mengen in* $\mathbb{C}$

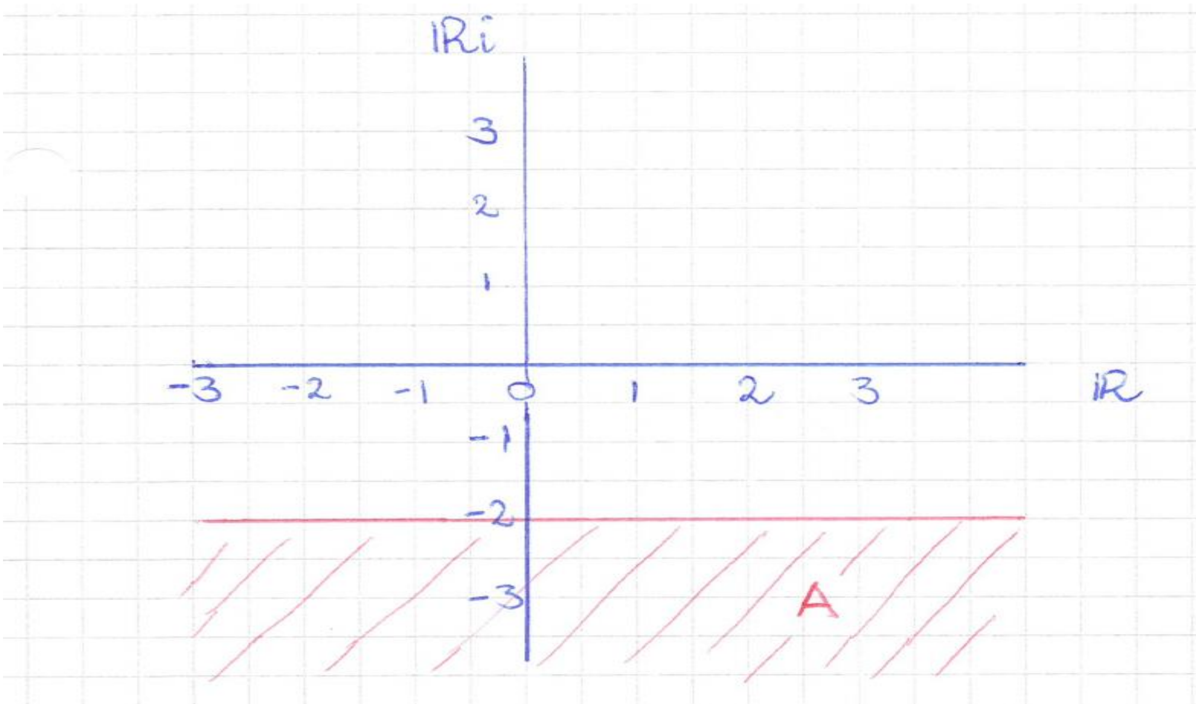
Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

**(a)** $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\overline{z}) \geqq 2\}$

**Lösungshinweise hierzu:** Wir schreiben

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\overline{z}) \geqq 2\} \\ &= \{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(\overline{a + b\mathrm{i}}) \geqq 2\} \\ &= \{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(a - b\mathrm{i}) \geqq 2\} \\ &= \{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid -b \geqq 2\} \\ &= \{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid b \leqq -2\} \end{aligned}$$

Die Menge A (rot) besteht aus allen Punkten in der komplexen Ebene, die einen Imaginärteil kleiner oder gleich $-2$ haben. Der Rand ist also Teil des Gebiets (durchgezogene rote Linie).



**(b)** $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\,\mathrm{Re}(z^2) - 2\,\mathrm{Im}(z)^2 = 4\,\mathrm{Re}(z)^2 - 3\,\mathrm{Im}(z^2)\}$

**Lösungshinweise hierzu:** Seit $z = a + b\mathrm{i}$ und $z^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i}$ schreiben wir

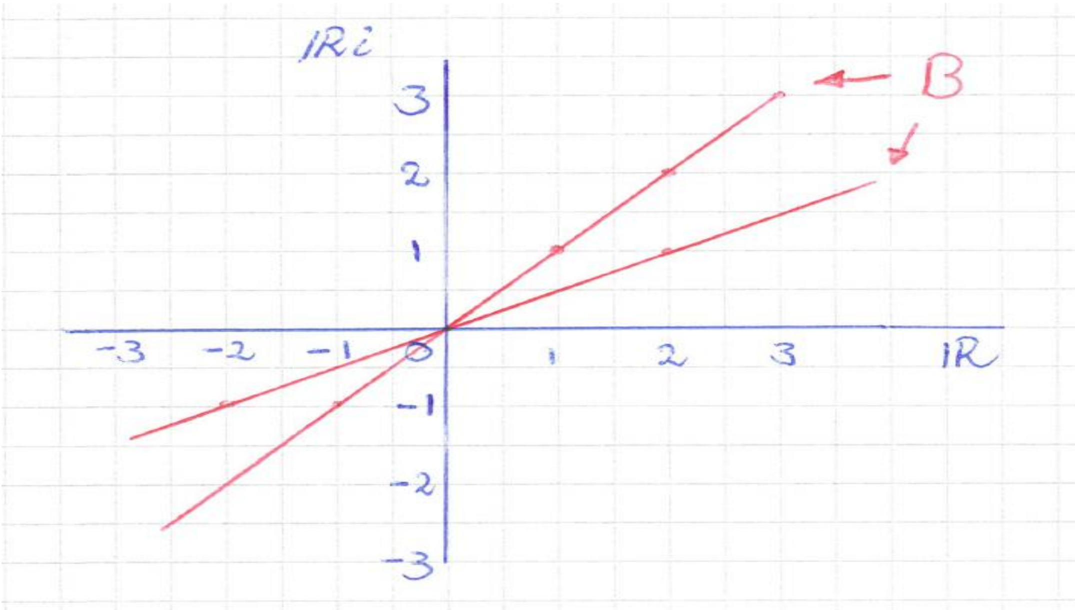
$$\begin{aligned}
B &= \{z \in \mathbb{C} \mid 2\,\mathrm{Re}(z^2) - 2\,\mathrm{Im}(z)^2 = 4\,\mathrm{Re}(z)^2 - 3\,\mathrm{Im}(z^2)\} \\
&= \{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid 2(a^2 - b^2) - 2b^2 = 4a^2 - 6ab\} \\
&= \{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid 2a^2 - 4b^2 = 4a^2 - 6ab\} \\
&= \{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid 2a^2 - 6ab + 4b^2 = 0\} \\
&= \{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid a^2 - 3ab + 2b^2 = 0\} \\
&= \{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid (a - 2b)(a - b) = 0\}
\end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen:

$$a = b$$

$$a = 2b$$

Die Menge B (rot) besteht aus allen Punkten in der komplexen Ebene mit $a = b$ oder $a = 2b$.



**(c)** $C = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) \neq 0,\ 1 \leqq \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)} < 2 \right\}$

**Lösungshinweise hierzu:** Wir schreiben

$$\begin{aligned} C &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) \neq 0,\ 1 \leqq \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)} < 2 \right\} \\ &= \left\{ a + bi \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) \neq 0,\ 1 \leqq \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)} < 2 \right\} \\ &= \left\{ a + bi \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) \neq 0,\ 1 \leqq \frac{a}{b} < 2 \right\} \end{aligned}$$

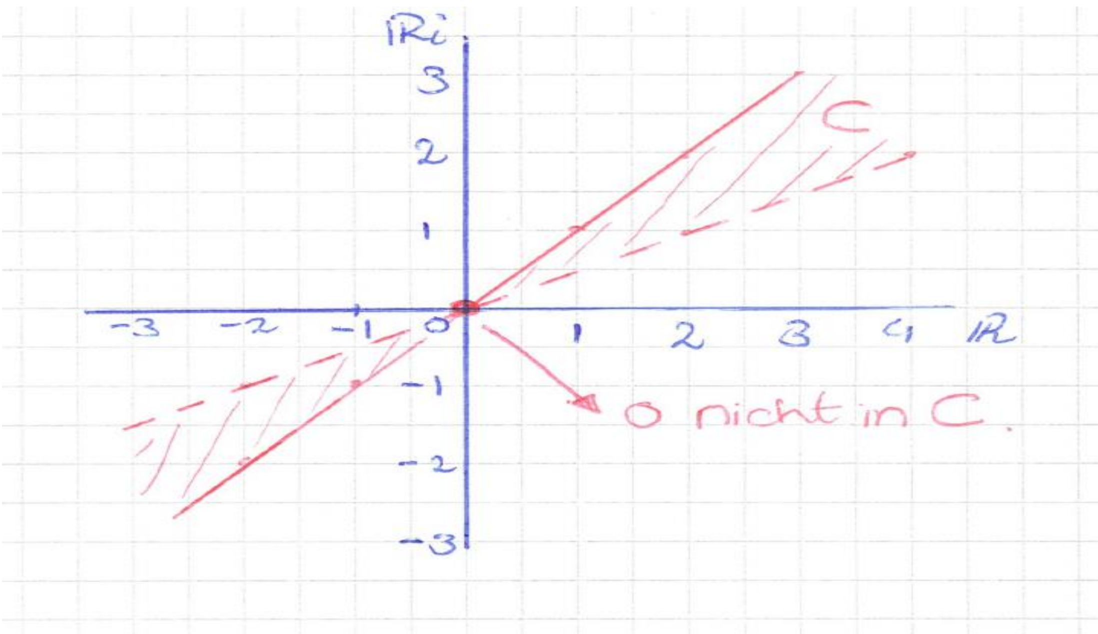
Fall $1$: $a, b > 0$:
Die Menge besteht aus allen Punkten in der komplexen Ebene mit:

$$b \leqq \quad a \quad < 2b$$

Fall $2$: $a, b < 0$:
Die Menge besteht aus allen Punkten in der komplexen Ebene mit:

$$b \geqq \quad a \quad > 2b$$

Die Menge $C$ ist in der Zeichnung rot dargestellt. Die Punkte mit $a = b$ sind Teil der Menge $C$ (durchgezogene Linie), aber die Punkte mit $a = 2b$ nicht (gestrichelte Linie). Achtung, $0$ ist kein Element dem Menge.

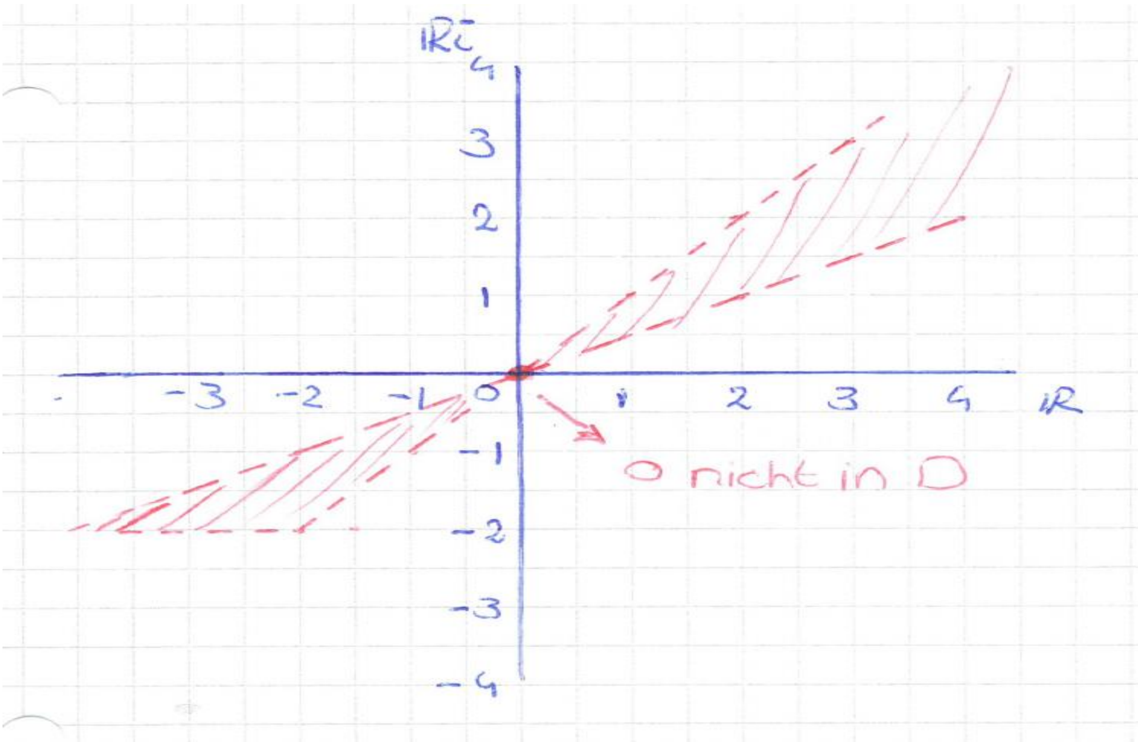


**(d)** $D = C \setminus (A \cup B)$

**Lösungshinweise hierzu:** Die Menge $D$ besteht aus den Punkten in $C$, die kein Element von $A$ oder $B$ sind.

Die Punkte von $C$ mit Imaginärteil kleiner oder gleich $-2$ und die Punkte von $C$ mit $a = b$ sind kein Element von $D$.

Die Punkte von $C$ mit Imaginärteil gleich $-2$ sind also kein Element von $D$.



**Aufgabe H 6.** *Komplexe Wurzeln*

**(a)** Berechnen Sie die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahl $w = (1-\mathrm{i})/\sqrt{2}$. Wie viele Elemente hat die Menge $\{w^k + w \mid k \in \mathbb{Z}\}$? Skizzieren Sie diese Menge in der komplexen Zahlenebene.

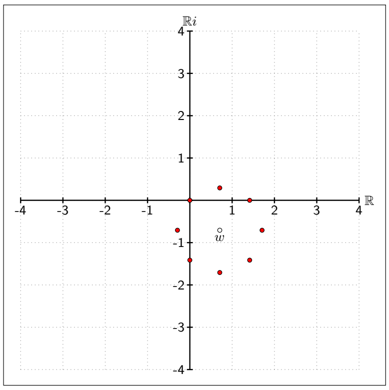
**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt $|w| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$. Außerdem gilt $\arctan(\frac{-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}) = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und weil $w$ im Vierten Quadranten liegt, folgt, dass $\arg(w) = \frac{7\pi}{4}$. Die Polarkoordinatdarstellung von $w$ ist deswegen

$$w = \cos(\frac{7\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{7\pi}{4}).$$

Weitherhin gilt, für $k, l \in \mathbb{Z}$, dass

$$\begin{aligned}
w^k + w = w^l + w \quad &\Longleftrightarrow \quad w^k = w^l \\
&\Longleftrightarrow \quad w^{k-l} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \cos(\frac{7(k-l)\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{7(k-l)\pi}{4}) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{7(k-l)}{4} \in \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \\
&\Longleftrightarrow \quad k - l \in \{8n \mid n \in \mathbb{Z}\},
\end{aligned}$$

sodass $\{w^k + w \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{w^k + w \mid k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$ und die Menge acht Elemente hat.




1

**(b)** Bestimmen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \sqrt{2}z^6 - 64 = -64\mathrm{i}\}$ und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene.

**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt

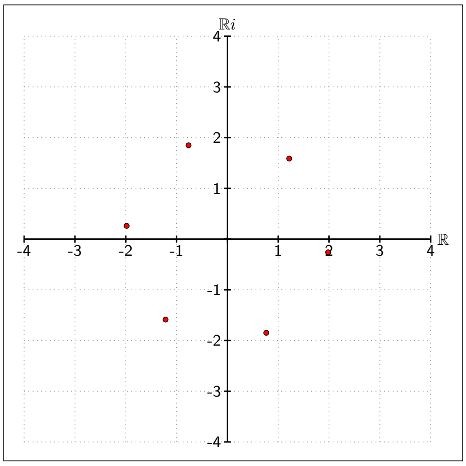
$$\sqrt{2}z^6 - 64 = -64\mathrm{i} \iff z^6 = \frac{64}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{64}{\sqrt{2}}.$$

Sei $w = \frac{64}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{64}{\sqrt{2}}$. Dann gilt $|w| = \sqrt{(\frac{64}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{64}{\sqrt{2}})^2} = 64$ und $\arctan(\frac{-64/\sqrt{2}}{64/\sqrt{2}}) = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Weil $w$ im Vierten Quadranten liegt, folgt, dass $\arg(w) = \frac{7\pi}{4}$, sodass die Polarkoordinatdarstellung von $w = 64(\cos(\frac{7\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{7\pi}{4}))$ ist. Weil $64^{1/6} = 2$, ist die Lösungsmenge von $z^6 = w$ deshalb

$$\{2(\cos(\frac{7\pi}{4}/6 + \frac{2\pi k}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{7\pi}{4}/6 + \frac{2\pi k}{6})) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

sodass

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sqrt{2}z^6 - 64 = -64\mathrm{i}\} = \{2(\cos(\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{3})) \mid k \in \{0,1,2,3,4,5\}\}\,.$$




**(c)** Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 - 4z^2 + 4 = -4$ in Polarkoordinaten.

**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt

$$\begin{aligned} z^4 - 4z^2 + 4 = -4 &\iff (z^2-2)^2 = -4 \\ &\iff z^2 - 2 = 2\mathrm{i} \vee z^2 - 2 = -2\mathrm{i} \\ &\iff z^2 = 2 + 2\mathrm{i} \vee z^2 = 2 - 2\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Seien $w_1 = 2 + 2\mathrm{i}$ und $w_2 = 2 - 2\mathrm{i}$. Dann gilt $|w_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ und $\arctan(2/2) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Weil $w_1$ im Ersten Quadranten liegt, folgt, dass $\arg(w_1) = \frac{\pi}{4}$, sodass die Polarkoordinatdarstellung von $w_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4}))$ ist. Ähnlicherweise gilt $|w_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ und $\arctan(-2/2) = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und weil $w_2$ im Vierten Quadranten liegt, folgt, dass $\arg(w_2) = \frac{7\pi}{4}$, sodass die Polarkoordinatdarstellung von $w_2 = \sqrt{8}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{7\pi}{4}))$ ist. Deswegen ist $A = \{8^{1/4}(\cos(\frac{\pi}{8} + k\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{8} + k\pi)) \mid k \in \{0,1\}\}$ die Lösungsmenge von $z^2 = w_1$ und $B = \{8^{1/4}(\cos(\frac{7\pi}{8} + k\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{7\pi}{8} + k\pi)) \mid k \in \{0,1\}\}$ die Lösungsmenge von $z^2 = w_2$, sodass $A \cup B$ die Lösungsmenge von $z^4 - 4z^2 + 4 = -4$ ist.

**(d)** Zerlegen Sie das Polynom $x^3 - 2 \in \operatorname{Pol}\mathbb{C}$ in ein Produkt von Linearfaktoren.

**Lösungshinweise hierzu:** Die Polarkoordinatdarstellung von $2$ lautet $2 = 2(\cos(0) + \mathrm{i}\sin(0))$. Die Lösungsmenge von $x^3 = 2$ in $\mathbb{C}$ ist deswegen

$$A = \{w_k = 2^{1/3}(\cos(\frac{2\pi k}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi k}{3})) \mid k \in \{0,1,2\}\}.$$

Für jede $w_k \in A$ gilt, dass $x - w_k$ ein Linearfaktor von $x^3 - 2$ ist, und weil der Grad von $x^3 - 2$ drei ist, und $A$ drei Elemente hat, folgt, dass

$$x^3 - 2 = (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)$$

gilt.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://morw.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 7.** *Lineare Unabhängigkeit und Untervektorräume*

Gegeben seien in $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\3\\2\\0\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\-3\\-2\\0\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad p = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ q = \begin{pmatrix}0\\2\\3\\4\\0\end{pmatrix}.$$

**(a)** Geben Sie zwei verschiedene Basen von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ an.

**(b)** Geben Sie zwei verschiedene Basen von $\mathrm{L}(v_1, v_3, v_4)$ an.

**(c)** Betrachten Sie die Ebene $E = \mathrm{L}(v_1, v_4)$ in $\mathbb{R}^5$.
Liegt $p$ in $E$? Ist $\{p + x \mid x \in E\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$?

**(d)** Liegt $q$ in $E$? Ist $\{q + x \mid x \in E\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$?

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Wir untersuchen $v_1, v_2, v_3$ zunächst auf lineare Abhängigkeit: Dazu prüfen wir, ob es reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ und mindestens ein $\alpha_j$ ungleich $0$ ist. Wir stellen also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 0\alpha_1 & + & 0\alpha_2 & + & 0\alpha_3 & = & 0 \\ 1\alpha_1 & + & (-1)\alpha_2 & + & (-1)\alpha_3 & = & 0 \\ 0\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & + & (-3)\alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & (-2)\alpha_3 & = & 0 \\ 0\alpha_1 & + & 0\alpha_2 & + & 0\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

auf und lösen es. Dabei können wir die erste und die letzte Gleichung ignorieren, erhalten nach zwei Umformungsschritten das äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 1\alpha_1 & + & (-1)\alpha_2 & + & (-1)\alpha_3 & = & 0 \\ 0\alpha_1 & + & 1\alpha_2 & + & (-1)\alpha_3 & = & 0 \\ 0\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 0\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

und damit $\alpha_2 = 0$ und weiterhin $\alpha_3 = 0$ und $\alpha_1 = 0$ als einzig mögliche Lösung. Somit sind $v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig.
Der Untervektorraum $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) \subsetneqq \mathbb{R}^5$ ist nach Definition von $v_1, v_2, v_3$ erzeugt und wir haben soeben nachgerechnet, dass $v_1, v_2, v_3$ linear unabhängig sind. Daher ist durch $B\colon\ v_1, v_2, v_3$ eine Basis von $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ gegeben. Eine andere Basis $C\colon\ w_1, w_2, w_3$ für $\mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ erhält man beispielsweise auf folgende Weise:

**(i)** Indem man mindestens einen der Basisvektoren um einen Skalarfaktor aus $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ ändert, etwa $w_1 := v_1$, $w_2 := 3v_2$, $w_3 := -v_3$.

**(ii)** Indem man zu einem der Basisvektoren $v_j$ eine Linearkombination der anderen Basisvektoren hinzuaddiert, etwa $w_1 := v_1 + 3v_2 - v_3$, $w_2 := v_2$, $w_3 := v_3$.

**(iii)** Indem man einfach nur die alte Basis etwas umsortiert: $w_1 := v_2$, $w_2 := v_1$, $w_3 := v_3$. Dies liegt daran, dass wir festgelegt haben, dass die Basisvektoren immer eine feste Anordnung haben müssen, siehe Bemerkung 2.8.23. Vorsicht: Auch wenn diese Festlegung sehr geläufig ist, wird in einigen Büchern kein Unterschied zwischen verschiedenen Anordnung der Basisvektoren gemacht.

Bei den beschriebenen Methoden ist direkt klar, dass $w_1, w_2, w_3$ wieder eine Basis von $\mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3)$ ist. Natürlich könnte man auch eine aufwändigere andere Basis wie $w_1 := 2v_1 + v_2 - v_3$, $w_2 := v_1 + v_3$, $w_3 := 4v_1 + 2v_2$ betrachten, in dem Fall wäre es aber nicht mehr offensichtlich, dass die drei Vektoren weiterhin ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\mathrm{L}\,(v_1, v_2, v_3)$ ergeben und man müsste dies erneut nachprüfen.

**(b)** Wir stellen zuerst fest, dass $v_1, v_3, v_4$ linear abhängig sind, beispielsweise gilt $v_3 = -v_1 - 3v_4$ und damit $v_1 + v_3 + 3v_4 = 0$. Wir erhalten $\mathrm{L}\,(v_1, v_3, v_4) = \mathrm{L}\,(v_1, v_4)$. Die Vektoren $v_1, v_4$ sind nun linear unabhängig, wie man an dem linearen Gleichungssystem

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_4 v_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} 0\alpha_1 & + & 0\alpha_4 & = & 0 \\ 1\alpha_1 & + & 0\alpha_4 & = & 0 \\ 0\alpha_1 & + & 1\alpha_4 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & 0\alpha_4 & = & 0 \\ 0\alpha_1 & + & 0\alpha_4 & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = 0 \text{ und } \alpha_4 = 0$$

abliest. Daher ist $B\colon\ v_1, v_4$ eine Basis von $\mathrm{L}\,(v_1, v_3, v_4)$. Eine zweite Basis erhalten wir wie in **(a)** beispielsweise durch $C\colon\ 11v_1, 11v_4$.

**(c)** In dem Fall, dass $p$ in $E$ liegt, müsste es eine Linearkombination $p = \lambda v_1 + \mu v_4$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geben. Wir müssten also eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcl} 0\lambda & + & 0\mu & = & 1 \\ 1\lambda & + & 0\mu & = & 1 \\ 0\lambda & + & 1\mu & = & 1 \\ 2\lambda & + & 0\mu & = & 1 \\ 0\lambda & + & 0\mu & = & 1 \end{array}$$

finden, allerdings ist dieses Gleichungssystem nicht lösbar, wie man an der ersten oder letzten Zeile direkt sieht. Also gilt $p \notin E$.

Die Menge $\{p + x \mid x \in E\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$. Dies zeigt man beispielsweise, indem man nachweist, dass mindestens eins der Vektorraumaxiome verletzt wird. Wir zeigen, dass $0$ nicht in der Menge enthalten ist: Alle Elemente der Menge $\{p + x \mid x \in E\}$ haben die Form $p + \lambda v_1 + \mu v_4$ für Skalare $\lambda, \in \mathbb{R}$. Daher ist $0$ genau dann in der Menge enthalten, wenn es eine Lösung $\lambda, \in \mathbb{R}$ für

$$\begin{array}{rcrcrcl} 1 & + & 0\lambda & + & 0\mu & = & 0 \\ 1 & + & 1\lambda & + & 0\mu & = & 0 \\ 1 & + & 0\lambda & + & 1\mu & = & 0 \\ 1 & + & 2\lambda & + & 0\mu & = & 0 \\ 1 & + & 0\lambda & + & 0\mu & = & 0 \end{array}$$

gibt. Wir sehen aber wieder an der ersten oder letzten Zeile, dass dies unmöglich ist.

**(d)** Wir prüfen wieder, ob es eine Linearkombination $q = \lambda v_1 + \mu v_4$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt, was äquivalent dazu ist, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 0\lambda & + & 0\mu & = & 0 \\ 1\lambda & + & 0\mu & = & 2 \\ 0\lambda & + & 1\mu & = & 3 \\ 2\lambda & + & 0\mu & = & 4 \\ 0\lambda & + & 0\mu & = & 0 \end{array}$$

eine Lösung hat. Tatsc̈hlich ist $\lambda = 2,\ \mu = -3$ eine Lösung, also $q \in E$. Daher ist

$$\{q + x \mid x \in E\} = E = \mathrm{L}\left(v_1, v_4\right),$$

und letzteres ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$.

**Aufgabe H 8.** *Unterschied zwischen Teilmengen und Untervektorräumen*
Untersuchen Sie, ob diese Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume bilden:

$$U_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \quad U_2 = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad U_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \quad U_4 = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\},$$

$$U_5 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}, \qquad U_6 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0\right\},$$

$$U_7 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3x + 9y = 0\right\}, \qquad U_8 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 4xy + 4y^2 = 0\right\}.$$

Welche zwei dieser Teilmengen stimmen überein?

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** $U_1$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^2$: Man hat $U_1 = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)$, und der Aufspann einer Menge ist immer ein Untervektorraum.

**(b)** $U_2$ ist kein UVR von $\mathbb{R}^2$: Beispielsweise ist das Axiom verletzt, dass in einem Untervektorraum immer der Nullvektor enthalten sein muss. Wir haben $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Alternativ kann man einen Widerspruch dazu herstellen, dass für $u, v \in U_5$ auch $u + v \in U_5$ liegen muss: Mit $u = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ gibt es zwei Elemente von $U_2$, deren Summe $u + v = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ liegt und damit nicht in $U_2$.

**(c)** $U_3$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^2$: Man hat $U_3 = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$, und der gesamte Vektorraum ist immer ein Untervektorraum von sich selbst.

**(d)** $U_4$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^2$: Man prüft die Axiome für einen Untervektorraum nach.

- $u+v = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in U_4$ für alle $u, v \in U_4$, wobei es in $U_4$ nur $u = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ gibt.
- $s\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in U_4$ für alle $s \in \mathbb{R}$.
- Der Nullvektor $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist in $U_4$ enthalten.

**(e)** $U_5$ ist kein UVR von $\mathbb{R}^2$: Wir können wie bei $U_2$ mit dem fehlenden Nullvektor argumentieren, da $0^2 + 0^2 \neq 1$ gilt.

**(f)** $U_6$ ist kein UVR von $\mathbb{R}^2$: Es gilt $u = \begin{pmatrix}23\\0\end{pmatrix} \in U_6$, jedoch ist $(-1)u = \begin{pmatrix}-23\\0\end{pmatrix}$ nicht in $U_6$ enthalten.

**(g)** $U_7$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^2$: Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme sind stets Untervektorräume.

**(h)** $U_8$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^2$: Wir können diese Menge als

$$\begin{aligned} U_8 &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + 4xy + 4y^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x+2y)^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+2y = 0 \right\} \end{aligned}$$

umschreiben. Letzteres ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystem und damit ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

Die Untervektorräume $U_1$ und $U_7$ sind identisch:

$$\begin{aligned} U_7 &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -3x + 9y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = 3y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}3y\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Aufgabe H 9.** *Abstände mittels Skalarprodukt*

Für $f, g \in \mathcal{C}^0([-2,1])$ ist ein Skalarprodukt definiert durch $\langle f \,|\, g \rangle := \int\limits_{-2}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Der Abstand von $f$ und $g$ sei $d(f,g) := \langle f-g \,|\, f-g \rangle^{1/2}$.
Sei $b\colon [-2,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |x|$. Sei $f_j : [-2,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^j$ für $j \in \mathbb{N}_0$.

**(a)** Bestimmen Sie $d(f_2, f_1)$ und $d(f_1, b)$.

**(b)** Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass $d(f_0 + \alpha f_1, b)$ minimal wird. Skizzieren Sie für dieses $\alpha$ die Graphen von $f_0 + \alpha f_1$ und von $b$ in ein Koordinatensystem.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Wir berechnen

$$\begin{aligned}
d(f_2, f_1) &= d(x^2, x) \\
&= \left( \int_{-2}^{1} (x^2 - x)^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{-2}^{1} x^4 - 2x^3 + x^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \left[ \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^{1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \frac{171}{10} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{10}\sqrt{190}.
\end{aligned}$$

und

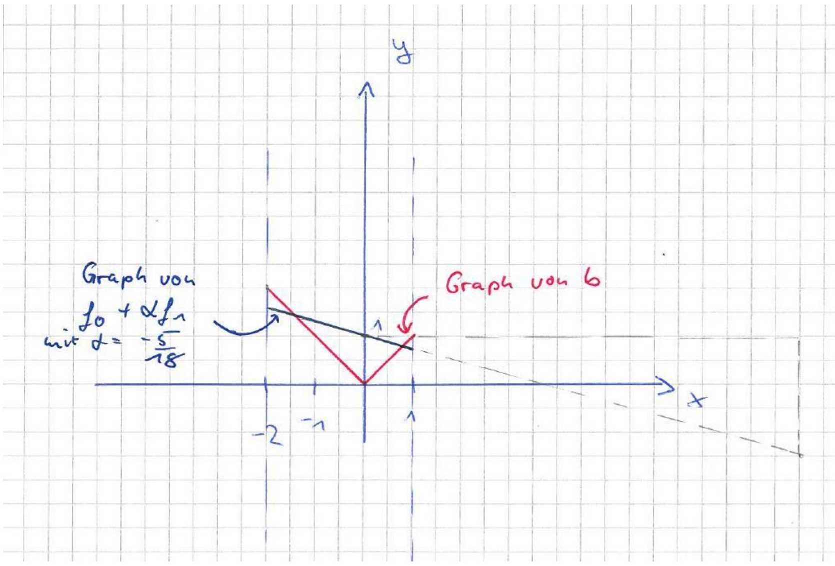
$$\begin{aligned}
d(f_1, b) &= d(x, |x|) \\
&= \left( \int_{-2}^{1} (x - |x|)^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{-2}^{0} (x - |x|)^2 \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x - |x|)^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{-2}^{0} (x - (-x))^2 \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x - x)^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{-2}^{0} 4x^2 \,\mathrm{d}x + 0 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \left[ \frac{4}{3}x^3 \right]_{-2}^{0} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \frac{32}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

**(b)** Wir rechnen zunächst den Abstand $d(f_0 + \alpha f_1, b)$ für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ aus:

$$
\begin{aligned}
d(f_0 + \alpha f_1, b) &= d(1 + \alpha x, |x|) \\
&= \left( \int_{-2}^{1} (1 + \alpha x - |x|)^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{-2}^{0} (1 + \alpha x - (-x))^2 \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (1 + \alpha x - x)^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Bigg( \int_{-2}^{0} \left(1 + 2(1+\alpha)x + (1+\alpha)^2 x^2\right) \mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{0}^{1} \left(1 + 2(\alpha - 1)x + (\alpha-1)^2 x^2\right) \mathrm{d}x \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Bigg( \left[ x + (1+\alpha)x^2 + \frac{1}{3}(1+\alpha)^2 x^3 \right]_{-2}^{0} \\
&\qquad + \left[ x + (\alpha - 1)x^2 + \frac{1}{3}(\alpha-1)^2 x^3 \right]_{0}^{1} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \left[ 2 - 4(1+\alpha) + \frac{8}{3}(1+\alpha)^2 \right] + \left[ 1 + (\alpha - 1) + \frac{1}{3}(\alpha - 1)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( 1 + \frac{5}{3}\alpha + 3\alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( 3 \left( \alpha^2 + \frac{5}{9}\alpha + \left(\frac{5}{18}\right)^2 \right) + 1 - 3\left(\frac{5}{18}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( 3\left(\alpha + \frac{5}{18}\right)^2 + \frac{83}{108} \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}
$$

Damit wird der minimale Abstand $\left(\frac{83}{108}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{18}\sqrt{249}$ angenommen, falls der quadratische Term verschwindet, d.h. falls $\alpha = -\frac{5}{18}$.

(Alternativ hätte man auch den Tiefpunkt der Parabel $p : \alpha \mapsto 1 + \frac{5}{3}\alpha + 3\alpha^2$ mit Mitteln der Differentialrechnung bestimmen können.)




Zur Funktion $x \mapsto 1 - \frac{5}{18}x$ ist noch gestrichelt das Steigungsdreieck eingezeichnet (18 Kästchen nach rechts, 5 Kästchen nach unten).

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://morw.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 10.** *Komplexe Vektorräume*

**(a)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} \\ 5-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ linear abhängig sind. Betrachten Sie den Untervektorraum $U = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} \\ 5-2\mathrm{i} \end{pmatrix}\right)$.
Geben Sie eine Basis von $U$ an und bestimmen Sie die Dimension von $U$.

**(b)** Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\mathrm{i}+5 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^3$. Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{C}$ diese Vektoren linear unabhängig sind. Bestimmen Sie für die Werte von $\alpha$, bei denen lineare Abhängigkeit eintritt, die Dimension des Aufspanns dieser Vektoren.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Es gilt $(5-2\mathrm{i})\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} \\ 5-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Damit sind bereits die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} \\ 5-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ linear abhängig. Dann sind auch $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} \\ 5-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ linear abhängig.

Da außerdem $\mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ gilt, spannt der Vektor $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ bereits den ganzen Untervektorraum $U$ auf. Dieser Vektor ist ungleich Null und wir erhalten eine Basis $B$: $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ von $U$. Die Dimension des $\mathbb{C}$-Vektorraums $U$ ist daher gleich $1$.

**(b)** Nach Definition sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\mathrm{i}+5 \\ 1 \end{pmatrix}$ in dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^3$ linear unabhängig genau dann, wenn die einzige Lösung $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ für die Gleichung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\mathrm{i}+5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ gegeben ist. Wir bestimmen also zunächst in Abhängigkeit von $\alpha$ eine Lösung $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$.
Diese Gleichung von Vektoren ist äquivalent zu dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & (1-\mathrm{i})\lambda_2 & + & \alpha\lambda_3 & = & 0 \\ (2+\mathrm{i})\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & (2\mathrm{i}+5)\lambda_3 & = & 0 \\ 0\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 1\lambda_3 & = & 0, \end{array}$$

welches folgendermaßen gelöst werden kann: Die dritte Gleichung dieses linearen Gleichungssystems besagt, dass $\lambda_3 = -2\lambda_2$ gelten muss. Damit erhalten wir

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & (1-\mathrm{i}-2\alpha)\lambda_2 & = & 0 \\ (2+\mathrm{i})\lambda_1 & + & (2-2(2\mathrm{i}+5))\lambda_2 & = & 0. \end{array}$$

Die zweite Gleichung bedeutet, dass stets $\lambda_1 = 4\lambda_2$ ist. Nach Einsetzen in die erste Gleichung bekommen wir

$$(5-\mathrm{i}-2\alpha)\lambda_2 = 0.$$

Zur Lösung dieser letzten Gleichung unterscheiden wir zwei Fälle:

- Gilt $5-\mathrm{i}-2\alpha \neq 0$ beziehungsweise $\alpha \neq \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$, so folgt, dass zwingend $\lambda_2 = 0$ ist. In diesem Fall sind auch $\lambda_1 = 4\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = -2\lambda_2 = 0$. Andere Lösungen gibt es nicht. Unsere Vektoren sind also linear unabhängig. (die Antwort $\alpha \neq \frac{5-\mathrm{i}}{2}$ ist auch richtig, weil der Nenner $2$ in diesem Fall Imaginärteil $0$ hat.)
- Gilt $5-\mathrm{i}-2\alpha = 0$ beziehungsweise $\alpha = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$, so erfüllen alle $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ die Gleichung. Alle $\lambda_1 = 4\lambda_2, \lambda_2, \lambda_3 = -2\lambda_2$ sind Lösungen, und unsere Vektoren sind linear abhängig. Zum Beispiel: $\lambda_2 = 1$. Wir bekommen: $\lambda_1 = 4\lambda_2 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2\lambda_2 = -2$ und

$$4\begin{pmatrix}1\\2+\mathrm{i}\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\2\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\\2\mathrm{i}+5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Wir schließen: $\begin{pmatrix}1\\2+\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\2\mathrm{i}+5\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\}$ ist.
Zuletzt möchten wir im Fall $\alpha = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ die Dimension des komplexen Untervektorraums $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2+\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\2\mathrm{i}+5\\1\end{pmatrix}\right)$ bestimmen. Nach unserer ganzen Vorarbeit wissen wir, dass sich der Vektor $\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\\2\mathrm{i}+5\\1\end{pmatrix}$ schreiben lässt als Linearkombination

$$\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\\2\mathrm{i}+5\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2+\mathrm{i}\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2+\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\2\mathrm{i}+5\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2+\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\2\\2\end{pmatrix}\right).$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, da zur Lösung der Gleichung

$$\mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ insbesondere für die dritte Koordinate $1\mu_1 + 0\mu_2 = 0$, also $\mu_1 = 0$ gelten muss. Es folgt aus $(2+\mathrm{i})\mu_1 + 2\mu_2 = 0$ daraufhin auch $\mu_2 = 0$.

Daher ist $B$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i}+5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

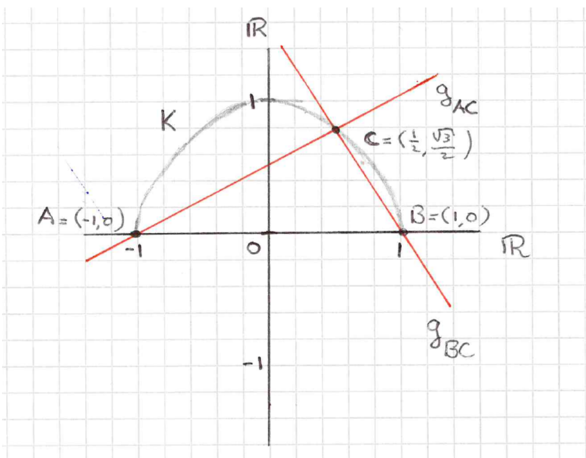
Die Dimension dieses Untervektorraums ist $2$.

**Aufgabe H 11.** *Geraden, Winkel, Satz des Thales*

Gegeben sind die Punkte $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ in $\mathbb{R}^2$.

**(a)** Skizzieren Sie die Menge $K = \{(h, \sqrt{1-h^2}) \in \mathbb{R}^2 \mid h \in [-1, 1]\}$ in die Ebene $\mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie außerdem die Punkte $A$ und $B$ ein. Sei $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in K$ gegeben. Zeichnen Sie die Gerade $g_{AC}$ ein, die durch die Punkte $A$ und $C$ verläuft. Zeichnen Sie die Gerade $g_{BC}$ ein, die durch die Punkte $B$ und $C$ verläuft.

**Lösungshinweise hierzu:**




**(b)** Bestimmen Sie Parameterdarstellungen für die Geraden $g_{AC}$ und $g_{BC}$. Untersuchen Sie, ob diese beiden Geraden orthogonal zueinander sind.

**Lösungshinweise hierzu:** Der Verbindungsvektor von $A$ und $C$ ist $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Also ist

$$g_{AC} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad ; \; t \in \mathbb{R}$$

eine Parameterdarstellung der Geraden $g_{AC}$.

Der Verbindungsvektor von $B$ und $C$ ist $(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$. Also ist

$$g_{BC}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \; ; \; t \in \mathbb{R}$$

eine Parameterdarstellung der Geraden $g_{BC}$.

Weil

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

sind die Richtungsvektoren von $g_{AC}$ und $g_{BC}$ orthogonal. Die Geraden $g_{AC}$ und $g_{BC}$ sind also orthogonal.

**(c)** Seien $P$ und $Q$ Punkte in $\mathbb{R}^2$. Sei $M$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$. Sei $R$ ein Punkt in $\mathbb{R}^2$ mit $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MR}|$. Wir setzen $u := \overrightarrow{MP}$ und $v := \overrightarrow{MR}$. Schreiben Sie $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{RQ}$ als Linearkombinationen in $u$ und $v$. Verwenden Sie dies, um $\left\langle \overrightarrow{RP} \middle| \overrightarrow{RQ} \right\rangle$ zu berechnen. Wie kann man dieses Resultat in **(b)** verwenden?

**Lösungshinweise hierzu:** Um $\left\langle \overrightarrow{RP} \middle| \overrightarrow{RQ} \right\rangle$ zu berechnen schreiben wir

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MR} = u - v$$

und

$$\overrightarrow{RQ} = -\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MR} = -u - v.$$

Wir berechnen $\left\langle \overrightarrow{RP} \middle| \overrightarrow{RQ} \right\rangle$ mit den Eigenschaften des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{RP} \middle| \overrightarrow{RQ} \right\rangle &= \langle u - v \,|\, -u - v \rangle \\ &= \langle u \,|\, -u - v \rangle + \langle -v \,|\, -u - v \rangle \\ &= \langle u \,|\, -u \rangle + \langle u \,|\, -v \rangle + \langle -v \,|\, -u \rangle + \langle -v \,|\, -v \rangle \\ &= -\langle u \,|\, u \rangle - \langle u \,|\, v \rangle + \langle v \,|\, u \rangle + \langle v \,|\, v \rangle \end{aligned}$$

Weil $\langle v \,|\, u \rangle = \langle u \,|\, v \rangle$ schreiben wir

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{RP} \,\middle|\, \overrightarrow{RQ} \right\rangle &= -\langle u \,|\, u\rangle + \langle v \,|\, v\rangle \\ &= -|\overrightarrow{MP}|^2 + |\overrightarrow{MR}|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Die Vektoren $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{RQ}$ sind also orthogonal.

Weil die Menge aller Punkte $R$ mit $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MR}|$ ein Kreis mit Mittelpunkt $M$ und Radius $|\overrightarrow{MR}|$ ist, gilt dieses Resultat für alle Punkte auf dem Kreis. Dieses Resultat ist bekannt als Satz des Thales:

*Alle Winkel am Halbkreisbogen sind rechte Winkel.*

Aufgabe **(b)** ist ein spezifisches Beispiel für einen Kreis mit Mittelpunkt $M = (0,0)$ und Radius $1$. Der Punkt $C$ ist ein Punkt auf dem Kreis.

**Aufgabe H 12.** *Vektorraum der Polynome*

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Vektorraum $\operatorname{Pol}_k \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens $k$.

**(a)** Seien $p(x) := x^3 + 2x^2 - 3$ und $q(x) := 4x - 2$ in $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$. Gegeben sei die Basis $A\colon 1, x, x^2, x^3 + x^2$ von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$. Bestimmen Sie ${}_A p$, ${}_A 0$ und ${}_A(2p - q)$.

**Lösungshinweise hierzu:**

Weil

$$x^3 + 2x^2 - 3 = -3 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot (x^3 + x^2)$$

schreiben wir ${}_A p = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Weil

$$0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot (x^3 + x^2)$$

schreiben wir ${}_A 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Weil $2p - q = 2x^3 + 4x^2 - 4x - 4$ und

$$2x^3 + 4x^2 - 4x - 4 \;=\; -4 \cdot 1 - 4 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot (x^3 + x^2)$$

schreiben wir ${}_A(2p - q) = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

**(b)** Ist $B\colon 1, x, x^2, x^3, x^2 + 3x + 6$ eine Basis von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$?

**Lösungshinweise hierzu:**
Weil

$$x^2 + 3x + 6 \;=\; 6 \cdot 1 + 3 \cdot x + 1 \cdot x^2$$

ist $B$ linear abhängig. $B$ ist also keine Basis von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$.

**(c)** Ist $C\colon x^3 + x^2 + x + 1,\ x^3 + x^2 + x,\ x^2 + x + 1,\ x^2 + x$ eine Basis von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$?

**Lösungshinweise hierzu:**
Weil

$$x^3 + x^2 + x + 1 \;=\; 1 \cdot (x^3 + x^2 + x) + 1 \cdot (x^2 + x + 1) - 1 \cdot (x^2 + x)$$

ist $C$ linear abhängig. $C$ ist also keine Basis von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$.

**(d)** Ist $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$?

**Lösungshinweise hierzu:**
Sei $p \in \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit $p(x) = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.
Weil

$$a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

und $0 \in \mathbb{R}$ ist $p$ ein Element von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$. $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ ist also eine Teilmenge von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$.

Die Teilmenge $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$, wenn die drei Eigenschaften aus Definition 2.4.4 gelten.

**(i)** Sei $p, q \in \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit $p(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2$ $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$ und $q(x) = \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot x^2$ $(\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R})$.
Weil

$$\begin{aligned} p + q &= \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot x^2 \\ &= (\alpha_0 + \beta_0) \cdot 1 + (\alpha_1 + \beta_1) \cdot x + (\alpha_2 + \beta_2) \cdot x^2 \end{aligned}$$

und $\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2 \in \mathbb{R}$ ist $p + q$ ein Element von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$.

**(ii)** Sei $p \in \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit $p(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2$ $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$ und $s \in \mathbb{R}$. Weil

$$\begin{aligned} s \cdot p &= s \cdot (\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2) \\ &= (s \cdot \alpha_0) \cdot 1 + (s \cdot \alpha_1) \cdot x + (s \cdot \alpha_2) \cdot x^2 \end{aligned}$$

und $s \cdot \alpha_0, s \cdot \alpha_1, s \cdot \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ist $s \cdot p$ ein Element von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$.

**(iii)** $0$ ist ein Element von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ weil $0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$ und $0 \in \mathbb{R}$.

$\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ ist also ein Untervektorraum von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/ (Achtung! Neuer Link!)**

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 13.** *Ebene, Hessesche Normalform*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Seien $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Punkte in $\mathbb{R}^3$.

Sei $E_\alpha$ die Ebene, die $P_1$, $P_2$ und $P_3$ enthält. Sei $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 5 \right\}$.

**(a)** Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von $E_\alpha$.

**Lösungshinweise hierzu:**

Der Verbindungsvektor von $P_1$ und $P_2$ ist $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Verbindungsvektor von $P_1$ und $P_3$ ist $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eine Parameterdarstellung von $E_\alpha$ lautet

$$E_\alpha : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**(b)** Geben Sie die Ebene $E_\alpha$ in Hessescher Normalform an. Bestimmen Sie den Abstand von $E_\alpha$ zum Ursprung. Für welche Werte von $\alpha$ ist dieser Abstand minimal?

**Lösungshinweise hierzu:**

Ein orthogonaler Vektor zu beiden Richtungsvektoren der Ebene $E_\alpha$ ist:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor zu der Ebene $E_\alpha$ ist also

$$\frac{1}{\sqrt{5+\alpha^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Weil der Normalenvektor bis auf einen Faktor $-1$ eindeutig bestimmt ist, gibt es eine weitere Möglichkeit:

$$\frac{1}{\sqrt{5+\alpha^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden den Normalenvektor der zu einem positiven $d$ führt. Der Wert des Parameters $\alpha$ bestimmt also welchen Normalenvektor wir nutzen.
Weil der Punkt $P_1$ auf der Ebene liegt, ist $d$ für $\alpha \geqq 2$

$$d = -\frac{1}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot 0 - \frac{2}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot 1 = \frac{\alpha - 2}{\sqrt{5+\alpha^2}},$$

wobei wir den ersten Normalenvektor nutzen. Für $\alpha \leqq 2$ nutzen wir den zweiten Normalenvektor und

$$d = \frac{1}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot 0 + \frac{2}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot 1 = \frac{2 - \alpha}{\sqrt{5+\alpha^2}}.$$

Die Hessesche Normalform der Ebene $E_\alpha$ ist für $\alpha \geqq 2$ also

$$E_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\frac{1}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot x_1 - \frac{2}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot x_2 + \frac{\alpha}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot x_3 = \frac{\alpha - 2}{\sqrt{5+\alpha^2}} \right\}.$$

Für $\alpha \leqq 2$ ist die Hessesche Normalform der Ebene $E_\alpha$

$$E_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot x_1 + \frac{2}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot x_2 - \frac{\alpha}{\sqrt{5+\alpha^2}} \cdot x_3 = \frac{2 - \alpha}{\sqrt{5+\alpha^2}} \right\}.$$

Der Abstand zum Ursprung ist

$$\frac{|\alpha - 2|}{\sqrt{5+\alpha^2}}.$$

Der Abstand zum Ursprung ist $0$ für $\alpha = 2$ und somit minimal.

**(c)** Für welche Werte von $\alpha$ sind die Ebenen $E_\alpha$ und $F$ zueinander orthogonal?

**Lösungshinweise hierzu:**

Zwei Ebenen sind orthogonal zueinander wenn deren Normalenvektoren orthogonal sind. Der Normalenvektor von Ebene $F$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Normalenvektoren von Ebenen $E_\alpha$ und $F$ sind orthogonal, wenn

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{5+\alpha^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Also

$$\frac{1}{\sqrt{15+3\alpha^2}}(-1-2+\alpha) = 0.$$

Für $\alpha = 3$ sind die Normalenvektoren von Ebenen $E_\alpha$ und $F$ orthogonal. Die Ebenen $E_\alpha$ und $F$ sind zueinander orthogonal für $\alpha = 3$. NB: Für den Normalenvektor

$$\frac{1}{\sqrt{5+\alpha^2}}\begin{pmatrix}1\\2\\-\alpha\end{pmatrix}$$

bekommen wir den gleichen Wert für $\alpha$.

**(d)** Bestimmen Sie für jedes $\alpha$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die einen Normalenvektor von $E_\alpha$ enthält.

**Lösungshinweise hierzu:** Ein Normalenvektor von $E_\alpha$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{5+\alpha^2}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\\alpha\end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor von $E_\alpha$ ist orthogonal zu beiden Richtungsvektoren von der Parameterdarstellung von $E_\alpha$. Wir wählen einen Richtungsvektor aus und normalisieren diesen Vektor. Wir erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Für den letzten Vektor der ONB nutzen wir das Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\\\alpha\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\5\end{pmatrix}$$

und normalisieren diesen Vektor

$$\frac{1}{\sqrt{25+\alpha^2}}\begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\5\end{pmatrix}.$$

Eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^3$ ist also:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5+\alpha^2}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\\alpha\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{25+\alpha^2}}\begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\5\end{pmatrix} \right\}.$$

**Aufgabe H 14.** *Rechnen mit Matrizen, lineare Gleichungssysteme*

Gegeben seien die folgenden Matrizen und Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Sei $S_j\colon Ax = b_j$ das zu $A$ und $b_j$ gehörende lineare Gleichungssystem. Bestimmen Sie für jedes $j \in \{0,1,2\}$ die zugehörige Lösungsmenge $\mathcal{L}(S_j)$. Wenn $\mathcal{L}(S_j)$ nicht leer ist, bestimmen Sie auch ihre Dimension.

**Lösungshinweise hierzu:** $S_0\colon Ax = b_0$ ist das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{2}x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses LGS hat dieselbe Lösungsmenge wie das LGS, das man durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung und Subtraktion der mit $2$ multiplizierten ersten Gleichung von der dritten Gleichung erhält.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Weil die zweite und die dritte Gleichung gleich sind, hat dieses LGS dieselbe Lösungsmenge wie das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten Gleichung erhalten wir das LGS

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 &= 0 \\ + x_2 - \phantom{2}x_3 &= 0, \end{aligned}$$

das dieselbe Lösungsmenge wie das ursprungliche LGS hat. Von diesem letzten LGS kann man einfach die Lösungsmenge ablesen:

$$\mathcal{L}(S_0) = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = L\Big( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big).$$

Weil die Lösungsmenge von einem Vektor, dem nicht null ist, erzeugt wird, haben wir $\dim(\mathcal{L}(S_0)) = 1$.
$S_1\colon Ax = b_1$ ist das $LGS$

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= \ -1 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= \ -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4. \end{aligned}$$

Dieses LGS hat dieselbe Lösungsmenge wie das LGS, das man durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung und Subtraktion der mit $2$ multiplizierten ersten Gleichung von der dritten Gleichung erhält.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \ -1 \\ x_2 - x_3 &= \ -2 \\ x_2 - x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Weil die zweite und die dritte Gleichung gleich sind, hat dieses LGS dieselbe Lösungsmenge als das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \ -1 \\ x_2 - x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten Gleichung erhalten wir das LGS

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2x_3 &= \quad 1 \\ + x_2 - \ \ x_3 &= -2, \end{aligned}$$

das dieselbe Lösungsmenge als das ursprungliche LGS hat. Von diesem letzten LGS ist es einfach zu sehen, dass zum Beispiel $v_{\text{sp}} = (1, -2, 0)^{\mathsf{T}}$ eine spezielle Lösung ist. Weil $S_0$ das zu $S_1$ gehörende homogene LGS ist, folgt, dass

$$\mathcal{L}(S_1) = v_{\text{sp}} + \mathcal{L}(S_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + L\Big( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big)$$

.
Per Definition gilt dann $\dim(\mathcal{L}(S_1)) = \dim(\mathcal{L}(S_0)) = 1$.
$S_2\colon Ax = b_2$ ist das $LGS$

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= \ 1 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= \ 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Dieses LGS hat dieselbe Lösungsmenge wie das LGS, das man durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten Gleichung und Subtraktion der mit $2$ multiplizierten ersten Gleichung von der dritten Gleichung erhält.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Hier können die zweite und die dritte Gleichung nicht beide erfüllt sein, deswegen hat dieses LGS keine Lösung.

(Wir haben in dieser Aufgabe tatsächlich den Gauß-Algorithmus benutzt, aber haben es zu LGSe eher als Matrizen appliziert, weil Abschnitt 3.7 noch nicht in der Vorlesung diskutiert geworden war).

**(b)** Zeigen Sie, dass
$$B^n = \begin{pmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix}$$
ist für $n \in \mathbb{N}$.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir führen einen Induktionsbeweis über $n \in \mathbb{N}$ durch:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$. In der Tat gilt

$$B^1 = B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\cdot 1 & -4\cdot 1 \\ 1 & 1-2\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

IH Nun nehmen wir an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. es gelte

$$B^n = \begin{pmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für $n$:

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B \cdot B^n \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix} && \text{unter Verwendung von IH} \\ &= \begin{pmatrix} 3\cdot(1+2n) + (-4)\cdot n & 3\cdot(-4n) + (-4)\cdot(1-2n) \\ 1\cdot(1+2n) + (-1)\cdot n & 1\cdot(-4n) + (-1)\cdot(1-2n) \end{pmatrix} && \text{Matrixmultiplikation 3.3.2} \\ &= \begin{pmatrix} 2n+3 & -4n-4 \\ n+1 & -1-2n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2(n+1) & -4(n+1) \\ n+1 & 1-2(n+1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen ist.

**Aufgabe H 15.** *Vektorprodukt und Geometrie*
Gegeben sei die Pyramide $\Delta$ mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ und die Fläche des Dreiecks mit den Ecken $A$, $B$ und $C$.

**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Laut Definition 2.10.1 folgt, dass

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot(-1) - (-2)\cdot 1\\(-2)\cdot 2 - 1\cdot(-1)\\1\cdot 1 - 0\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

ist. Laut 2.10.3(4) gilt, dass die Fläche des von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannten Parallelograms gleich

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(2,-3,1)^\intercal| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

ist. Die Fläche des Dreiecks mit den Ecken $A$, $B$ und $C$ ist die Hälfte davon, also $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

**(b)** Sei $E$ die Ebene, die $A$, $B$ und $C$ enthält. Bestimmen Sie den Punkt $X \in E$, für welchen $\overrightarrow{DX}$ orthogonal zu $E$ ist. Bestimmen Sie $|\overrightarrow{DX}|$.

**Lösungshinweise hierzu:** Die Parameterdarstellung von $E$ lautet

$$E = A + \mathbb{R}\overrightarrow{AB} + \mathbb{R}\overrightarrow{AC}$$

,

also,

$$E = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

.

Angenommen $X \in E$. Dann existieren $s, t \in \mathbb{R}$ mit

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+s+2t \\ 1+t \\ 1-2s-t \end{pmatrix}$$

.
Deswegen haben wir

$$\overrightarrow{DX} = \begin{pmatrix} 2+s+2t \\ 1+t \\ 1-2s-t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ t-1 \\ -2s-t+4 \end{pmatrix}$$

.
Es gilt, dass $\overrightarrow{DX}$ genau dann orthogonal zu $E$ ist, wenn $\overrightarrow{DX}$ orthogonal sowohl zu $\overrightarrow{AB}$ als auch zu $\overrightarrow{AC}$ ist. Das heißt, genau dann, wenn $\left\langle \overrightarrow{DX} \,\middle|\, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0$ und $\left\langle \overrightarrow{DX} \,\middle|\, \overrightarrow{AC} \right\rangle = 0$ gilt. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{DX} \,\middle|\, \overrightarrow{AB} \right\rangle &= \left\langle (s+2t, t-1, -2s-t+4)^\intercal \,\middle|\, (1,0,-2)^\intercal \right\rangle \\ &= (s+2t)\cdot 1 + (t-1)\cdot 0 + (-2s-t+4)\cdot(-2) \\ &= 5s+4t-8 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{DX} \,\middle|\, \overrightarrow{AC} \right\rangle &= \left\langle (s+2t, t-1, -2s-t+4)^\intercal \,\middle|\, (2,1,-1)^\intercal \right\rangle \\ &= (s+2t)\cdot 2 + (t-1)\cdot 1 + (-2s-t+4)\cdot(-1) \\ &= 4s+6t-5. \end{aligned}$$

Deswegen ist $\overrightarrow{DX}$ genau dann orthogonal zu $E$, wenn $(s,t)^\intercal$ das LGS

$$\begin{aligned} 5s+4t &= 8 \\ 4s+6t &= 5 \end{aligned}$$

erfüllt. Diese LGS hat dieselbe Lösungmenge wie das LGS das durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten Gleichung ensteht:

$$\begin{aligned} s-2t &= 3 \\ 4s+6t &= 5. \end{aligned}$$

Weiterhin hat dieses LGS dieselbe Lösungsmenge wie das LGS das durch Subtraktion der mit $4$ multiplizierten ersten Gleichung von der zweiten Gleichung entsteht.

$$\begin{aligned} s - \ \ 2t &= 3 \\ 14t &= -7. \end{aligned}$$

Sließlich multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $1/14$ und addieren sie dann mit $2$ multipliziert zu der ersten Gleichung um zu erhalten

$$\begin{aligned} s \ &= 2 \\ t &= -1/2. \end{aligned}$$

Also ist $\overrightarrow{DX}$ genau dann orthogonal zu $E$, wenn

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

ist. Dann gilt außerdem

$$\overrightarrow{DX} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

und deswegen

$$|\overrightarrow{DX}| = \sqrt{1^2 + (-3/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{14/4} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

(Beachten Sie, das es ein Zufall ist, dass die Fläche der Dreiecks mit den Ecken $A$, $B$ und $C$ die gleiche Größordnung als $|\overrightarrow{DX}|$ hat.)

**(c)** Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $\Delta$.

**Lösungshinweise hierzu:** Das Volumen einer Pyramide ist gleich $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, wobei $G$ die Grundfläche Pyramide und $h$ die zugehörige Höhe ist. Da in unserem Fall alle Oberflächen der Pyramide Dreiecke sind, ist es gleichgültig, welche Fläche wir als Grundfläche wählen. Geschickt ist es, diejenige Fläche zu wählen, die in der Ebene $E$ liegt. Weil $\overrightarrow{DX}$ orthogonal zu $E$ ist, ist $|\overrightarrow{DX}|$ die zu Oberfläche $ABC$ gehörige Höhe. Deswegen gilt, dass das Volumen der Pyramide $\Delta$ gleich

$$\frac{1}{3} \cdot \text{Fläche(ABC)} \cdot |\overrightarrow{DX}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

ist.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 16.** *Lineares Gleichungssystem, Gauß-Algorithmus*

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 &= -7 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{- 4x_4} - x_5 &= 17 \\
4x_1 - 6x_2 + 10x_3 - 13x_4 + 9x_5 &= -7 \\
x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 15 \\
2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 &= 24
\end{aligned}$$

**(a)** Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A\|b]$ auf. Formen Sie die Koeffizientenmatrix in die in Satz $3.7.2$ angegebene Form um.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir starten mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$[A\|b] = \left[\begin{array}{ccccc||c}
1 & -2 & 3 & -4 & 3 & -7 \\
1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 17 \\
4 & -6 & 10 & -13 & 9 & -7 \\
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 15 \\
2 & 3 & -2 & 1 & 4 & 24
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}
\\ Z_2 - Z_1\colon \\ Z_3 - 4Z_1\colon \\ \\ Z_5 - 2Z_1\colon
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc||c}
1 & -2 & 3 & -4 & 3 & -7 \\
0 & 4 & -4 & 4 & -4 & 24 \\
0 & 2 & -2 & 3 & -3 & 21 \\
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 15 \\
0 & 7 & -8 & 9 & -2 & 38
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}
\\ \frac{1}{4}Z_2\colon \\ \\ \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc||c}
1 & -2 & 3 & -4 & 3 & -7 \\
0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 6 \\
0 & 2 & -2 & 3 & -3 & 21 \\
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 15 \\
0 & 7 & -8 & 9 & -2 & 38
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}
\\ \\ Z_3 - 2Z_2\colon \\ Z_4 - Z_2\colon \\ Z_5 - 7Z_2\colon
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc||c}
1 & -2 & 3 & -4 & 3 & -7 \\
0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 5 & -4
\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 \leftrightarrow Z_5\colon \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -2 & 3 & -4 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -Z_3\colon \\ \\ Z_5 - Z_4\colon \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -2 & 3 & -4 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 4Z_4\colon \\ Z_2 - Z_4\colon \\ Z_3 + 2Z_4\colon \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 29 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 3Z_3\colon \\ Z_2 + Z_3\colon \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -2 & 0 & 0 & 20 & -37 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 2Z_2\colon \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Diese Koeffizientenmatrix ist in der in Satz $3.7.2$ angegebenen Form.

**(b)** Geben Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems an. Verwenden Sie diese und **(a)** zur Ermittlung der Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

**Lösungshinweise hierzu:** Satz $3.7.6$ liefert folgende Basis für den Lösungsraum des homogenen Systems:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum von $S\colon Ax = b$ ist

$$\mathcal{L}(S) = \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \\ 22 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

**(c)** Verfahren Sie genauso, um das lineare Gleichungssystem zu lösen, das nur aus den ersten drei der obigen Gleichungen besteht.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir starten mit der Koeffizientenmatrix

$$[C\|d] = \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -2 & 3 & -4 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 17 \\ 4 & -6 & 10 & -13 & 9 & -7 \end{array}\right]$$

Unter Verwendung der ersten Schritte von Teilaufgabe **(a)** erhalten wir das folgende äquivalente lineare Gleichungssystem und fahren mit dem Gauß-Algorithmus fort.

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -2 & 3 & -4 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 4Z_3\colon \\ Z_2 - Z_3\colon \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & 29 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 2Z_2\colon \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 23 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 \end{array}\right]$$

Durch Spaltentausch der Spalten 3 and 4 bekommen wir eine Koeffizientenmatrix in der in Satz $3.7.2$ angegebenen Form:

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 9 \end{array}\right].$$

Der Lösungsraum von $S'\colon Cx = d$ ist

$$\mathcal{L}(S') = \begin{pmatrix} 23 \\ -3 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

**Aufgabe H 17.** *Vektorraum der Polynome*

Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens $3$ und die Basis $B\colon 1, x, x^2, x^3$ davon. Sei dazuhin $E$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.

**(a)** Zeigen Sie, dass auch $C\colon 1+2x^2, x^2, -3+x, x^2+2x^3$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}$ ist.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir zeigen zunächst, dass $C\colon 1+2x^2, x^2, -3+x, x^2+2x^3$ linear unabhängig ist. Angenommen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqq i \leqq 4$ mit

$$\lambda_1(1+2x^2) + \lambda_2(x^2) + \lambda_3(-3+x) + \lambda_4(x^2+2x^3) = 0.$$

Dann gilt

$$(\lambda_1 - 3\lambda_3)1 + \lambda_3 x + (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4)x^2 + 2\lambda_4 x^3 = 0.$$

Weil $B\colon 1, x, x^2, x^3$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}^3$ ist, folgt, dass

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & & & - & 3\lambda_3 & & & = & 0 \\
& & & & \lambda_3 & & & = & 0 \\
2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & 0 \\
& & & & & & 2\lambda_4 & = & 0
\end{array}$$

ist. Deswegen gilt $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, und es folgt, dass $\lambda_1 = 3\lambda_3 = 0$ und $\lambda_2 = -2\lambda_1 - \lambda_4 = 0$. Daher gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, und somit haben wir gezeigt, dass $C\colon 1+2x^2, x^2, -3+x, x^2+2x^3$ linear unabhängig ist. Weil $\dim \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}^3 = 4$ ist, und $C$ vier linear unabhängige Vektoren enthält, folgt, dass $C\colon 1+2x^2, x^2, -3+x, x^2+2x^3$ eine Basis von $\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}$ ist.

**(b)** Sei $d\colon \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{R}\colon p(x) \mapsto xp'(x) - p(x)$. Geben Sie die Matrix ${}_Bd_C$ an.

**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt

$${}_Bd_C = \left[{}_Bd(1+2x^2) \quad {}_Bd(x^2) \quad {}_Bd(-3+x) \quad {}_Bd(x^2+2x^3)\right].$$

Deswegen berechnen wir:

$$d(1+2x^2) = x(4x) - (1+2x^2) = -1+2x^2,$$

$$d(x^2) = x(2x) - x^2 = x^2,$$

$$d(-3+x) = x(1) - (-3+x) = 3,$$

und

$$d(x^2+2x^3) = x(2x+6x^2) - (x^2+2x^3) = x^2+4x^3.$$

Damit gilt

$$_Bd(1+2x^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ _Bd(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ _Bd(-3+x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ _Bd(x^2+2x^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

und deswegen ist

$$_Bd_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**(c)** Es sei $e\colon \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon p(x) \mapsto (p(-1), p'(1))^T$. Geben Sie die Matrix $_Ee_B$ an. Bestimmen Sie die Menge aller Polynome $q(x) \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ mit $q(-1) = 2$ und $q'(1) = 0$.

**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt

$$_Ee_B = \left[ _Ee(1) \quad _Ee(x) \quad _Ee(x^2) \quad _Ee(x^3) \right].$$

Wir berechnen:

$$e(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ e(x^3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Weil $E$ die Standardbasis ist, gilt

$$e(1) = {_Ee(1)}, \quad e(x) = {_Ee(x)}, \quad e(x^2) = {_Ee(x^2)}, \quad e(x^3) = {_Ee(x^3)},$$

und deswegen ist

$$_Ee_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Angenommen $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$. Dann gilt genau dann $q(-1) = 2$ und $q'(1) = 0$, wenn $e(q(x)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und das gilt genau dann, wenn $_Ee_B\, _Bq(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, dass heißt, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deswegen wollen wie das folgende LGS lösen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Durch Addition der zweiten Zeile zu der ersten Zeile erhalten wir:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Deswegen gilt, dass die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

ist. Die Menge aller Polynome $q(x) \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ mit $q(-1) = 2$ und $q'(1) = 0$ ist deswegen

$$\mathcal{L} = 2 + L\left(-3 - 2x + x^2, -2 - 3x + x^3\right).$$

**(d)** Bestimmen Sie die Matrix ${}_E(e \circ d)_C$ und geben Sie $(e \circ d)(-3 + x + x^2 + 2x^3)$ an.

**Lösungshinweise hierzu:** Laut Satz 3.8.12 gilt

$${}_E(e \circ d)_C = {}_E e_B\, {}_B d_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Weil $E$ die Standardbasis ist, gilt außerdem, dass

$$\begin{aligned} (e \circ d)(-3 + x + x^2 + 2x^3) &= {}_E((e \circ d)(-3 + x + x^2 + 2x^3)) \\ &= {}_E(e \circ d)_C\, {}_C(-3 + x + x^2 + 2x^3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Aufgabe H 18.** *Rang, Dimensionsformel*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Seien

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha + 2 \\ 2 & 2 & 3\alpha & \alpha + 2 \\ -1 & -1 & 0 & -\alpha - 2 \end{pmatrix}, \quad b_\alpha = \begin{pmatrix} 3 + 2\alpha \\ 5 + 4\alpha \\ -3 - \alpha \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie den Rang von $A_\alpha$ in Abhängigkeit von $\alpha$.

**Lösungshinweise hierzu:** Um den Rang von $A_\alpha$ zu bestimmen, benutzen wir den Gauß-Algorithmus:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha+2 \\ 2 & 2 & 3\alpha & \alpha+2 \\ -1 & -1 & 0 & -\alpha-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 2Z_1\colon \\ Z_3 + Z_1\colon \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha+2 \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha-2 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_2\colon \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha+2 \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha-2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_3\colon \\ Z_2 + Z_3\colon \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_2\colon \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} S_2 \leftrightarrow S_3\colon \\ S_3 \leftrightarrow S_4\colon \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jetzt gibt es drei verschiedene Fälle zu betrachten.
Wenn $\alpha \notin \{-2, 0\}$ ist, gilt $\alpha \neq 0$ und $\alpha + 2 \neq 0$ und deswegen haben wir:

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{\alpha} Z_2\colon \\ \frac{1}{\alpha+2} Z_3\colon \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Daher gilt, dass $\operatorname{Rg} A_\alpha = 3$ wenn $\alpha \notin \{-2, 0\}$ ist.
Wenn $a = -2$ ist, haben wir:

$$\begin{array}{r} \\ -\frac{1}{2} Z_2\colon \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daher gilt, dass $\operatorname{Rg} A_\alpha = 2$ wenn $\alpha = -2$ ist.
Wenn $a = 0$ ist, haben wir:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{2}Z_2\colon \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} S_2 \leftrightarrow S_3\colon \\ R_2 \leftrightarrow R_3\colon \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daher gilt, dass $\operatorname{Rg} A_\alpha = 2$ wenn $\alpha = 0$ ist.
Zusammengefasst ist

$$\operatorname{Rg} A_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{wenn } \alpha \in \{-2, 0\}, \\ 3 & \text{wenn } \alpha \notin \{-2, 0\}. \end{cases}$$

**(b)** Sei $f_\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto A_\alpha x$. Bestimmen Sie die Dimension von $\operatorname{Bild}(f_\alpha)$ und die Dimension von $\operatorname{Kern}(f_\alpha)$ in Abhängigkeit von $\alpha$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_\alpha$ injektiv? Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_\alpha$ surjektiv?

**Lösungshinweise hierzu:** Bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^3$ ist die Matrix von $f_\alpha$ per Definition $A_\alpha$. Laut 3.9.2 gilt deswegen, dass

$$\dim \operatorname{Bild}(f_\alpha) = \operatorname{Rg} A_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{wenn } \alpha \in \{-2, 0\}, \\ 3 & \text{wenn } \alpha \notin \{-2, 0\} \end{cases}$$

ist. Weiter gilt laut 3.8.17 (Dimensionsformel), dass

$$\dim \operatorname{Kern}(f_\alpha) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Bild}(f_\alpha) = \begin{cases} 2 & \text{wenn } \alpha \in \{-2, 0\}, \\ 1 & \text{wenn } \alpha \notin \{-2, 0\} \end{cases}$$

ist. Laut 3.8.16 ist $f_\alpha$ genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Kern}(f_\alpha) = \{0\}$ ist, also genau dann, wenn $\dim \operatorname{Kern}(f_\alpha) = 0$ ist. Das heißt, $f_\alpha$ ist nie injektiv. Weiter ist $f_\alpha$ genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{Bild}(f_\alpha) = \mathbb{R}^3$ ist, also genau dann, wenn $\dim \operatorname{Bild}(f_\alpha) = 3$ ist. Das heißt, $f_\alpha$ ist genau dann surjektiv, wenn $\alpha \notin \{-2, 0\}$.

**(c)** Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $b_\alpha \in \operatorname{Bild}(f_\alpha)$.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir betrachten drei verschiedene Fälle:

Zunächst, wenn $\alpha \notin \{-2, 0\}$ gilt, ist $f_\alpha$ surjektiv, das heißt $\operatorname{Bild}(f_\alpha) = \mathbb{R}^3$, und damit gilt $b_\alpha \in \operatorname{Bild}(f_\alpha)$.

Wir nehmen jetzt $\alpha \in \{-2, 0\}$ an. Dann betrachten wir die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A_\alpha \| b_\alpha]$ und benutzen den Gauß-Algorithmus:

$$A_\alpha = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & \alpha+2 & 3+2\alpha \\ 2 & 2 & 3\alpha & \alpha+2 & 5+4\alpha \\ -1 & -1 & 0 & -\alpha-2 & -3-\alpha \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2-2Z_1\colon \\ Z_3+Z_1\colon \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & \alpha+2 & 3+2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha-2 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3-Z_2\colon \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & \alpha+2 & 3+2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & \alpha+1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1-Z_3\colon \\ Z_2+Z_3\colon \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 2+\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & \alpha+1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1-Z_2\colon \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 & \alpha+1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} S_2 \leftrightarrow S_3\colon \\ S_3 \leftrightarrow S_4\colon \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha+2 & 0 & \alpha+1 \end{array}\right]$$

Wenn $\alpha = -2$ erhalten wir:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Dieses LGS hat offensichtlich keine Lösungen, weshalb $b_{-2} \notin \mathrm{Bild}\,(f_{-2})$.
Wenn $\alpha = 0$ erhalten wir:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{2}Z_3\colon \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Dieses LGS ist lösbar (eine Lösung ist z.B. $(2, 0, \frac{1}{2}, 0)^\mathsf{T}$), und damit gilt $f_0((2, 0, 0, \frac{1}{2})^\mathsf{T}) = b_0$ (weil wir Vertauschen von Spalten durchgeführt haben) so, dass $b_0 \in \mathrm{Bild}\,(f_0)$. Zusammengefasst gilt also, dass $b_\alpha \in \mathrm{Bild}\,(f_\alpha)$ genau dann ist, wenn $\alpha \neq -2$ ist.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 19.** *Inverse*

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**(a)** Bestimmen Sie $A^{-1}$ und $B^{-1}$, falls dies jeweils möglich ist.

**Lösungshinweise hierzu:** Die Matrizen $A$ und $B$ sind invertierbar, weil $\det(A) = -2 \neq 0$ und $\det(B) = 1 \neq 0$.

Wir starten mit $[A \| E_3]$

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Wir erhalten also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen $B^{-1}$. Wir starten mit $[B \| E_4]$

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & -2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Wir erhalten also

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & -10 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**(b)** Bestimmen Sie die Mengen $\{X \in \mathbb{R}^{3\times 2} \mid CX = \mathrm{E}_2\}$ und $\{X \in \mathbb{R}^{3\times 2} \mid XC = \mathrm{E}_3\}$. Ist $C$ invertierbar?

**Lösungshinweise hierzu:** Wir starten mit $[C \| E_2]$

$$\left[\begin{array}{ccc||cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc||cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc||cc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Wir erhalten also

$$\{X \in \mathbb{R}^{3\times 2} \mid CX = \mathrm{E}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1-\alpha & 1-\beta \\ 2 & -1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir haben

$$XC = \mathrm{E}_3 \Leftrightarrow (XC)^\intercal = \mathrm{E}_3^\intercal \Leftrightarrow C^\intercal X^\intercal = \mathrm{E}_3.$$

Die Gleichungssystem $C^\intercal x = (0,0,1)^\intercal$ ist unlösbar. Wir erhalten also

$$\{X \in \mathbb{R}^{3\times 2} \mid XC = \mathrm{E}_3\} = \emptyset$$

und $C$ ist nicht invertierbar.

**Aufgabe H 20.** *Determinanten*

Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Gegeben seien die Matrix und die Vektoren

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 & t^2 \end{pmatrix}, \qquad x_t = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix},\ y_t = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2 \end{pmatrix},\ z_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

**(a)** Berechnen Sie $\det(A_t)$. Für welche Werte des Parameters $t$ ist $A_t$ invertierbar?

**Lösungshinweise hierzu:**

Wir bringen $A_t$ auf Dreiecksgestalt. Hier muss dabei insbesondere auf das wechselnde Vorzeichen geachtet werden. Als erstes vertauschen wir die erste und dritte Zeile:

$$\det(A_t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ t & 1 & 1 & t^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t & 1 \\ t & 1 & 1 & t^2 \end{vmatrix}.$$

Danach addieren wir $-1$ mal die zweite Zeile zur vierten Zeile $(Z_4 - Z_2)$ und $-1$ mal die erste Zeile zur dritten $(Z_3 - Z_1)$:

$$\det(A_t) = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t & 1 \\ t & 1 & 1 & t^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 & t^2 \end{vmatrix}.$$

Als letztes addieren wir $-t$ mal die erste Zeile zur vierten $(Z_4 - tZ_1)$:

$$\det(A_t) = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 & t^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 - t \end{vmatrix}.$$

Die Determinante von $A_t$ ist also

$$\det(A_t) = -(t \cdot (t^2 - t)) = t^2 - t^3.$$

$A_t$ ist invertierbar wenn $\det(A_t) \neq 0$. Für $t \neq 0$ und $t \neq 1$ ist $A_t$ also invertierbar.

**(b)** Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(A_t)$ in Abhängigkeit von $t$.

**Lösungshinweise hierzu:**

Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der Rang einer Matrix nicht. Der Rang von $A_t$ is also gleich dem Rang von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 - t \end{pmatrix}.$$

Für $t = 0$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\mathrm{Rg}(A_0) = 2$. Für $t = 1$ bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\mathrm{Rg}(A_1) = 3$. Für andere Werten des Parameters $t$ sind $t$ und $t^2 - t$ ungleich Null und $\mathrm{Rg}(A_t) = 4$.

**(c)** Seien die Spalten von $A_t$ bezeichnet mit $v_1$, $v_2$, $v_3$ und $v_4$. Sei $B_t$ die Matrix mit den Spalten $2v_2$, $3v_3$, $4v_4$ und $v_1$, in dieser Reihenfolge. Bestimmen Sie $\det(B_t)$.

**Lösungshinweise hierzu:** Die Reihenfolge $v_2$, $v_3$, $v_4$ und $v_1$ bekommen wir durch das dreifache Vertauschen von zwei Spalten:

$$v_1 - v_2 - v_3 - v_4 \Rightarrow v_2 - v_1 - v_3 - v_4 \Rightarrow v_2 - v_3 - v_1 - v_4 \Rightarrow v_2 - v_3 - v_4 - v_1.$$

Deswegen ändert sich das Vorzeichen dreimal. Multipliziert man eine Spalte von $A_t$ mit $\mu$, multipliziert sich auch die Determinante mit diesem Faktor. Für $\det(B_t)$ gilt

$$\det(B_t) = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \det(A_t) = -24 \cdot (t^2 - t^3) = 24(t^3 - t^2).$$

**(d)** Für welche Werte des Parameters $t$ ist das Volumen des von $x_t$, $y_t$ und $z_t$ aufgespannten Spats gleich $12$?

**Lösungshinweise hierzu:**

Das Volumen des aufgespannten Spats ist gleich $|\det(C_t)|$, wobei

$$C_t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2t \\ 2 & t & 2 \\ 0 & 2 & t \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante gilt nach der Regel von Sarrus

$$\det(C_t) = 4t^2 + 0 + 8t - 0 - 16 - 2t = 4t^2 + 6t - 16.$$

Das Volumen des aufgespannten Spats ist gleich $12$, wenn

$$|4t^2 + 6t - 16| = 12.$$

Das heißt, wenn

$$4t^2 + 6t - 16 = 12$$

oder

$$4t^2 + 6t - 16 = -12.$$

Die erste Gleichung hat zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} 4t^2 + 6t - 16 &= 12 \\ 4t^2 + 6t - 28 &= 0 \\ t^2 + \frac{3}{2}t - 7 &= 0 \\ (t + \frac{7}{2})(t - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$t = -\frac{7}{2}$ und $t = 2$. Die zweite Gleichung hat auch zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} 4t^2 + 6t - 16 &= -12 \\ 4t^2 + 6t - 4 &= 0 \\ t^2 + \frac{3}{2}t - 1 &= 0 \\ (t + 2)(t - \frac{1}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

$t = -2$ und $t = \frac{1}{2}$. Das Volumen des aufgespannten Spats ist also gleich $12$ für

$$t = -\frac{7}{2},\ t = 2,\ t = -2,\ t = \frac{1}{2}.$$

**Aufgabe H 21.** *Basiswechsel, Kern, Bild*

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto (2x, -2x+3y+3z)^\intercal$$

und die Basen $B: \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^2$ und $\tilde{B}: \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$.

Sei $E$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $\tilde{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

**(a)** Bestimmen Sie ${}_E\varphi_{\tilde{E}}$.

**Lösungshinweise hierzu:**

Weil

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

ist

$${}_E\varphi_{\tilde{E}} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

**(b)** Bestimmen Sie ${}_E\operatorname{id}_B$, ${}_B\operatorname{id}_E$, ${}_{\tilde{E}}\operatorname{id}_{\tilde{B}}$ und ${}_{\tilde{B}}\operatorname{id}_{\tilde{E}}$.

**Lösungshinweise hierzu:**

${}_E\operatorname{id}_B$ und ${}_{\tilde{E}}\operatorname{id}_{\tilde{B}}$ sind gegeben durch

$${}_E\operatorname{id}_B = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ {}_{\tilde{E}}\operatorname{id}_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Weil ${}_B\operatorname{id}_E = ({}_E\operatorname{id}_B)^{-1}$ berechnen wir die Inverse von ${}_E\operatorname{id}_B$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Wir addieren $-\frac{1}{2}$ mal die erste Zeile zur zweiten Zeile ($Z_2 - \frac{1}{2}Z_1$):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 1\end{array}\right).$$

Danach multiplizieren wir die erste Zeile mit $\frac{1}{2}$ und die zweite Zeile mit $\frac{1}{3}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{array}\right).$$

${}_B\mathrm{id}_E$ ist also gegeben durch:

$$ {}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. $$

Weil ${}_{\tilde{B}}\mathrm{id}_{\tilde{E}} = ({}_{\tilde{E}}\mathrm{id}_{\tilde{B}})^{-1}$ berechenen wir die Inverse von ${}_{\tilde{E}}\mathrm{id}_{\tilde{B}}$:

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). $$

Wir addieren $-1$ die erste Zeile zur zweiten Zeile ($Z_2 - Z_1$):

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). $$

Danach addieren wir einmal die dritte Zeile zur zweiten Zeile ($Z_2 + Z_3$):

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). $$

${}_{\tilde{B}}\mathrm{id}_{\tilde{E}}$ ist also gegeben durch:

$$ {}_{\tilde{B}}\mathrm{id}_{\tilde{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

**(c)** Bestimmen Sie ${}_B\varphi_{\tilde{B}}$.

**Lösungshinweise hierzu:**
Wir nutzen Satz 3.10.11 und verwenden **(a)** und **(b)**:

$$ \begin{aligned} {}_B\varphi_{\tilde{B}} &= {}_B\mathrm{id}_E \; {}_E\varphi_{\tilde{E}} \; {}_{\tilde{E}}\mathrm{id}_{\tilde{B}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

**(d)** Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und von $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

**Lösungshinweise hierzu:**
Der Kern von $\varphi$ ist gegeben durch:

$$\mathrm{Kern}\,(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Kern von $\varphi$ ist also gegeben durch die Lösungen des LGS

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Wir addieren einmal die erste Zeile zur zweiten Zeile ($Z_2 + Z_1$):

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Danach multiplizieren wir die erste Zeile mit $\frac{1}{2}$ und die zweite Zeile mit $\frac{1}{3}$:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Die Lösungsmenge des LGS ist

$$\mathrm{L}\left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Der Kern von $\varphi$ ist also gegeben durch:

$$\mathrm{Kern}\,(\varphi) = \mathrm{L}\left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Eine Basis $B$ für $\mathrm{Kern}\,(\varphi)$ ist

$$B : \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Bild von $\varphi$ ist gegeben durch:

$$\operatorname{Bild}(\varphi) = \left\{ \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt für $v = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{2} \\ \frac{u_1}{3} \\ \frac{u_2}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$\varphi(v) = u.$$

Das Bild von $\varphi$ ist also gleich $\mathbb{R}^2$. Eine Basis $\tilde{B}$ ist

$$\tilde{B} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 22.** *Determinanten*

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 2 & 1+\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} & \mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

**(a)** Berechnen Sie $\det(\tilde{A}_{11})$, $\det(\tilde{A}_{12})$, $\det(\tilde{A}_{13})$ sowie $\det(A)$.

**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt

$$\tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

und damit gilt weiter

$$\det(\tilde{A}_{11}) = \mathrm{i}^2 - 1(-1-\mathrm{i}) = \mathrm{i}.$$

Ähnlicherweise haben wir

$$\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

und

$$\det(\tilde{A}_{12}) = (-1-\mathrm{i})\mathrm{i} - (-1-\mathrm{i})\mathrm{i} = 0$$

sowie

$$\tilde{A}_{13} = \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\det(\tilde{A}_{13}) = 1(-1-\mathrm{i}) - \mathrm{i}^2 = -\mathrm{i}.$$

Laut 3.13.4 (Entwicklungssatz) gilt dann

$$\begin{aligned} \det(A) &= \mathrm{i}(-1)^{1+1}\det(\tilde{A}_{11}) + 2(-1)^{1+2}\det(\tilde{A}_{12}) + (1+\mathrm{i})(-1)^{1+3}\det(\tilde{A}_{13}) \\ &= \mathrm{i}\cdot 1\cdot \mathrm{i} + 2\cdot(-1)\cdot 0 + (1+\mathrm{i})\cdot 1\cdot(-\mathrm{i}) \\ &= -1-(1+\mathrm{i})\mathrm{i} \\ &= -1-\mathrm{i}-(-1) \\ &= -\mathrm{i}. \end{aligned}$$

**(b)** Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A$. Ist die lineare Abbildung $\gamma\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3\colon x \mapsto Ax$ surjektiv?

**Lösungshinweise hierzu:** In der Teilaufgabe (a) haben wir gesehen, dass $\det(A) \neq 0$ ist. Deswegen gilt, laut 3.12.3, dass $A$ invertierbar ist. Dann gilt weiter, laut 3.10.6, dass $\operatorname{Rang}(A) = 3$ ist, weil $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Dann folgt laut 3.10.6 (sowie laut 3.8.18), dass $\gamma\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3\colon x \mapsto Ax$ surjektiv ist.

**(c)** Finden Sie alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\det(\mu A) = 1$.

**Lösungshinweise hierzu:** Laut 3.12.8 gilt $\det(\mu A) = \mu^3 \det(A)$. Die Gleichung $\det(\mu A) = 1$ ist deshalb äquivalent zu

$$\mu^3(-\mathrm{i}) = 1,$$

das heißt

$$\mu^3 = \frac{1}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}.$$

Weil $|\mathrm{i}| = 1$ und $\arg(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$ folgt es, dass die Gleichung genau drei Lösungen hat, nämlich

$$\mu_k = \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})$$

für $k \in \{0, 1, 2\}$. Das heißt

$$\mu_0 = \cos(\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$\mu_1 = \cos(\frac{5\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i},$$

und

$$\mu_2 = \cos(\frac{3\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{3\pi}{2}) = -\mathrm{i}.$$

**(d)** Finden Sie ein Beispiel für eine Matrix $B$ mit $\det(A+B) = 0$ und $\det(B) = \det(A)$.

**Lösungshinweise hierzu:** Sei $B = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -2 & -1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$, das heißt $B$ ist die Matrix die man aus $A$ erhält, wenn mann die erste und zweite Zeile mit $-1$ multipliziert. Dann gilt laut 3.12.1, dass

$$\det(B) = (-1)^2 \det(A) = \det(A)$$

ist. Außerdem sehen wir, dass

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{i} & 2 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

ist. Deswegen gilt (z.B. laut 3.12.1) wie erwünscht, dass

$$\begin{aligned} \det(A+B) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{i} & 2 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0\cdot 0 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{i} & 2 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{i} & 2 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Aufgabe H 23.** *Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -4 & -10 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie den Lösungsraum $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathbb{R}^6$ des homogenen linearen Gleichungssystems $S : Ax = 0$. Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis für $\mathcal{L}(S)$.

**Lösungshinweise hierzu:** Um die Lösungsraum $\mathcal{L}(S)$ zu finden benutzen wir den Gauß-Algorithmus:

$$[A\|0] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 & -10 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -5 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 2Z_1: \\ Z_3 - 3Z_1: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 \leftrightarrow Z_3: \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - 2Z_2: \\ Z_4 - Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -\frac{1}{2} \cdot Z_3: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - Z_3: \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Damit folgt aus 3.7.6, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis für $\mathcal{L}(S)$ ist. Um eine Orthonormalbasis für $\mathcal{L}(S)$ zu konstruieren benutzen wir das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren. Seien

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Durchführung des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens:

$$f_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
f_2^* &= b_2 - \langle b_2 | f_1 \rangle\, f_1 \\
&= \begin{pmatrix}3\\2\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}3\\2\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - 2 \cdot \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$|f_2^*| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

$$f_2 = \frac{f_2^*}{|f_2^*|} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
f_3^* &= b_3 - \langle b_3 | f_1 \rangle \, f_1 - \langle b_3 | f_2 \rangle \, f_2 \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{44}{44} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{33}{44} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{4}{44} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{44} \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -19 \\ 29 \\ 4 \\ 44 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$|f_3^*| = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-7)^2 + (-19)^2 + 29^2 + 4^2 + 44^2}}{44} = \frac{\sqrt{3212}}{44} = \frac{\sqrt{4 \cdot 803}}{44} = \frac{\sqrt{803}}{22}$$

$$f_3 = \frac{f_3^*}{|f_3^*|} = \frac{22}{\sqrt{803}} \cdot \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -19 \\ 29 \\ 4 \\ 44 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{803}} \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -19 \\ 29 \\ 4 \\ 44 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{803}}\begin{pmatrix}-3\\-7\\-19\\29\\4\\44\end{pmatrix} \right\}$$

eine Orthonormalbasis für $\mathcal{L}(S)$.

**(b)** Sei nun die Basis $G : g_1, g_2, g_3, g_4$ von $\mathbb{R}^4$ gegeben mit

$$g_1 = (0,0,0,2)^\intercal,\ g_2 = (3,0,0,0)^\intercal,\ g_3 = (1,1,1,1)^\intercal,\ g_4 = (1,1,-1,-1)^\intercal.$$

Weisen Sie nach, dass $g_1, g_3$ eine Basis des Lösungsraums $\mathcal{L}(T)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $T : Bx = 0$ ist. Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $H : h_1, h_2, h_3, h_4$ für $\mathbb{R}^4$ so, dass $\mathrm{L}(h_1, h_2) = \mathcal{L}(T)$ ist.

**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\1&0&-1&0\\-3&3&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\1&0&-1&0\\-3&3&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Also gilt $L(g_1, g_3) \subseteqq \mathcal{L}(T)$. Weil die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, und

$$\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\end{pmatrix}$$

ist, gilt, dass der Spaltenrang von $B$ 2 ist. Damit gilt laut 3.8.17 (Dimensionsformel), dass $\dim \mathcal{L}(T) = 4 - 2 = 2$ ist. Deswegen muss

$$L(g_1, g_3) = \mathcal{L}(T)$$

sein, denn diese Vektorräume derselbe Dimension haben. Deswegen ist $g_1, g_3$ eine Basis für $\mathcal{L}(T)$. Wir wollen jetzt das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren benutzen, um eine Otrhonormalbasis $H\colon h_1, h_2, h_3, h_4$ für $\mathbb{R}^4$ zu erhalten. Damit $L(h_1, h_2) = \mathcal{L}(T) = L(g_1, g_3)$ gilt, umbenennen wir zuerst die Basisvektoren $g_1, g_2, g_3, g_4$:

$$v_1 = g_1, v_2 = g_3, v_3 = g_2, v_4 = g_4.$$

Jetzt führen wir das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren bezüglich der Basis $v_1, v_2, v_3, v_4$ durch:

$$h_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
h_2^* &= v_2 - \langle v_2 | h_1 \rangle\, h_1\\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$|h_2^*| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

$$h_2 = \frac{h_2^*}{|h_2^*|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
h_3^* &= v_3 - \langle v_3 | h_1 \rangle\, h_1 - \langle v_3 | h_2 \rangle\, h_2\\
&= \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix} \middle| \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \tfrac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$|h_3^*| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$h_3 = \frac{h_3^*}{|h_3^*|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
h_4^* &= v_4 - \langle v_4|h_1\rangle\, h_1 - \langle v_4|h_2\rangle\, h_2 - \langle v_4|h_3\rangle\, h_3 \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \middle| \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \\
&\quad - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \middle| \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \tfrac{2}{6} \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$|h_4^*| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$h_4 = \frac{h_4^*}{|h_4^*|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Laut 4.5.10 gilt dann, dass $H\colon h_1, h_2, h_3, h_4$ eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^4$ ist, mit $L(h_1, h_2) = L(v_1, v_2) = L(g_1, g_3) = \mathcal{L}(T)$, wie erwünscht.

**Aufgabe H 24.** *Affine Abbildungen und Isometrien*

Betrachten Sie die Abbildungen

$$\alpha_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \alpha_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix}1&2&2\\2&12&2\\0&4&-1\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\alpha_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \alpha_4\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} x.$$

**(a)** Welche dieser Abbildungen ist linear? Welche ist eine Isometrie? Welche ist eine Affinität, aber keine Isometrie? Welche ist ihre eigene Umkehrabbildung?

**Lösungshinweise hierzu: H24**

Wir schreiben $\alpha_k\colon x \mapsto A_k x + t_k$ für $1 \leqq k \leqq 4$, das heißt die lineare Anteile der affinen Abbildungen sind

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Translationsanteile sind

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $1 \leqq k \leqq 3$ haben wir dann, dass $\alpha_k((0,0,0)^\intercal) = t_k \neq (0,0,0)^\intercal$, und deshalb sind $\alpha_1$, $\alpha_2$ und $\alpha_3$ nicht linear. Dahingegen ist $t_4 = (0,0,0)^\intercal$, und $\alpha_4$ ist deswegen laut 3.8.4 linear.

Eine affine Abbildung ist genau dann eine Isometrie, wenn ihr linearer Anteil orthogonal ist. Die Matrizen $A_1$, $A_2$ und $A_4$ sind nicht orthogonal, z.B. weil die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht normiert sind. Dahingegen gilt, dass

$$A_3 A_3^\intercal = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E_3$$

ist, und deswegen ist nur $\alpha_3$ eine Isometrie.

Eine affine Abbildung ist genau dann eine Affinität, wenn ihr linearer Anteil regulär ist. Es gilt:

$$\det(A_1) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \neq 0 \quad \text{(Lemma 3.12.4).}$$

Laut 3.12.3 ist $A_1$ dann invertierbar, und deshalb regulär laut 3.10.7, und daher ist $\alpha_1$ eine Affinität. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \det(A_2) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(Entwicklung nach der ersten Spalte)} \\ &= (-12-8) - 2(-2-8) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Deswegen ist $A_2$ nicht invertierbar, und daher auch nicht regulär, und damit ist $\alpha_2$ keine Affinität. Es gilt auch:

$$\det(A_4) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot (-1) = 0 \quad \text{(Lemma 3.12.4).}$$

Damit ist $\alpha_4$ auch keine Affinität. Also ist nur $\alpha_1$ eine Affinität die keine Isometrie ist. Weil nur $\alpha_1$ und $\alpha_3$ Affinitäten sind, besitzen nur sie Umkehrabbildungen. Weil

$$(\alpha_1 \circ \alpha_1)(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}) = \alpha_1(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ist, ist $\alpha_1^2 \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, und daher ist $\alpha_1$ nicht ihre eigene Umkehrabbildung. Laut 4.6.6 ist die Umkehrabbildung zu $\alpha_3$ gegeben durch

$$\alpha_3^{-1} \colon x \mapsto A_3^{-1}x - A_3^{-1}t_3.$$

Weil $A_3$ sowohl orthogonal als auch symmetrisch ist, gilt laut 4.5.6, dass $A_3^{-1} = A_3^{\intercal} = A_3$ ist. Weiter haben wir, dass

$$A_3^{-1}t_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = -t_3$$

ist, und deswegen gilt, dass

$$\alpha_3^{-1} \colon x \mapsto A_3x + t_3$$

ist. Also ist $\alpha_3^{-1} = \alpha_3$, das heißt, $\alpha_3$ ist ihre eigene Umkehrabbildung.

**(b)** Bestimmen Sie $\alpha_1 \circ \alpha_2$, $\alpha_2 \circ \alpha_1$, $\alpha_1^{-1}$ sowie $\alpha_4 \circ \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$.

**Lösungshinweise hierzu:** Laut 4.6.6 gilt

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \colon x \mapsto A_1A_2x + (A_1t_2 + t_1),$$

und weil

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&12&2\\0&4&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&6&1\\4&24&4\\0&8&-2\end{pmatrix}$$

ist, und

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\-1\end{pmatrix}$$

ist, gilt deswegen, dass

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \colon x \mapsto \begin{pmatrix}1&6&1\\4&24&4\\0&8&-2\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}-3\\3\\-1\end{pmatrix}$$

ist. Ähnlicherweise gilt, dass

$$\alpha_2 \circ \alpha_1 \colon x \mapsto A_2A_1x + (A_2t_1 + t_2)$$

ist, und weil

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 12 & 2\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & 24 & 6\\ 0 & 8 & -2\end{pmatrix}$$

ist, und

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 12 & 2\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 17\\ 2\end{pmatrix}$$

ist, gilt, dass

$$\alpha_2\circ\alpha_1\colon x\mapsto\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & 24 & 6\\ 0 & 8 & -2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2\\ 17\\ 2\end{pmatrix}$$

ist.

Laut 4.6.6 ist die Umkehrabbildung zu $\alpha_1$ gegeben durch

$$\alpha_1^{-1}\colon x\mapsto A_1^{-1}x-A_1^{-1}t_1.$$

Wir berechnen $A_1^{-1}$:

$$[A_1\|E_3]=\left[\begin{array}{ccc||ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}\\ \frac{1}{2}\cdot Z_2\colon\\ \frac{1}{2}\cdot Z_3\colon\end{array}\left[\begin{array}{ccc||ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}Z_1-Z_3\colon\\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc||ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2\end{array}\right]$$

Deswegen ist

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

und weil

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

ist gilt, dass

$$\alpha_1^{-1}\colon x\mapsto\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}x-\begin{pmatrix}1/2\\ 1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

ist.

Um $\alpha_4 \circ \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$ zu berechnen, benutzen wir 4.6.6 mehrmals. Wir haben schon $\alpha_2 \circ \alpha_1$ bestimmt. Weil

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 24 & 6 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{3} & 4+24\sqrt{3} & 5+6\sqrt{3} \\ -2+\sqrt{3} & -24+4\sqrt{3} & -6+5\sqrt{3} \\ 0 & -16 & 4 \end{pmatrix}$$

ist, und

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+17\sqrt{3} \\ -17+2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$$

ist gilt, dass

$$\alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1 \colon x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{3} & 4+24\sqrt{3} & 5+6\sqrt{3} \\ -2+\sqrt{3} & -24+4\sqrt{3} & -6+5\sqrt{3} \\ 0 & -16 & 4 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+17\sqrt{3} \\ -17+2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$$

ist. Schließlich sehen wir, dass weil

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{3} & 4+24\sqrt{3} & 5+6\sqrt{3} \\ -2+\sqrt{3} & -24+4\sqrt{3} & -6+5\sqrt{3} \\ 0 & -16 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{3} & 4+24\sqrt{3} & 5+6\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -4 \end{pmatrix}$$

ist und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+17\sqrt{3} \\ -17+2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+17\sqrt{3} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist gilt, dass

$$\alpha_4 \circ \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1 \colon x \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{3} & 4+24\sqrt{3} & 5+6\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -4 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+17\sqrt{3} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 25.** *Spiegelung und Koordinatentransformation*

Seien $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Punkte in $\mathbb{R}^3$. Sei $E$ die Ebene, die $P$, $Q$ und $R$ enthält. Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene $E$.

**(a)** Zeigen Sie, dass $\mathbb{F} := (P; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR})$ ein affines Koordinatensystem ist.

**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt

$$f_1 := \overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2 := \overrightarrow{PR} = R - P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$f_3 := \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $F := (f_1 \quad f_2 \quad f_3)$ die Matrix mit Spalten $f_1$, $f_2$ und $f_3$. Die Vektoren $f_1, f_2, f_3$ sind eine basis von $\mathbb{R}^3$ weil $F$ invertierbar ist:

$$\det F = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0.$$

Es folgt also, dass $\mathbb{F} := (P; f_1, f_2, f_3)$ ein affines Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist.

**(b)** Geben Sie eine Matrix $B$ und einen Vektor $s$ an mit ${}_{\mathbb{F}}\alpha(x) = B\, {}_{\mathbb{F}}x + s$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir haben, dass $\alpha(P) = P$, $\alpha(Q) = Q$, $\alpha(R) = R$ und $\alpha(P + f_3) = P - f_3$. Sei $\widehat{F}$ die basis $f_1, f_2, f_3$. Es folgt also, dass

$${}_{\mathbb{F}}\alpha(P) = {}_{\mathbb{F}}P = {}_{\widehat{F}}\overrightarrow{PP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$${}_{\mathbb{F}}\alpha(Q) = {}_{\mathbb{F}}Q = {}_{\widehat{F}}\overrightarrow{PQ} = {}_{\widehat{F}}f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$${}_{\mathbb{F}}\alpha(R) = {}_{\mathbb{F}}R = {}_{\widehat{F}}\overrightarrow{PR} = {}_{\widehat{F}}f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{F}}\alpha(P + f_3) = {}_{\mathbb{F}}(P - f_3) &= {}_{\widehat{F}}((P - f_3) - P) \\ &= {}_{\widehat{F}}(-f_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir suchen eine Matrix $B$ und einen Vektor $s$ an mit ${}_{\mathbb{F}}\alpha(x) = B\,{}_{\mathbb{F}}x + s$ für $x \in \mathbb{R}^3$. Wir haben also

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathbb{F}}\alpha(P) = B\,{}_{\mathbb{F}}P + s \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \\
\Rightarrow &s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ähnlicherweise haben wir

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathbb{F}}\alpha(Q) = B\,{}_{\mathbb{F}}Q + s \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\text{Die erste Spalte der Matrix } B \text{ ist } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathbb{F}}\alpha(R) = B\,{}_{\mathbb{F}}R + s \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\text{Die zweite Spalte der Matrix } B \text{ ist } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&{}_{\mathbb{F}}\alpha(P+f_3) = B_{\mathbb{F}}(P+f_3)+s \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -1\end{pmatrix} = B_{\widehat{F}}((P+f_3)-P)+\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -1\end{pmatrix} = B_{\widehat{F}} f_3 \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -1\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\text{Die dritte Spalte der Matrix } B \text{ ist } \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Also,

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \text{ und } s = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.
$$

**(c)** Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

**Lösungshinweise hierzu:** Sei $F = (f_1 \quad f_2 \quad f_3)$ die Matrix mit Spalten $f_1$, $f_2$ und $f_3$. Wir haben ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(x) = Fx+P$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) = F^{-1}x - F^{-1}P$, $x\in\mathbb{R}^3$. Also

$$
{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(x) = Fx+P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.
$$

Wir starten mit $[F\|E_3]$, um $F^{-1}$ zu bestimmen.

$$
\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{array}\right]
$$

Wir erhalten also

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und

$$F^{-1}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) = F^{-1}x - F^{-1}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

**(d)** Berechnen Sie unter Verwendung von **(b)** und **(c)** eine Matrix $A$ und einen Vektor $t$ mit $\alpha(x) = Ax + t$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir haben

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= {}_{\mathbb{E}}\alpha(x) = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}\alpha(x)) = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(B_{\mathbb{F}}x + s) = F(B_{\mathbb{F}}x + s) + P \\
&= FB_{\mathbb{F}}x + Fs + P = FB_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}x) + Fs + P \\
&= FB(F^{-1}{}_{\mathbb{E}}x - F^{-1}P) + Fs + P = FBF^{-1}{}_{\mathbb{E}}x - FBF^{-1}P + Fs + P \\
&= FBF^{-1}x + (-FBF^{-1}P + Fs + P).
\end{aligned}$$

Wir erhalten also $\alpha(x) = Ax + t$, mit

$$\begin{aligned}
A = FBF^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
t &= -FBF^{-1}P + Fs + P = -FBF^{-1}P + P \\
&= -\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe H 26.** *Drehung*

Sei $\gamma \in \mathbb{R}^+$ ein Parameter. Seien

$$C_\gamma := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\gamma \\ -1 & 3 & -\gamma \\ \gamma & \gamma & 2 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto C_1x+t$. Bestimmen Sie die Fixpunktmenge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha(x) = x\}$.

**Lösungshinweise hierzu:**
Die Fixpunktmenge ist gleich die Lösungsmenge des LGS

$$(C_1 - E_3)x = -t.$$

Das LGS ist gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right).$$

Wir lösen das LGS unter Verwendung des Gauß-Algorithmus. Wir addieren $-1$ mal die erste Zeile zur zweiten Zeile $(Z_2 - Z_1)$ und $1$ mal die erste Zeile zur dritten Zeile $(Z_3 + Z_1)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \end{array}\right).$$

Die Fixpunktmenge ist also gleich

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

**(b)** Bestimmen Sie $\gamma_0 \in \mathbb{R}^+$ so, dass $C_{\gamma_0}$ eigentlich orthogonal ist.

**Lösungshinweise hierzu:**
$C_{\gamma_0}$ ist eigentlich orthogonal wenn

$$\det C_{\gamma_0} = 1$$

und $C_{\gamma_0}$ orthogonal ist. Für die Determinante gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\det C_{\gamma_0} = \frac{1}{64}(18 + \gamma_0^2 + \gamma_0^2 + 3\gamma_0^2 + 3\gamma_0^2 - 2) = \frac{\gamma_0^2}{8} + \frac{1}{4}.$$

Wir lössen die quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_0^2}{8} + \frac{1}{4} &= 1 \\ \frac{\gamma_0^2}{8} &= \frac{3}{4} \\ \gamma_0^2 &= 6 \\ \gamma_0 &= \pm\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Ein mögliche Werte von $\gamma_0$ ist $\sqrt{6}$. $C_{\sqrt{6}}$ ist eine Orthogonalmatrix weil:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \; \left\langle \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \; \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Für $\gamma_0 = \sqrt{6}$ ist $C_{\gamma_0}$ also eigentlich orthogonal.

**(c)** Bestimmen Sie die Drehwinkel und die Drehachse von $\delta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto C_{\gamma_0}x$.

**Lösungshinweise hierzu:**

Unter Verwundung von Anwendung $4.6.20$ berechnen wir den Drehwinkel von $\delta$:

$$\operatorname{Sp} C_{\gamma_0} = 2\cos(\alpha) + 1.$$

Weil $\operatorname{Sp} C_{\gamma_0} = 2$ lössen wir die Gleichung

$$2 = 2\cos(\alpha) + 1$$

und bestimmen den Drehwinkel $\alpha$:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{1}{2} \\ \alpha &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Der Drehwinkel $\alpha$ ist also gleich $\frac{\pi}{3}$.

Die Drehachse von $\delta$ bestimmen wir durch Lösen der Fixpunktgleichung $C_{\gamma_0}x = x$. Dies führt auf das homogene LGS

$$(C_{\gamma_0} - E_3)x = 0.$$

Das LGS ist gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right).$$

Wir lösen das LGS unter Verwendung des Gauß-Algorithmus. Wir addieren $-1$ mal die erste Zeile zur zweiten Zeile $(Z_2 - Z_1)$ und $\sqrt{6}$ mal die erste Zeile zur dritten Zeile $(Z_3 + \sqrt{6}Z_1)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Die Drehachse ist also gleich

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

**Aufgabe H 27.** *Koordinatentransformation*

Sei $P=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $G_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $G_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}+1\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}-1\end{pmatrix}$ und $G_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}+1\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}-1\end{pmatrix}$ Punkte in $\mathbb{R}^3$.

**(a)** Ist $\mathbb{G}=\left(P;\overrightarrow{PG_1},\overrightarrow{PG_2},\overrightarrow{PG_3}\right)$ ein kartesisches Koordinatensystem?

**Lösungshinweise hierzu:**
$\mathbb{G}$ ist gegeben durch:

$$\mathbb{G}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)$$

Weil

$$\left\langle \overrightarrow{PG_1}\,\middle|\,\overrightarrow{PG_2}\right\rangle=0,\ \left\langle \overrightarrow{PG_1}\,\middle|\,\overrightarrow{PG_3}\right\rangle=0,\ \left\langle \overrightarrow{PG_2}\,\middle|\,\overrightarrow{PG_3}\right\rangle=0$$

und

$$|\overrightarrow{PG_1}|=|\overrightarrow{PG_2}|=|\overrightarrow{PG_3}|=1$$

ist $B\colon \overrightarrow{PG_1},\overrightarrow{PG_2},\overrightarrow{PG_3}$ eine ONB. $\mathbb{G}$ ist also ein karthesisches Koordinatensystem.

**(b)** Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

**Lösungshinweise hierzu:**
Wir bilden die Matrix $G$, deren Spalten die (Standardkoordinaten der) Elemente der neuen Basis sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned}{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v)&=Gv+P\\{}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v)&=G^{-1}(v-P).\end{aligned}$$

Die Matrix $G$ ist gleich

$$\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ ist also gleich

$$ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} $$

.

Für ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ berechnen wir $G^{-1}$ unter Verwendung des Gauß-Algorithmus:

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). $$

Wir tauschen die erste und zweite Zeilen:

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). $$

Wir addieren $-1$ mal die zweite Zeile zur dritten Zeile $(Z_3 - Z_2)$:

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right). $$

Wir multiplizieren die zweite Zeile mit $\sqrt{2}$ und die dritte Zeile mit $-\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right). $$

Wir addieren $-1$ die dritte Zeile zur zweiten Zeile $(Z_2 - Z_3)$:

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right). $$

$G^{-1}$ ist also gleich

$$ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} $$

${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ ist gleich

$$ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left( v - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right). $$

**(c)** Seien $Q$ und $R$ Punkte mit ${}_{\mathbb{E}}Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und ${}_{\mathbb{G}}R = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}Q$ und ${}_{\mathbb{E}}R$.

**Lösungshinweise hierzu:**
Wir berechnen ${}_{\mathbb{G}}Q$ unter Verwendung von ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$$ \begin{aligned} {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}Q) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left( {}_{\mathbb{E}}Q - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

Wir berechnen ${}_{\mathbb{E}}R$ unter Verwendung von ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$:

$$ \begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}R) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} {}_{\mathbb{G}}R + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} + 1 \\ 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

**(d)** Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\alpha_{\mathbb{G}} := {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ \alpha \circ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

**Lösungshinweise hierzu:**
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ t := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben

$$\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax + t.$$

Die Abbildung $\alpha$ wird bezüglich $\mathbb{G}$ beschrieben durch

$${}_{\mathbb{G}}\alpha_{\mathbb{G}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto A'x + t',$$

wobei

$$\begin{aligned} A' &= G^{-1}AG \\ t' &= G^{-1}(AP - P + t). \end{aligned}$$

Wir erhalten für $A'$:

$$\begin{aligned} A' &= G^{-1}AG \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten für $t'$:

$$\begin{aligned} t' &= G^{-1}(AP - P + t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 28.** *Koordinatentransformation*

Wir betrachten das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ von $\mathbb{R}^4$ sowie die Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{4}\end{pmatrix} \right), \ \mathbb{G} = \left( \begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \right).$$

**(a)** Stellen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ auf.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir bilden zuerst die Matrizen

$$F = \begin{pmatrix}4 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G = \begin{pmatrix}0 & 0 & 4 & 1\\-1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\\0 & \frac{1}{4} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

und setzen

$$P = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Dann gilt laut 4.7.6, dass

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = Fv + P \quad \text{und} \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = F^{-1}(v - P)$$

ist, und, dass

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = Gv + Q \quad \text{und} \quad {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = G^{-1}(v - Q)$$

ist. Wir berechnen deswegen $F^{-1}$ und $G^{-1}$:

$$[F\|E_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc}4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$Z_1 + Z_3\colon \left[\begin{array}{cccc|cccc}4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r}\frac{1}{4}\cdot Z_1\colon\\(-1)\cdot Z_2\colon\\(-1)\cdot Z_3\colon\\4\cdot Z_4\colon\end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right]$$

$$[G\|E_4] = \left[\begin{array}{cccc||cccc} 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 \leftrightarrow Z_2\colon \\ \\ Z_3 \leftrightarrow Z_4\colon \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc||cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$Z_2 \leftrightarrow Z_3\colon \left[\begin{array}{cccc||cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + Z_4 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc||cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} (-1)\cdot Z_1\colon \\ 4\cdot Z_2\colon \\ \frac{1}{4}\cdot Z_3\colon \\ (-1)\cdot Z_4\colon \end{array} \left[\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Deswegen gilt:

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir:

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon v \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \left( v - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} $$

$$ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left( v - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}. $$

**(b)** Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$. Ist ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$ eine Isometrie?

**Lösungshinweise hierzu:** Laut 4.7.9 gilt ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$, und deswegen haben wir, dass

$$ \begin{aligned} {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) &= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(Gv + Q) \\ &= F^{-1}(Gv + Q - P) \\ &= F^{-1}Gv + F^{-1}(Q - P) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \end{aligned} $$

Weil

$$ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\intercal} = E_4 $$

ist, ist die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ orthogonal, und deswegen ist ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$ laut 4.6.4 eine Isometrie.

**(c)** Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ \left({}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\right)^{-1} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

**Lösungshinweise hierzu:** Laut 4.7.9 haben wir, dass

$$ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ \left({}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\right)^{-1} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{G}}. $$

ist. Die Koordinatentransformation zwischen eine Basis und sich selbst ist offensichtlich die Identitätstransformation, und deswegen gilt, dass

$$ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ \left({}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\right)^{-1} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{G}} \colon v \mapsto v $$

ist.

**Aufgabe H 29.** *Geometrische und algebraische Vielfachheit*

Gegeben seien die komplexen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \mathrm{i} & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4-\mathrm{i} & 0 & -1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3-\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Sei $v := (1, 1, 4-\mathrm{i}, 0)^\intercal$. Für welche $j \in \{1,2,3\}$ ist $v$ ein Eigenvektor von $A_j$?

**Lösungshinweise hierzu:** Wir berechnen $A_j$ für $j \in \{1,2,3\}$:

$$A_1 v = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \mathrm{i} & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4-\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+4\mathrm{i} \\ 11-2\mathrm{i} \\ 12-3\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 v = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4-\mathrm{i} & 0 & -1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4-\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1+4\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 v = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3-\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4-\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4+3\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn $v$ ein Eigenvektor von $A_j$ mit Eigenwert $\lambda_j$ ist, muss es gelten, dass

$$A_j v = \lambda_j v = \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \lambda_j \\ \lambda_j(4-\mathrm{i}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt daher, dass weil weder

$$\begin{cases} \lambda_1 = 6+4\mathrm{i} \\ \lambda_1 = 11-2\mathrm{i} \end{cases} \quad \text{(1. und 2. Koordinaten)}$$

noch

$$\begin{cases} \lambda_3 = 3 \\ \lambda_3(4-\mathrm{i}) = 4+3\mathrm{i} \end{cases} \quad \text{(1. und 3. Koordinaten)}$$

eine Lösung hat, ist $v$ kein Eigenvektor von $A_1$ oder $A_3$.

Dahingegen gilt, dass $A_2 v = \mathrm{i}v$, und deshalb ist $v$ ein Eigenvektor von $A_2$.

**(b)** Stellen Sie die charakteristischen Polynome $\chi_{A_j}(\lambda)$ auf, und bestimmen Sie die algebraische und die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte von $A_j$ für $j \in \{1,2,3\}$. Hat $\mathbb{C}^4$ eine Basis aus Eigenvektoren für $A_j$? Wenn ja, geben Sie eine solche Basis an.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\chi_{A_1}(\lambda) &= \det(A_1 - \lambda E_4) \\
&= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & \mathrm{i} & 8 \\ 0 & 3-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)^3(\mathrm{i}-\lambda) \quad \text{(3.12.4 Dreiecksmatrizen)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{A_2}(\lambda) &= \det(A_2 - \lambda E_4) \\
&= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 & 1 \\ 4-\mathrm{i} & 0 & -1+\mathrm{i}-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{2+2}(3-\lambda)\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 4-\mathrm{i} & -1+\mathrm{i}-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{(Entw. 2. Spalte)} \\
&= (-1)^{3+3}(3-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 4-\mathrm{i} & -1+\mathrm{i}-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{(Entw. 3. Zeile)} \\
&= (3-\lambda)^2[(4-\lambda)(-1+\mathrm{i}-\lambda) - (-1)(4-\lambda)] \\
&= (3-\lambda)^2[\lambda^2 - (3+\mathrm{i})\lambda + 3\mathrm{i}] \\
&= (3-\lambda)^2(3-\lambda)(\mathrm{i}-\lambda) \\
&= (3-\lambda)^3(\mathrm{i}-\lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{A_3}(\lambda) &= \det(A_3 - \lambda E_4) \\
&= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 3-\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (3-\lambda)^2(\mathrm{i}-\lambda)(3-\lambda) \quad \text{(3.12.4 Dreiecksmatrizen)} \\
&= (3-\lambda)^3(\mathrm{i}-\lambda)
\end{aligned}$$

Also sehen wir, dass

$$\chi_{A_1}(\lambda) = \chi_{A_2}(\lambda) = \chi_{A_3}(\lambda) = (3-\lambda)^3(\mathrm{i}-\lambda)$$

ist. Deswegen sind $3$ und $i$ die Eigenwerte von $A_j$ für alle $j \in \{1,2,3\}$, und weiterhin gilt, dass

$$e_3 = 3 \quad \text{und} \quad e_{\mathrm{i}} = 1 \quad \text{(algebraische Vielfachheit)}$$

für alle $j \in \{1,2,3\}$. Um die geometrische Vielfachheit der Eigenwerten von $A_1$ zu bestimmen, führen wir Rangberechnungen durch:

$$\mathsf{Rg}(A_1 - \mathrm{i}E_4) = \mathsf{Rg}\begin{pmatrix} 3-\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} & 8 \\ 0 & 3-\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{aligned} \mathsf{Rg}(A_1 - 3E_4) &= \mathsf{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 2 & \mathrm{i} & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}-3 \end{pmatrix} \\ &\underset{Z_3 \leftrightarrow Z_4:}{=} \mathsf{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 2 & \mathrm{i} & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \end{aligned}$$

Laut 3.8.17 (Dimensionsformel) gilt damit für $A_1$, dass

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{i}} &= \dim V(\mathrm{i}) \\ &= \dim \mathsf{Kern}(A_1 - \mathrm{i}E_4) \\ &= 4 - \mathsf{Rg}(A_1 - \mathrm{i}E_4) \\ &= 4 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

und, dass

$$\begin{aligned} d_3 &= \dim V(3) \\ &= \dim \mathsf{Kern}(A_1 - 3E_4) \\ &= 4 - \mathsf{Rg}(A_1 - 3E_4) \\ &= 4 - 3 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das Verfahren für $A_2$ und $A_3$ ist derselbe:

$$\mathsf{Rg}(A_2 - \mathrm{i}E_4) = \mathsf{Rg}\begin{pmatrix} 4-\mathrm{i} & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 4-\mathrm{i} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{r} Z_1 \leftrightarrow Z_2\colon \\ \mathsf{Rg} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3-\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 4-\mathrm{i} & 0 & -1 & 1 \\ 4-\mathrm{i} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{r} \\ Z_2-(4-\mathrm{i})Z_1\colon \\ \mathsf{Rg} \\ Z_3-(4-\mathrm{i})Z_1\colon \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3-\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 0 & -11+7\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} & \mathrm{i}-3 \\ 0 & -11+7\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} & \mathrm{i}-3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ \mathsf{Rg} \\ Z_3 - Z_2\colon \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3-\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 0 & -11+7\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} & \mathrm{i}-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ \mathsf{Rg} \\ Z_3 \leftrightarrow Z_4\colon \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3-\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 0 & -11+7\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} & \mathrm{i}-3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathsf{Rg}(A_2 - 3E_4) = \mathsf{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4-\mathrm{i} & 0 & -4+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{r} Z_2 - Z_1\colon \\ \mathsf{Rg} \\ Z_3-(4-\mathrm{i})Z_1\colon \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ \mathsf{Rg} \\ Z_2 \leftrightarrow Z_3\colon \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Laut 3.8.17 (Dimensionsformel) gilt damit für $A_2$, dass

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{i}} &= \dim V(\mathrm{i}) \\ &= \dim \mathsf{Kern}(A_2 - \mathrm{i}E_4) \\ &= 4 - \mathsf{Rg}(A_2 - \mathrm{i}E_4) \\ &= 4 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

und, dass

$$\begin{aligned} d_3 &= \dim V(3) \\ &= \dim \mathsf{Kern}(A_2 - 3E_4) \\ &= 4 - \mathsf{Rg}(A_2 - 3E_4) \\ &= 4 - 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Schließlich zum Fall $j = 3$:

$$\begin{aligned} \mathsf{Rg}(A_3 - \mathrm{i}E_4) &= \mathsf{Rg}\begin{pmatrix} 3-\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 3-\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ \underset{Z_3 - Z_1:}{=} & \mathsf{Rg}\begin{pmatrix} 3-\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ \underset{Z_3 \leftrightarrow Z_4:}{=} & \mathsf{Rg}\begin{pmatrix} 3-\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \end{aligned}$$

$$\mathsf{Rg}(A_3 - 3E_4) = \mathsf{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3-\mathrm{i} & 0 & -3+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Laut 3.8.17 (Dimensionsformel) gilt damit für $A_3$, dass

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{i}} &= \dim V(\mathrm{i}) \\ &= \dim \mathsf{Kern}(A_3 - \mathrm{i}E_4) \\ &= 4 - \mathsf{Rg}(A_3 - \mathrm{i}E_4) \\ &= 4 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

und, dass

$$\begin{aligned} d_3 &= \dim V(3) \\ &= \dim \mathsf{Kern}(A_3 - 3E_4) \\ &= 4 - \mathsf{Rg}(A_3 - 3E_4) \\ &= 4 - 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Für $A_1$ gilt, dass

$$d_\mathrm{i} + d_3 = 1 + 1 = 2 < 4 = \dim \mathbb{C}^4$$

ist, und deswegen hat $\mathbb{C}^4$ keine Basis aus Eigenvektoren für $A_1$.

Für $A_2$ gilt, dass

$$d_\mathrm{i} + d_3 = 1 + 2 = 3 < 4 = \dim \mathbb{C}^4$$

ist, und deswegen hat $\mathbb{C}^4$ keine Basis aus Eigenvektoren für $A_2$.

Für $A_3$ gilt, dass

$$d_\mathrm{i} + d_3 = 1 + 3 = 4 = \dim \mathbb{C}^4$$

ist, und deswegen kann es sein, dass $\mathbb{C}^4$ eine Basis aus Eigenvektoren für $A_3$ hat (laut 5.3.5 muss $\mathbb{C}^4$ eine solche Basis haben, aber das war bei der Zeit des Übungsblatts noch nicht in der Vorlesung erwähnt geworden). Um eine solche Basis zu bestimmen, berechnen wir die zu den Eigenwerten 3 und $\mathrm{i}$ entsprechende Eigenräume:

$$[A_3 - \mathrm{i}E_4 \| 0] = \left[\begin{array}{cccc||c} 3-\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\mathrm{i} & 0 \end{array}\right]$$

$$Z_3 - Z_1 : \left[\begin{array}{cccc||c} 3-\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Deswegen gilt, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis für $V(\mathrm{i})$ ist.

$$[A_3 - 3E_4\|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3-\mathrm{i} & 0 & -3+\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$Z_1 \leftrightarrow Z_3\colon \left[\begin{array}{cccc|c} 3-\mathrm{i} & 0 & -3+\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{3-\mathrm{i}} \cdot Z_1\colon \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Deswegen gilt, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis für $V(3)$ ist. Weil

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

linear unabhängig ist, ist es eine Basis für $\mathbb{C}^4$, und deswegen hat $\mathbb{C}^4$ eine Basis aus Eigenvektoren für $A_3$.

**(c)** Gilt $\det(A_2) = \det(A_3)$? Ist $A_2$ zu $A_3$ konjugiert?

**Lösungshinweise hierzu:** Laut 5.2.3.1 ist die Determinante einer Matrix das Produkt aller Eigenwerte (dabei sind die Eigenwerte jeweils mit den entsprechenden Vielfachheiten zu nehmen). Weil $\chi_{A_2}(\lambda) = \chi_{A_3}(\lambda)$ folgt deswegen, dass $\det A_2 = \det A_3$ ist. Laut 5.2.2.6 gilt allerdings, dass wenn zwei Matrizen $A$ und $B$ konjugiert sind, dann gibt es genau dann eine Basis aus Eigenvektoren von $A$, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren von B gibt. Im Teilaufgabe (b) haben wir gesehen, dass es eine Basis aus Eigenvektoren von $A_3$ gibt, während es keine Basis aus Eigenvektoren von $A_2$ gibt. Deswegen sind $A_2$ und $A_3$ nicht konjugiert.

**Aufgabe H 30.** *Parameterabhängiges charakteristisches Polynom*

Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Wir betrachten die Matrix $B_t = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & t \\ 0 & t & -1 \\ 0 & -t^2+1 & t \end{pmatrix}$.

**(a)** Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $B_t$.

**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt

$$\begin{aligned}
\chi_{B_t}(\lambda) &= \det(B_t - \lambda E_3) \\
&= \det\begin{pmatrix} t-1-\lambda & 1 & t \\ 0 & t-\lambda & -1 \\ 0 & -t^2+1 & t-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}(t-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} t-\lambda & -1 \\ -t^2+1 & t-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{(Entw. 1. Spalte)} \\
&= (t-1-\lambda)[(t-\lambda)^2 - (-1)(-t^2+1)] \\
&= (t-1-\lambda)[t^2 - 2\lambda t + \lambda^2 - t^2 + 1] \\
&= (t-1-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda t + 1].
\end{aligned}$$

**(b)** Geben Sie ein solches $t \in \mathbb{R}$ an, dass $B_t$ drei verschiedene reelle Eigenwerte hat.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir sehen, dass

$$\lambda^2 - 2\lambda t + 1 = 0 \iff \lambda = t \pm \sqrt{t^2 - 1}.$$

Deswegen gilt, dass die Nullstellen von $\chi_{B_t}(\lambda)$, das heißt die Eigenwerte von $B_t$

$$\lambda_1 = t - 1, \quad \lambda_2 = t + \sqrt{t^2 - 1} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = t - \sqrt{t^2 - 1}$$

sind. Für $t = 2$ sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$$

von $B_2$ deswegen alle verschiedene.

**(c)** Geben Sie ein solches $t \in \mathbb{R}$ an, dass $B_t$ genau zwei verschiedene Eigenwerte hat, und berechnen Sie die jeweiligen Eigenräume in $\mathbb{C}^3$.

**Lösungshinweise hierzu:** Für $t = 1$ sind die Eigenwerte von $B_1$

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$

das heißt $B_1$ hat genau zwei verschiedene Eigenwerte. Wir berechnen die jeweiligen Eigenräume in $\mathbb{C}^3$:

$$[B_1 - 0 \cdot E_3 \| 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$Z_2 - Z_1\colon \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_3\colon \\ Z_2 + 2Z_3\colon \\ \phantom{x} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Deswegen gilt, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis für den Eigenraum $V(0)$ ist. Weiter gilt:

$$[B_1 - 1 \cdot E_3 \| 0] = \left[ \begin{array}{ccc||c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$Z_1 + Z_2 \colon \left[ \begin{array}{ccc||c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{r} (-1) \cdot Z_1 \colon \\ (-1) \cdot Z_2 \colon \\ \phantom{0} \end{array} \left[ \begin{array}{ccc||c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Deswegen gilt, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis für den Eigenraum $V(1)$ ist.

**(d)** Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat $B_t$ mindestens einen nicht-reellen Eigenwert?

**Lösungshinweise hierzu:** Weil $t \in \mathbb{R}$, und die Eigenwerte von $B_t$

$$\lambda_1 = t - 1, \quad \lambda_2 = t + \sqrt{t^2 - 1} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = t - \sqrt{t^2 - 1}$$

sind, hat $B_t$ genau dann mindestens einen nicht-reellen Eigenwert, wenn $t^2 - 1 < 0$ ist. Das heißt, dass $B_t$ genau dann mindestens einen nicht-reellen Eigenwert, wenn $-1 < t < 1$ ist.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 31.** *Orthogonales Diagonalisieren*

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 9 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie den Rang von $A$.

**Lösungshinweise hierzu:**

Wir bestimmen die Spalten von Matrix $A$ mit $v_1$, $v_2$, $v_3$ und $v_4$. Weil

$$\begin{aligned} v_2 &= -3 \cdot v_1, \\ v_3 &= 2 \cdot v_1, \\ v_4 &= -1 \cdot v_1, \end{aligned}$$

ist der Spaltenrang von $A$ (Maximalzahl linear unabhängiger Spalten) gleich $1$. Der Rang von $A$ ist also $1$.

**(b)** Bestimmen Sie die Determinante und die Spur von $A$.

**Lösungshinweise hierzu:**

Der Rang von $A$ ist kleiner als $4$. Nach Lemma $3.12.2$ ist $\det A = 0$. Die Spur von $A$ ist die Summe der Hauptdiagonalelemente. Die Spur von Matrix $A$ ist also gleich $15$.

**(c)** Berechnen Sie die Eigenwerte von $A$.
Berechnen Sie ihre geometrische und algebraische Vielfachheiten.

**Lösungshinweise hierzu:**

$A$ ist eine symmetrische reelle Matrix. Die geometrische und algebraische Vielfachheiten stimmen also überein. Weil $\operatorname{Rg} A = 1$, ist $0$ ein Eigenwert von $A$ mit geometrischer (und algebraischer) Vielfachheit $3$. Matrix $A$ ist eine $4 \times 4$ Matrix: Es gibt also noch einen Eigenwert mit geometrischer (und algebraischer) Vielfachheit $1$. Die Spur von Matrix $A$ ist gleich der Summe der Eigenwerte. $15$ ist also ein Eigenwert mit geometrischer (und algebraischer) Vielfachheit $1$.

$$\lambda_1 = 0,\ e_0 = 3,\ d_0 = 3 \qquad \lambda_2 = 15,\ e_{15} = 1, d_{15} = 1.$$

**(d)** Bestimmen Sie eine Orthogonalmatrix $T$ und eine Diagonalmatrix $D$ mit $T^{-1}DT = A$.

**Lösungshinweise hierzu:**

Die Matrix $A$ ist symmetrisch und also orthogonal diagonalisierbar. Der Eigenraum zum EW $15$ ist gleich dem Lösungsraum des homogenen LGS.

$$\begin{pmatrix} -14 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & -11 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -14 \end{pmatrix}.$$

Wir tauschen die erste und vierte Zeile.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & -14 \\ -3 & -6 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & -11 & -2 \\ -14 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren $-3$ mal die erste Zeile zur zweiten Zeile $(Z_2 - 3Z_1)$, $2$ mal die erste Zeile zur dritten Zeile $(Z_3 + 2Z_1)$ und $-14$ mal die erste Zeile zur vierten Zeile $(Z_4 - 14Z_1)$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & -14 \\ 0 & -15 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \\ 0 & -45 & 30 & 195 \end{pmatrix}.$$

Wir multiplizieren die erste Zeile mit $-1$, die zweite Zeile mit $-\frac{1}{15}$, die dritte Zeile mit $-\frac{1}{15}$ und die vierte Zeile mit $-\frac{1}{15}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren $-3$ mal die zweite Zeile zur vierten Zeile $(Z_4 - 3Z_2)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren $2$ mal die dritte Zeile zur vierten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zum EW $15$ ist also

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Der Eigenraum zum EW $0$ ist gleich dem Lösungsraum des homogenen LGS

$$\begin{pmatrix}1&-3&2&-1\\-3&9&-6&3\\2&-6&4&-2\\-1&3&-2&1\end{pmatrix}.$$

Wir addieren $3$ mal die erste Zeile zur zweiten Zeile $(Z_2+3Z_1)$, $-2$ mal die erste Zeile zur dritten Zeile $(Z_3-2Z_1)$ und $1$ mal die erste Zeile zur vierten Zeile $(Z_4+Z_1)$.

$$\begin{pmatrix}1&-3&2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zum EW $0$ ist also

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Ein Orthonormalsystem gewinnen wir mit dem Schmidtschen Orthonormierungsverfahren:

$$f_1^* = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$f_2^* = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$f_3^* = \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{-3}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Nach Normierung erhalten wir:

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben $D = S^{-1}AS$, wobei

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$A = SDS^{-1}.$$

Die Orthogonalmatrix $T$ ist also gleich $S^{-1}(= S^{\mathsf{T}})$:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{15}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{-2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

**Aufgabe H 32.** *Eigenwerte, Definitheit*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

**(a)** Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$ in Abhängigkeit von $\alpha$.

**Lösungshinweise hierzu:**

Die Eigenwerte von Matrix $A$ sind die Nullpunkte des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= -\lambda(2-\lambda) - 3\alpha. \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3\alpha \end{aligned}$$

Wir bekommen:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1+3\alpha}, \ \lambda_2 = 1 - \sqrt{1+3\alpha}.$$

**(b)** Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte in Abhängigkeit von $\alpha$.

**Lösungshinweise hierzu:**
Für $\alpha \neq -\frac{1}{3}$ ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und die algebraische und geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte gleich $1$.
Für $\alpha = -\frac{1}{3}$ gillt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Die algebraische Vielfachheit ist also $2$. In diesem Fall ist der Eigenraum gleich dem Lösungsraum des homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren $\frac{1}{3}$ mal die erste Zeile zur zweiten Zeile $(Z_2 + \frac{1}{3}Z_1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum ist also gleich

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Die geometrische Vielfachheit ist in diesem Fall also $1$.

**(c)** Für welche Werte des Parameters $\alpha$ ist $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $A$?

**Lösungshinweise hierzu:**
$v$ ist ein Eigenvektor von der Matrix $A$, wenn gilt:

$$Av = \lambda v.$$

Weil

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3\alpha \end{pmatrix}$$

ist $\lambda = 3$ der einzige mögliche Eigenwert. $3\alpha$ ist also gleich $3$. $v$ ist ein Eigenvektor von der Matrix $A$ für $\alpha = 1$.

**(d)** Ist die quadratische Form $q_{A_3} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^\intercal A_3 x$ positiv definit, negativ definit oder indefinit? Geben Sie einen Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ an mit $q_{A_3}(y) < 0$.

**Lösungshinweise hierzu:**
Die Eigenwerte von $A_3$ sind gleich $1 + \sqrt{10} > 0$ und $1 - \sqrt{10} < 0$. Die Quadrik ist also indefinit. Für $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt

$$q_{A_3}(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4.$$

**Aufgabe H 33.** *Quadriken, Typ einer Quadrik*

**(a)** Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Bestimmen Sie für die Quadrik

$$Q_\alpha : x_1^2 - 2x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{5}x_1 + 4\sqrt{5}x_2 + \alpha = 0$$

die Matrixbeschreibung, die erweiterte Matrix und den Typ in Abhängigkeit von $\alpha$.

**(b)** Sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0\}$. Zeichnen Sie die Schnitte von $Q$ mit den Koordinatenebenen $E_{2,3} : x_1 = 0$, $E_{1,3} : x_2 = 0$ und $E_{1,2} : x_3 = 0$ in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein.

**(c)** Sei $Q' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_2^2 = 0\}$. Zeichnen Sie die Schnitte von $Q'$ mit den Koordinatenebenen $E_{2,3} : x_1 = 0$, $E_{1,3} : x_2 = 0$ und $E_{1,2} : x_3 = 0$ in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Man liest ab

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad a^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \alpha,$$

sowie

$$A^\alpha_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & 1 & 2 & 0 \\ 2\sqrt{5} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\operatorname{Rg} A^\alpha = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & \text{for } \alpha \neq 0 \\ 2 & \text{for } \alpha = 0 \end{cases}$$

und weiter

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & 1 & 2 & 0 \\ 2\sqrt{5} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} \frac{\alpha\sqrt{5}}{5} & 1 & 2 & 0 \\ \sqrt{5} & 1 & 2 & 0 \\ 2\sqrt{5} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} \frac{\alpha\sqrt{5}}{5} & 1 & 2 & 0 \\ \sqrt{5} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Also haben wir

$$\operatorname{Rg} A^\alpha_{\text{erw}} = \begin{cases} 3 & \text{for } \alpha = 0 \\ 3 & \text{for } \alpha = 5 \\ 4 & \text{for sonst} \end{cases}$$

und es ergeben sich damit die Fälle:

$\boldsymbol{\alpha = 0}$: $\operatorname{Rg} A^\alpha_{\text{erw}} = 3 = \operatorname{Rg} A^\alpha + 1$. Also liegt eine *Mittelpunktsquadrik* vor.

$\boldsymbol{\alpha \neq 0}$:

$\boldsymbol{\alpha = 5}$: $\operatorname{Rg} A^{\alpha}_{\text{erw}} = 3 = \operatorname{Rg} A^{\alpha}$. Also liegt eine *kegelige Quadrik* vor.

$\boldsymbol{\alpha \neq 5}$: $\operatorname{Rg} A^{\alpha}_{\text{erw}} = 4 = \operatorname{Rg} A^{\alpha} + 1$. Also liegt eine *Mittelpunktsquadrik* vor.

**(b)** Um sich ein Bild der Quadrik zu machen, werden die Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen betrachtet.
$\boldsymbol{x_1 = 0}$ : Einsetzen der Ebenengleichung $x_1 = 0$ in die Quadrik ergibt $\tilde{Q} : -2x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$, welches die Schnittquadrik ist, die sich beim Schneiden der Quadrik mit der $x_2, x_3$-Ebene ergibt. Um diese Quadrik zu verstehen betrachten wir wiederum die Schnitte mit den Koordinatenachsen $x_2$ und $x_3$. $x_2 = 0$ liefert in $\mathbb{R}$ die leere Menge, also gibt es keinen Schnittpunkt mit der $x_2$-Achse. $x_3 = 0$ liefert die Schnittpunkte $x_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Um den Rest der Quadrik $\tilde{Q}$ zu verstehen, löst nach einer Variablen auf und betrachtet die Asymptoten. Wir haben $x_3 = \pm\sqrt{2x_2^2 - 1}$ und wegen

$$\left|\pm\sqrt{2x_2^2 - 1} \mp \sqrt{2x_2^2}\right| \to 0 \quad \text{für } |x_2| \to \infty$$

sind die Asymptoten durch $x_3 = \pm\sqrt{2}x_2$ gegen. Die ist eine Hyperbel
$\boldsymbol{x_2 = 0}$ : Einsetzen der Ebenengleichung $x_2 = 0$ in die Quadrik ergibt $\tilde{Q} : x_1^2 + x_3^2 + 1 = 0$. Dies ist in $\mathbb{R}$ die leere Menge.
$\boldsymbol{x_3 = 0}$ : Einsetzen der Ebenengleichung $x_3 = 0$ in die Quadrik ergibt $\tilde{Q} : x_1^2 - 2x_2^2 + 1 = 0$. Ebenso wie im Fall $x_1 = 0$, ist dies eine Hyperbel mit Achsenschnittpunkten $x_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Die Asymptoten sind $x_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x_1$
**(c)** Die Quadrik enthält nicht die $x_3$-Koordinate in ihrer Beschreibung, d.h. $x_3$ ist frei wählbar. Dementsprechend handelt es sich um einen Zylinder, dessen Grundfläche die Quadrik $Q'$ aufgefasst als Quadrik in der $x_1, x_2$-Ebene hat. Wir müssen also nur noch diese verstehen. Es ist

$$0 = x_1^2 - 2x_2^2 = (x_1 + \sqrt{2}x_2)(x_1 - \sqrt{2}x_2)$$

Diese Quadrik ist also für alle $x_3 \in \mathbb{R}$ das sich schneidende Geradenpaar bestehend aus

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1$$
$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1.$$

Insgesamt ergibt sich ein sich schneidendes Ebenenpaar in $\mathbb{R}^3$.
**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/**

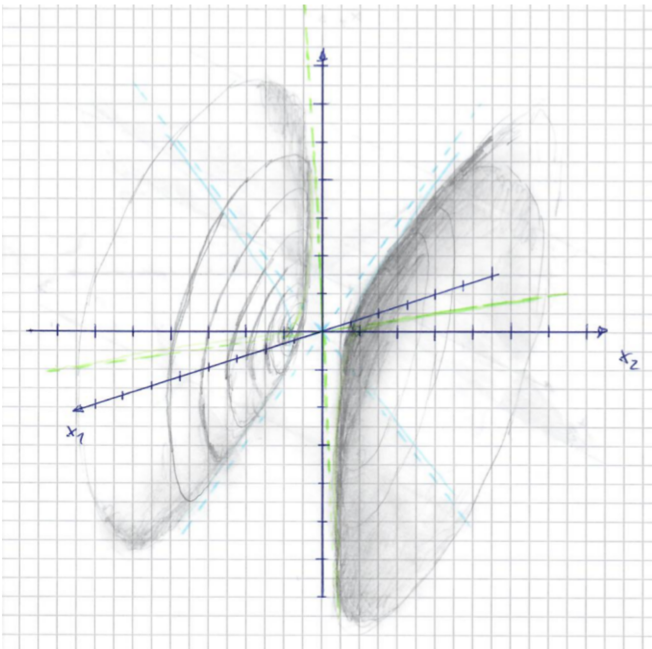



Abbildung 1: Illustration Aufgabenteil b). Die blau gestrichelten Linien sind die Asymptoten in der $x_2, x_3$-Ebene. In blau sind die Schnitthyperbeln eingezeichnet. Die grün gestrichelten Linien sind Asymptoten in der $x_1, x_2$-Ebene und die grünen durchgezogenen Linien wiederum die Schnitthyperbeln der $x_1, x_2$-Ebene.

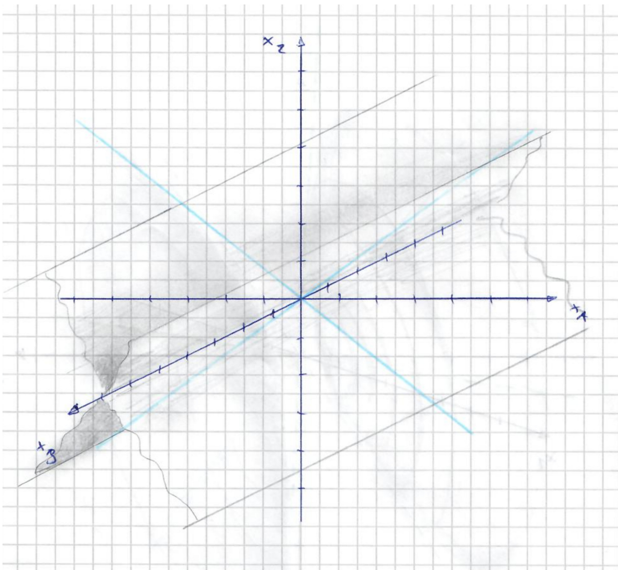



Abbildung 2: Illustration Aufgabenteil c). Abgebildet in blau ist das sich schneidende Geradenpaar aus c) in der $x_1, x_2$-Ebene.

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 34.** *Quadrikgleichung transformieren*

Wir betrachten die Quadrik $Q : 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 = 0$ und das kartesische Koordinatensystem

$$\mathbb{F} := \left( \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right).$$

**(a)** Ist die Quadrik $Q$ in euklidischer Normalform dargestellt? Welchen Typ hat $Q$? Welche Gestalt hat $Q$?

**Lösungshinweise hierzu:** Ja, die Quadrik ist auf der euklidischen Normalform

$$\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 x_3^2 = 0$$

dargestellt, und es handelt sich deswegen nach 6.3.5. um eine kegelige Quadrik. Die zu Q entsprechende affine Normalform ist

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

und ihre Gestalt ist deswegen laut 6.3.8. ein Doppelkegel.

**(b)** Betrachten Sie die Schnitte von $Q$ mit den Ebenen $E : x_3 = 0$, $E' : x_3 = 1$ und $E'' : x_2 = 1$. Bestimmen Sie die Gestalten dieser Schnitte.

**Lösungshinweise hierzu:** Der Schnitt $E_1 \cap Q$ ist durch die Gleichung

$$2x_1^2 + 3x_2^2 = 0$$

beschrieben. Die entsprechende affine Normalform ist

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

und laut 6.3.9 ist die Gestalt von $E_1 \cap Q$ deswegen ein Punkt.
Der Schnitt $E_2 \cap Q$ ist durch die Gleichung

$$2x_1^2 + 3x_2^2 - 1 = 0$$

beschrieben. Die entsprechende euklidiche Normalform ist

$$-2x_1^2 - 3x_2^2 + 1 = 0$$

und die affine Normalform ist

$$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0.$$

Laut 6.3.9 ist die Gestalt von $E_2 \cap Q$ deswegen eine Ellipse.

Der Schnitt $E_3 \cap Q$ ist durch die Gleichung

$$2x_1^2 + 3 - x_3^2 = 0$$

beschrieben. Die entsprechende euklidiche Normalform ist

$$\frac{2}{3}x_1^2 - \frac{1}{3}x_3^2 + 1 = 0$$

und die affine Normalform ist

$$x_1^2 - x_3^2 + 1 = 0.$$

Laut 6.3.9 ist die Gestalt von $E_3 \cap Q$ deswegen eine Hyperbel.

**(c)** Geben Sie eine Gleichung an, die $Q$ bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

**Lösungshinweise hierzu:** Bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ ist $Q$ durch die Gleichung

$$2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

beschrieben, das heißt

$$Q\colon\, ({}_{\mathbb{E}}x)^{\intercal} B({}_{\mathbb{E}}x) = 0$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seien

$$F := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt laut 4.7.6, dass

$${}_{\mathbb{E}}x = P + F_{\mathbb{F}}x$$

ist, und deswegen ist $Q$ bezüglich $\mathbb{F}$ durch

$$(P + F_{\mathbb{F}}x)^{\intercal} B(P + F_{\mathbb{F}}x) = 0$$

beschrieben. Mit ${}_{\mathbb{F}}x = y = (y_1, y_2, y_3)^{\intercal}$ gilt, dass

$$P + F_{\mathbb{F}}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 - 1 \end{pmatrix}$$

ist. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}(P+F_{\mathbb{F}}x)^{\mathsf{T}}B(P+F_{\mathbb{F}}x) &= 2(-y_1+1)^2+3(\tfrac{1}{\sqrt{2}}y_2+\tfrac{1}{\sqrt{2}}y_3)^2-(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}y_2+\tfrac{1}{\sqrt{2}}y_3-1)^2\\ &= 2y_1^2+y_2^2+y_3^2+4y_2y_3-4y_1-\sqrt{2}y_2+\sqrt{2}y_3+1,\end{aligned}$$

ist, und deswegen ist $Q$ bezüglich $\mathbb{F}$ durch die Gleichung

$$2y_1^2+y_2^2+y_3^2+4y_2y_3-4y_1-\sqrt{2}y_2+\sqrt{2}y_3+1=0$$

beschrieben.

**(d)** Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{G}$ so an, dass darin $Q$ die Matrixbeschreibung $Q: z^{\mathsf{T}}Az=0$ mit einer Matrix $A=(a_{jk})_{j,k}$ besitzt, worin $a_{11}=0$ ist.

**Lösungshinweise hierzu:** Sei $\mathbb{G}:=\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right);\left(\begin{smallmatrix}g_{11}\\g_{21}\\g_{31}\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}g_{12}\\g_{22}\\g_{32}\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}g_{13}\\g_{23}\\g_{33}\end{smallmatrix}\right)\right)$ und sei

$$G=\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathbb{G}$ genau dann ein kartesisches Koordinatsystem, wenn $G$ orthogonal ist. Weiterhin gilt laut 4.7.6, dass ${}_{\mathbb{E}}x=Gx_{\mathbb{G}}$. Mit $x_{\mathbb{G}}=z=(z_1,z_2,z_3)^{\mathsf{T}}$ ist deswegen $Q$ bezüglich $\mathbb{G}$ durch die Gleichung

$$(Gx_{\mathbb{G}})^{\mathsf{T}}B(Gx_{\mathbb{G}})=0$$

beschrieben, oder äquivalent durch

$$z^{\mathsf{T}}G^{\mathsf{T}}BGz=0.$$

Setzen wir $A=G^{\mathsf{T}}BG$ mit $A=(a_{jk})_{j,k}$, gilt dann, dass

$$a_{11}=2g_{11}^2+3g_{21}^2-g_{31}^2$$

ist. Wir wollen $G$ so wählen, dass sie orthogonal ist und $a_{11}=0$ ist. Die Gleichung

$$a_{11}=2g_{11}^2+3g_{21}^2-g_{31}^2=0$$

entspricht die erste Spalte von $G$, die normiert sein muss. Eine Lösung davon (es gibt unendlich viele) ist $g_{11}=\frac{1}{\sqrt{3}}, g_{21}=0, g_{31}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Jetzt wollen wir $\left(\begin{smallmatrix}g_{12}\\g_{22}\\g_{32}\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}g_{13}\\g_{23}\\g_{33}\end{smallmatrix}\right)$ so wählen, dass

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}g_{11}\\g_{21}\\g_{31}\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}g_{12}\\g_{22}\\g_{32}\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}g_{13}\\g_{23}\\g_{33}\end{smallmatrix}\right)\right\}$$

ein Orthonormalbasis ist. Das wird systematisch erreicht, bei Benutzung des Schmidtschen Orthonormierungsverfahrens zum Basis (z.B.)

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right\},$$

aber in diesem Fall ist es einfach direkt zu sehen, dass z.B.

$$\mathbb{G} := \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right)$$

eine Lösung ist.

**Aufgabe H 35.** *Modell: Einschaliges Hyperboloid*

Die Quadrik $Q$ in $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$Q : x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3+(3\sqrt{2}-\sqrt{6})x_1-2\sqrt{6}x_2-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})x_3-6=0.$$

Ein Modell von $Q$ hatten Sie in den Übungen in den Händen. Sie finden das Modell auch unter www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/03/

**(a)** Sei $\mathbb{G} = \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Geben Sie eine Gleichung von $Q$ in Koordinaten $z_1$, $z_2$, $z_3$ bezüglich $\mathbb{G}$ an.

**Lösungshinweise hierzu:** Die Gleichung der Quadrik $Q$ lautet $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a := \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \\ -\sqrt{6} \\ -\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}, \qquad c := -6.$$

Seien

$$p := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$g_1 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g_2 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g_3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und sei

$$G := (g_1, g_2, g_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ ist ein kartesisches Koordinatensystem weil $G^\intercal G = E_3$ ist. Setzen wir $x = Gz + p$ in $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&(Gz+p)^\intercal A(Gz+p) + 2a^\intercal(Gz+p) + c \\
&= (z^\intercal G^\intercal + p^\intercal)A(Gz+p) + 2a^\intercal(Gz+p) + c \\
&= z^\intercal G^\intercal AGz + z^\intercal G^\intercal Ap + p^\intercal AGz + 2a^\intercal Gz + p^\intercal Ap + 2a^\intercal p + c \\
&= z^\intercal G^\intercal AGz + 2(p^\intercal A + a^\intercal)Gz + (p^\intercal Ap + 2a^\intercal p + c) \\
&= z^\intercal G^\intercal AGz + 2(Ap+a)^\intercal Gz + (p^\intercal Ap + 2a^\intercal p + c).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
G^\mathsf{T} A G &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{6}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{6}{\sqrt{6}} & -\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{6}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Weitherhin sehen wir, dass

$$
\begin{aligned}
Ap &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3-3\sqrt{3} \\ 6 \\ 3+3\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{6} \\ \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -a,
\end{aligned}
$$

ist. Deswegen gilt, dass $2(Ap+a)^\mathsf{T} G = 0$ ist, und damit ist der lineare Teil von $Q$ bezüglich $\mathbb{G}$ null.
Um den konstanten Teil zu berechnen, beachten wir, dass

$$
p^\mathsf{T} A p = p^\mathsf{T}(-a) = -a^\mathsf{T} p
$$

ist. Deswegen ist der konstante Teil von $Q$ bezüglich $\mathbb{G}$ gleich $a^\mathsf{T} p + c$, wobei

$$
a^\mathsf{T} p = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} & -\sqrt{6} & -\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} = 0
$$

ist. Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{G}$ hat unsere Quadrik $Q$ damit die Gleichung

$$
3z_1^2 + 6z_2^2 - 3z_3^2 - 6 = 0.
$$

Die entsprechende euklidische Normalform davon ist

$$
-\frac{1}{2} z_1^2 - z_2^2 + \frac{1}{2} z_3^2 + 1 = 0.
$$

**(b)** Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Wir betrachten die Ebene $E_\alpha : z_2 = \alpha$. Bestimmen Sie die Gestalt von $Q \cap E_\alpha$ in Abhängigkeit von $\alpha$.

**Lösungshinweise hierzu:** Der Schnitt von $E_\alpha$ mit $Q$ besteht aus all die Punkte $(z_1, \alpha, z_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ mit

$$-\frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_3^2 + (1-\alpha^2) = 0.$$

Wenn $1-\alpha^2 = 0$ ist, das heißt für $\alpha = 1$ oder $\alpha = -1$, erhalten wir ein schneidendes Geradenpaar.

Wenn $1-\alpha^2 > 0$ oder $1-\alpha^2 < 0$ ist erhalten wir eine Hyperbel. Das heißt, für $\alpha \neq 1$ und $\alpha \neq -1$ ist der Schnitt eine Hyperbel.

**(c)** Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

**Lösungshinweise hierzu:** Es gilt

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = Gv + p = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} v + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Weiterhin gilt, dass

$${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = G^{-1}(v-p) = G^\intercal v - G^\intercal p$$

ist (da G orthogonal ist), wobei

$$G^\intercal = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ist, und

$$-G^\intercal p = -\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist.

**Aufgabe H 36.** *Räumliche Quadrik*

Die Quadrik $Q$ in $\mathbb{R}^3$ sei in Standardkoordinaten gegeben durch

$$Q\colon\ -7x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 20x_1x_3 - 16x_2x_3 + 48x_1 - 24x_2 + 6x_3 + 18 = 0.$$

**(a)** Bestimmen Sie die Matrixbeschreibung $Q : x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$.

**Lösungshinweise hierzu:** Die Gleichung der Quadrik $Q$ lautet $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -7 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & -8 \\ 10 & -8 & -4 \end{pmatrix}, \qquad a := \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c := 18.$$

**(b)** Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von $Q$.
Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich dessen $Q$ diese euklidische Normalform annimmt.

**Lösungshinweise hierzu:**

*Erster Schritt: Diagonalisierung (gegen gemischte Terme).*

$A$ ist diagonalisierbar, weil $A$ eine symmetrische reelle Matrix ist. Das charakteristische Polynom der Matrix $A$ lautet

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E_3) =&(-7-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)-4\times 8\times 10\\ &-10^2(2-\lambda)-8^2(-7-\lambda)-2^2(-4-\lambda)\\ =&-\lambda(\lambda^2+9\lambda-162)\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind damit $\lambda_1=9$, $\lambda_2=-18$ und $\lambda_3=0$. Um zugehörige Eigenvektoren zu bestimmen, muss man die folgenden lineare Gleichungssystem bilden und lösen:

$$(A-\lambda_1E_3)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-16 & 2 & 10\\ 2 & -7 & -8\\ 10 & -8 & -13\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(A-\lambda_2E_3)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}11 & 2 & 10\\ 2 & 20 & -8\\ 10 & -8 & 14\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(A-\lambda_3E_3)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-7 & 2 & 10\\ 2 & 2 & -8\\ 10 & -8 & -4\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

Wir haben

$$V(\lambda_1)=V(9)=\mathrm{L}(v_1), \qquad V(\lambda_2)=V(-18)=\mathrm{L}(v_2), \qquad V(\lambda_3)=V(0)=\mathrm{L}(v_3),$$

mit

$$v_1:=\begin{pmatrix}\frac12\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad v_2:=\begin{pmatrix}-1\\\frac12\\1\end{pmatrix}, \qquad v_3:=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Wir mussen die $v_i$ normieren:

$$f_1:=\frac{1}{|v_1|}v_1=\begin{pmatrix}\frac13\\-\frac23\\\frac23\end{pmatrix}, \qquad f_2:=\frac{1}{|v_2|}v_2=\begin{pmatrix}-\frac23\\\frac13\\\frac23\end{pmatrix}, \qquad f_3:=\frac{1}{|v_3|}v_3=\begin{pmatrix}\frac23\\\frac23\\\frac13\end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Transformationmatrix

$$F:=(f_1,f_2,f_3)=\frac13\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Probe:

$$F^{\intercal}AF = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$F^{\intercal}a = \begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystem $\mathbb{F} := (\overrightarrow{0}, f_1, f_2, f_3)$ hat unsere Quadrik $Q$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= y^{\intercal}(F^{\intercal}AF)y + 2(F^{\intercal}a)^{\intercal}y + c \\ &= 9y_1^2 - 18y_2^2 + 2(18y_1 - 18y_2 + 9y_3) + 18. \end{aligned}$$

*Zweiter Schritt: Verschiebung (gegen lineare Terme).*
Wir haben

$$\begin{aligned} &9y_1^2 - 18y_2^2 + 2(18y_1 - 18y_2 + 9y_3) + 18 \\ &= 9(y_1+2)^2 - 18(y_2+1)^2 + 2 \times 9y_3 - 9 \times 4 + 18 + 18 \\ &= 9(y_1+2)^2 - 18(y_2+1)^2 + 2 \times 9y_3 \end{aligned}$$

Sei $P$ der Punkt mit Koordinaten (bezüglich $\mathbb{F}$)

$${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also

$$P = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystem $\mathbb{G} := (P, f_1, f_2, f_3)$ hat unsere Quadrik $Q$ die Gleichung

$$9z_1^2 - 18z_2^2 + 2 \times 9z_3 = 0.$$

Die euklidische Normalform lautet

$$z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3 = 0.$$

Die Quadrik $Q$ ist ein hyperbolisches Paraboloid.

**(c)** Bestimmen Sie eine Ebene $E$ derart, dass $E \cap Q$ ein Paar schneidender Geraden ist. Bestimmen Sie eine Gleichung für $E$ in Standardkoordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$.

**Lösungshinweise hierzu:** Bezüglich des kartesischen Koordinatensystem $\mathbb{G}$ hat unsere Quadrik $Q$ die Gleichung

$$z_1^2 - 2z_2^2 + 2z_3 = 0.$$

Der Schnitt mit der Ebene $E\colon z_3 = 0$ ist

$$\{(z_1, z_2, 0) \in \mathbb{R}^3\colon\ z_1^2 = 2z_2^2\}.$$

Also ist $E \cap Q$ ein Paar schneidender Geraden.
Wir haben

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(x) &= F^{-1}(x-P) = F^{\mathsf{T}}x - F^{\mathsf{T}}P \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also

$$z_3 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Die Gleichung für $E$ in Standardkoordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ ist $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

**Online-Aufgabe.**

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

**http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/**

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 37.** *Modell: Der Doppelkegel*

Wir betrachten das Modell aus den Übungen, und davon insbesondere den Doppelkegel $Q$ und die blaue Ebene $E$. Sie finden das Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/02/.

Seien $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

**(a)** Bestimmen Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$ {}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbb{F}}Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbb{F}}R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

Ist $\mathbb{F}$ ein kartesisches Koordinatensystem? Ist $\mathbb{F}$ ein Rechtssystem?

**Lösungshinweise hierzu:**

Weil ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Ursprung von $\mathbb{F}$ gleich dem Punkt $P$:

$$ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

Wegen ${}_{\mathbb{F}}Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der dritte Basisvektor gleich

$$ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

Außerdem gillt ${}_{\mathbb{F}}R + {}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Deswegen ist die zweite Basisvektor gleich

$$ \frac{1}{2}\left( \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. $$

Wegen ${}_{\mathbb{F}}R - {}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist die erste Basisvektor gleich

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ ist also gleich

$$\mathbb{F}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Die Basisvektoren $b_1, b_2, b_3$ bilden eine ONB von $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{F}$ ist also ein kartesisches Koordinatensystem. $\mathbb{F}$ ist ein Rechtssystem, genau dann wenn

$$\det([b_1\ b_2\ b_3])=1.$$

Nach der Regel von Sarrus gilt:

$$\det([b_1\ b_2\ b_3])=0-\frac{1}{2}+0-0-\frac{1}{2}-0=-1.$$

$\mathbb{F}$ ist also kein Rechtssystem.

**(b)** Der Doppelkegel wird in Standardkoordinaten durch $Q: x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ beschrieben. Geben Sie eine Gleichung an, die $Q$ bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

**Lösungshinweise hierzu:**

Die Koordinaten $x_1, x_2$ und $x_3$ können wir beschreiben bezüglich $\mathbb{F}$:

$$\begin{aligned}x_1&=1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\\x_2&=y_3\\x_3&=-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2.\end{aligned}$$

Wir schreiben:

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2-x_3^2&=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2+y_3^2-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2\\&=1+\frac{1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}y_2+y_1y_2+y_3^2-\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+y_1y_2\\&=1+\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}y_2+2y_1y_2+y_3^2.\end{aligned}$$

Die Gleichung von $Q$ bezüglich $\mathbb{F}$ ist:

$$y_3^2+2y_1y_2+\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}y_2+1=0.$$

**(c)** Die blaue Ebene wird in Standardkoordinaten durch $E : x_1 - x_3 = 1$ beschrieben. Geben Sie eine Gleichung an, die $E$ bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

**Lösungshinweise hierzu:**
Sowie in Aufgabe **(b)** schreiben wir:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ &= 1 + \sqrt{2}y_1 \end{aligned}$$

Also ist die Ebene $E$ bezüglich $\mathbb{F}$ gegeben durch

$$1 + \sqrt{2}y_1 = 1.$$

Oder, einfach

$$y_1 = 0.$$

**(d)** Bestimmen Sie die euklidische Normalform von $E \cap Q$. Verwenden Sie hierzu das Ergebnis aus **(b)** und **(c)**. Bestimmen Sie die Gestalt von $E \cap Q$.

**Lösungshinweise hierzu:**
Wit bekommen die euklidische Normalform von $E \cap Q$, indem wir $y_1 = 0$ in die Gleichung von $Q$

$$y_3^2 + 2y_1y_2 + \sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 + 1 = 0$$

einsetzen. Wir enthalten

$$y_3^2 + \sqrt{2}y_2 + 1 = 0.$$

$E \cap Q$ ist also ein Parabel.

**Aufgabe H 38.** *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere Schranke an. Geben Sie, falls möglich, eine untere Schranke an.

**(a)** $\left(n \sin\left(\frac{3}{2}\pi(2n-1)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Lösungshinweise hierzu:** Wir nutzen die $2\pi$-Periodizität $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$, um die Folge besser zu verstehen. Es ist

$$\begin{aligned} \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi(2n-1)\right) = \sin\left(3\pi n - \tfrac{3\pi}{2} + 2\pi\right)\right) &= \sin\left(3\pi n + \tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \sin\left(2\pi 3k + \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } n = 2k \\ \sin\left(2\pi 3k + 2\pi + \pi + \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 & \text{für } n = 2k \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Insgesamt ist

$$\sin\bigl(\tfrac{3}{2}\pi(2n-1)\bigr)^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2k \\ -1 & \text{für } n = 2k+1 \end{cases}.$$

Also ist $(a_n)_n = (n(-1)^n)_n$.

Die Folge ist nicht monoton, da sie zwischen positiven und negativen Zahlen hin und her springt. Sauberer notiert: $a_{2k} = 2k > -(2k+1) = a_{2k+1}$ und $a_{2k+1} = -(2k+1) < 2k+2 = a_{2k+2}$.

Die Folge ist nach unten und oben unbeschränkt, denn $a_{2k+1} = -2k-1 \to -\infty$ für $k \to \infty$, während $a_{2k} = 2k \to +\infty$ für $k \to \infty$.

**(b)** $\bigl(\sqrt{17(n+3)} - \sqrt{17n}\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$

**Lösungshinweise hierzu:** Hier nutzen wir eine Standardumformung, wie sie auch im Skript zu finden ist, bei der wir geschickt erweitern um die dritte binomische Formel verwenden zu können.

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{17(n+3)} - \sqrt{17n} &= \frac{\bigl(\sqrt{17(n+3)} - \sqrt{17n}\bigr)\bigl(\sqrt{17(n+3)} + \sqrt{17n}\bigr)}{\sqrt{17(n+3)} + \sqrt{17n}} \\ &= \frac{17 \cdot 3}{\sqrt{17(n+3)} + \sqrt{17n}} \\ &> \frac{17 \cdot 3}{\sqrt{17((n+1)+3)} + \sqrt{17(n+1)}} = a_{n+1}, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass ein Bruch kleiner wird, wenn wir bei gleichem Zähler den Nenner vergrößern. Unsere Folge ist also monoton fallend. Somit erhalten wir sofort die obere Schranke $a_1 = \sqrt{17}$. Außerdem ist $a_n > 0$ und somit $0$ eine untere Schranke.

**(c)** $(n - \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$

**Lösungshinweise hierzu:** Es ist $a_n = n - \sqrt{n} = \sqrt{n}\bigl(\sqrt{n}-1\bigr) < \sqrt{n+1}\bigl(\sqrt{n+1}-1\bigr) = a_{n+1}$, wobei wir die Monotonie der Wurzelfunktion nutzen. Die Folge wächst also monoton. Somit ist eine untere Schranke $a_1 = 0$. Wegen $a_n = n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n}-1) \geqq \sqrt{n}$ für $n \geqq 4$ und wegen $\sqrt{n} \to \infty$ gilt $a_n \to \infty$. Es existiert also keine obere Schranke.

**(d)** $\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\right)^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Lösungshinweise hierzu:** Wir gehen vor wie in (a).

$$\begin{aligned} \sin\bigl(\tfrac{\pi}{2}(2n-1)\bigr) = \sin\bigl(\pi n - \tfrac{\pi}{2}\bigr) &= \begin{cases} \sin\bigl(2\pi k + \frac{3\pi}{2}\bigr) & \text{für } n = 2k \\ \sin\bigl(2\pi k + \pi - \frac{\pi}{2}\bigr) & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sin\bigl(\frac{3\pi}{2}\bigr) = -1 & \text{für } n = 2k \\ \sin\bigl(\frac{\pi}{2}\bigr) = 1 & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist $(a_n)_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)_n$, welche wegen $a_n = \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} = a_{n+1}$ ebenfalls monoton fallend und darüberhinaus positiv ist. Wir erhalten die obere Schranke $a_1 = 1$ und die untere Schranke $0$.

**Aufgabe H 39.** *Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die Folgen auf Häufungspunkte. Geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine gegen diesen konvergierende oder bestimmt divergierende Teilfolge an.

**(a)** $\left(\sqrt{49(n+3)} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Lösungshinweise hierzu:** Hier nutzen wir eine Standardumformung, wie sie auch im Skript zu finden ist, bei der wir geschickt erweitern um die dritte binomische Formel verwenden zu können.

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{49(n+3)} - \sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{49(n+3)} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{49(n+3)} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{49(n+3)} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{48n - 49\cdot 3}{\sqrt{49(n+3)} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

Für $n$ genügend groß ($n > 49\cdot 3$) ist

$$\begin{aligned} \frac{48n - 49\cdot 3}{\sqrt{49(n+3)} + \sqrt{n}} &= \frac{47n + n - 49\cdot 3}{\sqrt{49(n+3)} + \sqrt{n}} > \frac{47n}{\sqrt{49(n+3)} + \sqrt{n}} \\ &> \frac{47n}{\sqrt{49(n+3)} + \sqrt{n+3}} = \frac{47n}{8\sqrt{n+3}} \\ &= \frac{47\sqrt{n}}{8\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}} \to +\infty \qquad (n\to\infty) \end{aligned}$$

Damit ist die Folge divergent gegen $+\infty$, es liegt ein Häufungspunkt $+\infty$ vor.

**(b)** $\left(8\cos(\frac{\pi}{2}n)(2n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Lösungshinweise hierzu:** Wir erhalten die Teilfolgen

- **(i)** $(a_{4l})_{l\in\mathbb{N}} = \big(8(8l+1)\big)_{l\in\mathbb{N}}$, divergent mit uneigentlichem Grenzwert $+\infty$.
- **(ii)** $(a_{4l-2})_{l\in\mathbb{N}} = \big(-8(8l-3)\big)_{l\in\mathbb{N}}$, divergent mit uneigentlichem Grenzwert $-\infty$.
- **(iii)** $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (0)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $0$.

Somit sind die Häufungspunkte gegeben durch $-\infty$, $0$ und $+\infty$.

**(c)** $\left(\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^n)2^{-n/2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

**Lösungshinweise hierzu:** Es ist $(1+\mathrm{i})^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos(\frac{\pi}{4}n) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4}n)\right)$. Also ist $\mathrm{Re}(1+\mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$. Somit ist $(a_n)_n = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right)_n$. Wir erhalten folgende Teilfolgen.

- **(i)** $(a_{8k+1})_{k\in\mathbb{N}_0} = (\frac{\sqrt{2}}{2})_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**(ii)** $(a_{8k+2})_{k\in\mathbb{N}_0} = (0)_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $0$.

**(iii)** $(a_{8k+3})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-\frac{\sqrt{2}}{2})_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**(iv)** $(a_{8k+4})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-1)_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $-1$.

**(v)** $(a_{8k+5})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-\frac{\sqrt{2}}{2})_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**(vi)** $(a_{8k+6})_{k\in\mathbb{N}_0} = (0)_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $0$.

**(vii)** $(a_{8k+7})_{k\in\mathbb{N}_0} = (\frac{\sqrt{2}}{2})_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**(viii)** $(a_{8k+8})_{k\in\mathbb{N}_0} = (1)_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $1$.

Somit sind die Häufungspunkte gegeben durch $-1$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $0$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $1$.

**(d)** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 := 3$ und $a_n := 1/(1 - a_{n-1}/2)$ für $n \geqq 2$.

**Lösungshinweise hierzu:** Wir betrachten die ersten Folgenglieder :

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = -2, \qquad a_3 = \frac{1}{2}, \qquad a_4 = \frac{4}{3}, \qquad a_5 = 3.$$

Da $a_5 = a_1$ ist, gilt $a_{k+4} = a_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Also haben wir die konstanten Teilfolgen

**(i)** $(a_{1+4k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit Grenzwert $3$,

**(ii)** $(a_{2+4k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit Grenzwert $-2$,

**(iii)** $(a_{3+4k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit Grenzwert $\frac{1}{2}$,

**(iv)** $(a_{4+4k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ mitGrenzwert $\frac{4}{3}$.

Somit sind die Häufungspunkte gegeben durch $-2$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $3$.