N. Borg,
S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Polynome*

(a) Berechnen Sie $(3X+2)^3$, $(X-2)^4$ und $(X-1)^5$ mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes.

Lösungshinweise hierzu: Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt:

$$\begin{aligned}(3X+2)^3 &= (3X)^3 + \binom{3}{1}(3X)^2 2 + \binom{3}{2}(3X)2^2 + 2^3 \\ &= 27X^3 + 54X^2 + 36X + 8.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X-2)^4 &= X^4 + \binom{4}{1}X^3(-2) + \binom{4}{2}X^2(-2)^2 + \binom{4}{3}X(-2)^3 + (-2)^4 \\ &= X^4 - 8X^3 + 24X^2 - 32X + 16.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X-1)^5 &= X^5 + \binom{5}{1}X^4(-1) + \binom{5}{2}X^3(-1)^2 + \binom{5}{3}X^2(-1)^3 + \binom{5}{4}X(-1)^4 + (-1)^5 \\ &= X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 5X - 1.\end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $(X^4 + 8X^3 + 24X^2 + 32X + 16)(X^2 + 1)$.

Lösungshinweise hierzu: Nach dem Satz vom Nullprodukt genügt es, die beiden Faktoren getrennt zu untersuchen.

Mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes lässt sich der erste Faktor schreiben als

$$X^4 + 8X^3 + 24X^2 + 32X + 16 = (X+2)^4.$$

Wir erhalten also -2 als einzige Nullstelle des ersten Faktors.

Der verbleibende Faktor $X^2 + 1$ besitzt hingegen keine reelle Nullstelle:
In der Tat gilt für $x \in \mathbb{R}$ stets $x^2 \geqq 0$ und somit $x^2 + 1 \geqq 1 > 0$.

Somit ist -2 die einzige reele Nullstelle von $(X^4+8X^3+24X^2+32X+16)(X^2+1)$.

(c) Zeigen Sie, dass alle reellen Nullstellen von $X^7 + 12X^6 + 31X^3 + 2$ negativ sind.

Lösungshinweise hierzu: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geqq 0$ gilt die Ungleichung

$$\underbrace{x^7}_{\geqq 0} + \underbrace{12x^6}_{\geqq 0} + \underbrace{31x^3}_{\geqq 0} + 2 \geqq 2 > 0.$$

Somit muss jede reelle Nullstelle des Polynoms negativ sein.

(d) Zeigen Sie, dass $3X^{2018} + 4X^2 - 8X + 5$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Lösungshinweise hierzu: Für $x \in \mathbb{R}$ liefert quadratisches Ergänzen die Ungleichung

$$3x^{2018} + 4x^2 - 8x + 5 = \underbrace{3x^{2018}}_{\geqq 0} + \underbrace{4(x-1)^2}_{\geqq 0} + 1 \geqq 1 > 0.$$

Somit besitzt $3X^{2018} + 4X^2 - 8X + 5$ keine reellen Nullstellen.

Aufgabe H 2. *Teleskopsummen*

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $(x^2-1)\sum_{k=0}^{n} x^k$ **(b)** $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{k}-\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bezeichnen die zu berechnende Summe mit A_n. Durch Ausmultiplizieren und Aufteilen der Summe erhalten wir zunächst

$$A_n := (x^2-1)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^2-1)x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^{k+2}-x^k) = \sum_{k=0}^{n} x^{k+2} - \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Eine Indexverschiebung (mit $l := k+2$) in der ersten Summe liefert

$$A_n = \sum_{l=2}^{n+2} x^l - \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=2}^{n+2} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Ergänzen der beiden Summen und anschließendes Kürzen ergibt schließlich

$$\begin{aligned} A_n &= \left(\sum_{k=0}^{n+2} x^k - \sum_{k=0}^{1} x^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n+2} x^k - \sum_{k=n+1}^{n+2} x^k\right) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n+2} x^k - \sum_{k=0}^{n+2} x^k\right)}_{=0} - \left(\sum_{k=0}^{1} x^k - \sum_{k=n+1}^{n+2} x^k\right) \\ &= -1 - x + x^{n+1} + x^{n+2}. \end{aligned}$$

(b) Wir bezeichnen die zu berechnende Summe mit B_n. Aufteilen der Summe und anschließende Indexverschiebung liefert

$$\begin{aligned} B_n := \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{k}-\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{2}{k} - \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Wie in Teil **(a)** können wir nun die drei Summen ergänzen und erhalten

$$B_n = \left(\sum_{k=1}^{n+2}\frac{3}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+2}\frac{3}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+2}\frac{2}{k} - \sum_{k=1}^{1}\frac{2}{k} - \sum_{k=n+2}^{n+2}\frac{2}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\right).$$

Durch Umsortieren und Kürzen ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} B_n &= \underbrace{\left(3\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k}\right)}_{=0} - \underbrace{\left(\sum_{k=n+1}^{n+2}\frac{3}{k} - \sum_{k=1}^{1}\frac{2}{k} - \sum_{k=n+2}^{n+2}\frac{2}{k} - \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}\right)}_{=\left(\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n+2}\right)-\left(\frac{2}{1}\right)-\left(\frac{2}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{7}{2} - \frac{3}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{7n^2+13n}{2n^2+6n+4}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion mit Ungleichung*

Zeigen Sie durch vollständiger Induktion die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $2^n + n^2 > (n+1)(n+2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 4$.

(b) Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} > (n+1)n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 6$.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil **(b)** die Aussage aus **(a)**.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 4$ gilt $2^n + n^2 > (n+1)(n+2) = 2 + 3n + n^2$ genau dann, wenn $2^n > 2 + 3n$. Wir zeigen daher mit vollständiger Induktion die folgende Aussage:

Es gilt $\quad 2^n > 2 + 3n \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 4$.

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 4$: $\quad 2^4 = 16 > 14 = 2 + 3 \cdot 4$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 4$ wahr ist, d.h. es gelte

$$2^n > 2 + 3n.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IH}}{>} 2(2+3n) = 4 + 3n + 3n > 4 + 1 + 3n = 2 + 3(n+1).$$

Bei Anwendung der Induktionshypothese wurde benutzt, dass sich das Ungleichungszeichen bei Multiplikation mit dem positiven Faktor 2 nicht ändert. Für die letzte Ungleichung haben wir verwendet, dass $3n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 4$ erfüllt ist.

(b) Wir führen einen Induktionsbeweis über $n \geqq 6$:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 6$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6} k \cdot 2^{k-1} &= 1 \cdot 2^{1-1} + 2 \cdot 2^{2-1} + 3 \cdot 2^{3-1} + 4 \cdot 2^{4-1} + 5 \cdot 2^{5-1} + 6 \cdot 2^{6-1} \\ &= 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + 192 = 321 > 252 = (6+1)6^2.\end{aligned}$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 6$ wahr ist, d.h. es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} > (n+1)n^2.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^{k-1} &= (n+1)2^n + \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} \\ &> (n+1)2^n + (n+1)n^2 \quad \text{unter Verwendung von } \textbf{IH} \\ &= (n+1)(2^n + n^2) \\ &> (n+1)(n+1)(n+2) = ((n+1)+1)(n+1)^2.\end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung haben wir verwendet, dass **H3(a)** insbesondere für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 6 > 4$ gilt. Somit folgt für $n \geqq 6$, nach Multiplikation der Ungleichung aus **H3(a)** mit $(n+1) > 0$, schließlich $(n+1)(2^n + n^2) > (n+1)(n+1)(n+2)$. Damit ist die Behauptung **H3(b)** für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 6$ bewiesen.

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Produkt*

Analog zur Summenschreibweise, führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{j=1}^{m} A_j$ bedeutet, dass man den Term A_j für alle j von 1 bis m auswertet und die entstandenen Zahlen zusammenmultipliziert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Es gilt $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$.

(b) Es gilt $\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{(2n)!}{n!\,2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir führen einen Induktionsbeweis über $n \geqq 2$:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 2$:

$$\prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ wahr ist, d.h. es gelte

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)&=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{n+1}{2n}\right)\qquad\text{unter Verwendung von } \mathbf{IH}\\&=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\cdot\frac{n+1}{2n}\\&=\frac{(n+1)+1}{2(n+1)},\end{aligned}$$

womit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ bewiesen ist.

(b) Wir führen einen Induktionsbeweis über $n \in \mathbb{N}$:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$:

$$\prod_{k=1}^{1}(2k-1)=2\cdot 1-1=\frac{2}{2}=\frac{(2\cdot 1)!}{1!\,2^1}.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. es gelte

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{(2n)!}{n!\,2^n}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= (2(n+1)-1)\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\
&= (2n+1)\cdot\frac{(2n)!}{n!\,2^n} \quad \text{unter Verwendung von IH} \\
&= \frac{(2n+1)!}{n!\,2^n}\cdot\frac{2n+2}{2n+2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{n!\,2^n}\cdot\frac{1}{2(n+1)}, \\
&= \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!\,2^{n+1}},
\end{aligned}$$

womit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen ist.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 5. *Ungleichungen, Beträge*

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen:

(a) $(x+5)(x-10)x^2 < (x+5)(x-10)(2x)^4$ **(b)** $\dfrac{|x^2-9|}{|x+3|+|x-3|} \leqq 5$

Lösungshinweise hierzu:

(a) *1. Fall:* $x = -5 \ \vee\ x = 10$.
Es folgt jeweils durch Einsetzen der Widerspruch $0 < 0$.

2. Fall: $x < -5 \ \vee\ 10 < x$.
Wir teilen durch den positiven Faktor $(x+5)(x-10)$, wodurch das Ungleichungszeichen erhalten bleibt:

$$(x+5)(x-10)x^2 < (x+5)(x-10)(2x)^4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 < 16x^4.$$

Da in diesem Fall $x \neq 0$, können wir durch den positiven Faktor x^2 teilen und erhalten

$$x^2 < 16x^4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 < 16x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \tfrac{1}{4} < |x|.$$

Für $x < -5$ ergibt sich nach Auflösen des Betrages die Bedingung $x < -\frac{1}{4}$, womit $\mathbb{L}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < -5\right\}$ Teilmenge der Lösungsmenge ist.
Für $10 < x$ erhalten wir nach Auflösen des Betrages die Bedingung $\frac{1}{4} < x$, womit $\mathbb{L}_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 10 < x\right\}$ Teilmenge der Lösungsmenge ist.

3. Fall: $-5 < x < 10$.
Wir teilen durch den negativen Faktor $(x+5)(x-10)$, wodurch sich das Ungleichungszeichen umdreht:

$$(x+5)(x-10)x^2 < (x+5)(x-10)(2x)^4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 > 16x^4.$$

Für $x = 0$ folgt daraus der Widerspruch $0 > 0$. Ist $x \neq 0$, so können wir durch den positiven Faktor x^2 teilen und erhalten

$$x^2 > 16x^4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 > 16x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \tfrac{1}{4} > |x|.$$

Für $x < 0$ folgt daraus $-\frac{1}{4} < x$. Falls $x > 0$, so erhalten wir die Bedingung $x < \frac{1}{4}$.
Da wir in diesem Fall nur $x \in \mathbb{R}$ mit $-5 < x < 10$ und $x \neq 0$ betrachtet haben, ist somit $\mathbb{L}_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \,\middle|\, -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}\right\}$ Teilmenge der Lösungsmenge.

Die Lösungsmenge ist daher insgesamt gegeben durch

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \,\middle|\, x < -5 \ \vee\ -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4} \ \vee\ 10 < x\right\}.$$

(b) Wegen $(x^2-9) = (x+3)(x-3)$ können wir mit den Rechenregeln für Beträge 1.5.9 die Ungleichung schreiben als

$$\frac{|x+3||x-3|}{|x+3|+|x-3|} \leqq 5.$$

Nach Definition des Betrages 1.5.8 gilt stets $|x+3| \geqq 0$, $|x-3| \geqq 0$ und somit $|x+3|+|x-3| \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wäre $|x+3|+|x-3|=0$ für ein $x \in \mathbb{R}$, so würde $|x+3|=-|x-3|$ folgen. Dies kann jedoch nur erfüllt sein, wenn

$$\begin{aligned} & (|x+3|=0) \quad \wedge \quad (|x-3|=0) \\ \Leftrightarrow \quad & (x=-3) \quad \wedge \quad (x=3), \end{aligned}$$

was einen Widerspruch ergibt. Damit ist $|x+3|+|x-3|>0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und wir können die Ungleichung äquivalent umschreiben zu

$$|x+3||x-3| \leqq 5(|x+3|+|x-3|).$$

1. Fall: $x<-3$.
Auflösen der Beträge ergibt

$$(x+3)(x-3) \leqq 5\cdot(-2x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2+10x-9 \leqq 0.$$

Die Gleichung $x^2+10x-9=0$ hat die Lösungen $x_{1,2}=-5\pm\sqrt{34}$. Damit ist $(x-(-5-\sqrt{34}))(x-(-5+\sqrt{34}))=x^2+10x-9 \leqq 0$, was nur gelten kann für $x \in \mathbb{R}$ mit $-5-\sqrt{34} \leqq x \leqq -5+\sqrt{34}$.
Da wir in diesem Fall nur $x \in \mathbb{R}$ mit $x<-3$ betrachten und $-5-\sqrt{34}<-3<-5+\sqrt{34}$, ist $\mathbb{L}_1=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -5-\sqrt{34} \leqq x < -3\right\}$ Teilmenge der Lösungsmenge.

2. Fall: $-3 \leqq x < 3$.
Auflösen der Beträge ergibt

$$-(x+3)(x-3) \leqq 5\cdot 6 \quad \Leftrightarrow \quad -21 \leqq x^2.$$

Die letzte Ungleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-3 \leqq x < 3$ erfüllt, da $x^2 \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist $\mathbb{L}_2=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -3 \leqq x < 3\right\}$ Teilmenge der Lösungsmenge ist.

3. Fall: $3 \leqq x$.
Auflösen der Beträge ergibt

$$(x+3)(x-3) \leqq 5\cdot(2x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2-10x-9 \leqq 0.$$

Wir gehen ähnlich wie im 1. Fall vor. Die Gleichung $x^2-10x-9=0$ hat die Lösungen $x_{1,2}=5\pm\sqrt{34}$, womit $(x-(5-\sqrt{34}))(x-(5+\sqrt{34}))=x^2-10x-9 \leqq 0$. Dies ist nur für $x \in \mathbb{R}$ mit $5-\sqrt{34} \leqq x \leqq 5+\sqrt{34}$ erfüllt.
Da wir in diesem Fall nur $x \in \mathbb{R}$ mit $3 \leqq x$ betrachten und $5-\sqrt{34}<3<5+\sqrt{34}$, ist $\mathbb{L}_3=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 3 \leqq x \leqq 5+\sqrt{34}\right\}$ Teilmenge der Lösungsmenge.

Unsere gesamte Lösungsmenge ist somit

$$\mathbb{L}=\mathbb{L}_1\cup\mathbb{L}_2\cup\mathbb{L}_3=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -5-\sqrt{34} \leqq x \leqq 5+\sqrt{34}\right\}.$$

Aufgabe H 6. *Ungleichungen*

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie die Ungleichungskette $\dfrac{x+y}{2} \leqq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leqq \max\{x,y\}$.

(b) Ist $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} < \sqrt{|xy|}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^-$ erfüllt?

(c) Für welche $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt $(x+2y^2+3z^3)^2 \leqq 14(x^2+y^4+z^6)$?
Hinweis: Schwarzsche Ungleichung.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir zeigen zunächst $\frac{x+y}{2} \leqq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$. Da $x, y \in \mathbb{R}^+$, ist $\frac{x+y}{2} > 0$ und $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} > 0$. Damit lässt sich die Ungleichung mit der Monotonie des Quadrierens 1.5.7 äquivalent umschreiben zu

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leqq \frac{x^2+y^2}{2} \iff x^2+y^2+2xy \leqq 2(x^2+y^2) \iff 0 \leqq (x-y)^2.$$

Da $0 \leqq (x-y)^2$ eine wahre Aussage darstellt, haben wir die Ungleichung bewiesen.

Beweisen wir nun $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leqq \max\{x, y\}$ mittels einer Fallunterscheidung.
1. Fall: $x = \max\{x, y\}$.
Dann ist $y \leqq x$ und somit nach der Monotonie des Quadrierens 1.5.7 auch $y^2 \leqq x^2$. Daraus folgt schließlich $x^2 + y^2 \leqq 2x^2 \iff \frac{x^2+y^2}{2} \leqq x^2$. Nach der Monotonie des Quadrierens 1.5.7 ist dies äquivalent zu $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leqq x = \max\{x, y\}$.
2. Fall: $y = \max\{x, y\}$.
Dann ist $x \leqq y$. Wir argumentieren analog zum 1. Fall und erhalten $x^2 \leqq y^2$, woraus $\frac{x^2+y^2}{2} \leqq y^2$ folgt. Nach der Monotonie des Quadrierens 1.5.7 ist dies äquivalent zu $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leqq y = \max\{x, y\}$, womit die Aussage bewiesen ist.

(b) Die Aussage ist nicht für alle $x, y \in \mathbb{R}^-$ erfüllt. Dies zeigt das Gegenbeispiel mit $\tilde{x} := -1$ und $\tilde{y} := -2$. Für diese Werte gilt $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^-$ und

$$\sqrt{\frac{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} > \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2} = \sqrt{|\tilde{x}\tilde{y}|}.$$

Alternativ kann man mit der Ungleichung für arithmetisches und geometrisches Mittel 1.5.12 und Teil **(a)** argumentieren. Angenommen, die Aussage wäre wahr; also $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} < \sqrt{|xy|}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^-$ erfüllt. Für $x, y \in \mathbb{R}^-$ gilt dann $|x|, |y| \in \mathbb{R}^+$ und wir erhalten den Widerspruch

$$\sqrt{|xy|} \overset{1.5.9}{=} \sqrt{|x||y|} \overset{1.5.12}{\leqq} \frac{|x|+|y|}{2} \overset{\textbf{(a)}}{\leqq} \sqrt{\frac{|x|^2+|y|^2}{2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} < \sqrt{|xy|}.$$

(c) Die Schwarzsche Ungleichung 1.5.11 lautet

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)$$

für beliebige Zahlen $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $n = 3$ und $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ sowie $b_1 = x, b_2 = y^2, b_3 = z^3$ liefert, dass für beliebige $x, y, z \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\left(x + 2y^2 + 3z^3\right)^2 \leqq \left(1 + 2^2 + 3^2\right)\left(x^2 + (y^2)^2 + (z^3)^2\right) = 14\left(x^2 + y^4 + z^6\right)$$

erfüllt ist. Also gilt die Ungleichung für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe H 7. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die Menge $M_1 \setminus M_2$ falls

$$M_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq 4\right\},$$
$$M_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - 2x + y^2 - 2y < 0\right\}.$$

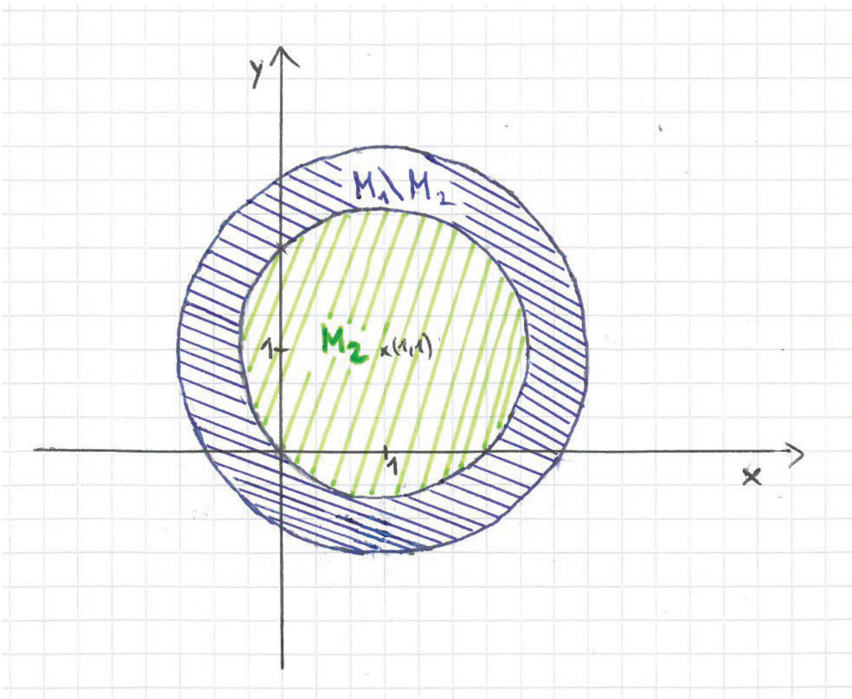
Lösungshinweise hierzu:
Die Menge M_1 beschreibt eine Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{4} = 2$ und Mittelpunkt $(1,1)$, wobei der Kreisrand $K_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4\}$ wegen dem nicht striktem Ungleichungszeichen „ $\leqq$ “ in M_1 enthalten ist.
Bei M_2 handelt es sich ebenfalls um eine Kreisscheibe. Um dies sehen zu können, formen wir die zugehörige Gleichung mittels quadratischer Ergänzung wie folgt um:

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + y^2 - 2y < 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 2 < 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) < 2 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 + (y-1)^2 < 2. \end{aligned}$$

Somit ist $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 2\}$ eine Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{2}$ und Mittelpunkt $(1,1)$. Wegen dem strikten Ungleichungszeichen „ $<$ “ gehöhrt der Kreisrand $K_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2\}$ nicht zu M_2.
Somit erhalten wir

$$M_1 \setminus M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leqq (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq 4\}.$$

Die Menge $M_1 \setminus M_2$ beschreibt einen Kreisring (blau schraffierte Fläche in der Skizze), wobei sowohl der äußere Rand K_1, als auch der innere Rand K_2 zur Menge dazugehören.
Zur besseren Veranschaulichung ist bei der folgenden Skizze auch M_2 (grün schraffierte Fläche) eingezeichnet und es wurde eine Längeneinheit von $1,5$ verwendet.



(b) Skizzieren Sie die Menge $M_3 \cap M_4$ falls

$$\begin{aligned} M_3 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y^2 - (y+1)^2 + 8y < -10\}, \\ M_4 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -9 \ \wedge\ y > -3\}. \end{aligned}$$

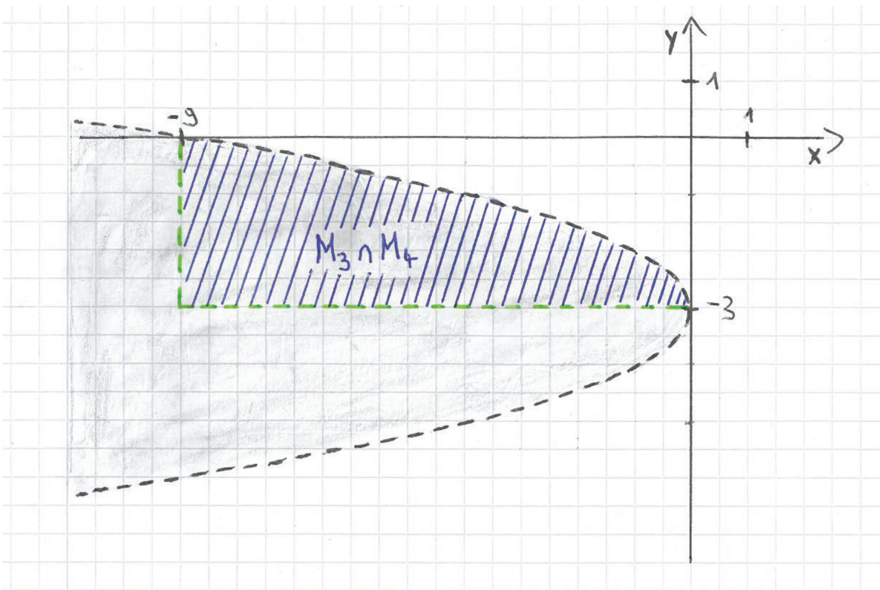
Lösungshinweise hierzu:
Wir formen zunächst die zu M_3 gehörende Gleichung um: Ausmultiplizieren und anschließendes Zusammenfassen (binomische Formel) ergeben

$$\begin{aligned}
& x + 2y^2 - (y+1)^2 + 8y < -10 \\
\Leftrightarrow\ & x + 2y^2 - y^2 - 2y - 1 + 8y < -10 \\
\Leftrightarrow\ & x + y^2 + 6y + 9 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & x + (y+3)^2 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & x < -(y+3)^2 .
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$M_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < -(y+3)^2\right\}.$$

Der Graph der Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon y \mapsto -(y+3)^2$ beschreibt in der x-y-Ebene eine nach links geöffnete (Normal-) Parabel mit Scheitelpunkt in $(0,-3)$ (schwarz gestrichelte Linie in der Skizze). Somit ist M_3 die durch den Parabelbogen eingeschlossene graue Fläche (der Rand gehört wegen der strikten Ungleichung nicht dazu).
Für den Schnitt $M_3 \cap M_4$ muss zudem $x > -9$ und $y > -3$ gelten. Nach Einzeichnung der grün gestrichelten Begrenzungslinien ergibt sich die gesuchte Menge $M_3 \cap M_4$ (blau schraffierte Fläche; der Rand gehört wegen den strikten Ungleichungen nicht dazu).



Anmerkung: Alternativ kann man die Schnittmenge $M_3 \cap M_4$ konkreter ausdrücken (war nicht gefragt):
Ist $(x,y) \in M_3$, so folgt $x < -(y+3)^2 \leqq 0$. Damit ergibt sich insbesondere

$$M_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < 0 \ \wedge\ x < -(y+3)^2\right\}.$$

Mit den Regeln für Beträge und den Eigenschaften der Ordnungsrelation (1.5.4, 1.5.7) folgt weiter

$$\begin{aligned}
M_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < 0 \ \wedge\ -x > (y+3)^2\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < 0 \ \wedge\ -x > |y+3|^2\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < 0 \ \wedge\ \sqrt{-x} > |y+3|\right\}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich für die Schnittmenge

$$\begin{aligned}
M_3 \cap M_4 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -9 < x < 0 \ \wedge\ -3 < y \ \wedge\ |y+3| < \sqrt{-x}\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -9 < x < 0 \ \wedge\ -3 < y < \sqrt{-x} - 3\right\},
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Betrag aufgelöst wurde. Eingezeichnet ergibt dies für $M_3 \cap M_4$ genau die blau schraffierte Fläche ohne Rand; der obere Rand der Menge wird dabei durch den Graphen der Funktion $w\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{-x} - 3$ festgelegt.

Aufgabe H 8. *Abbildungen, Beträge*

Geben Sie für die folgenden Abbildungen jeweils an, welche Werte gar nicht / wenigstens einmal / mehrfach angenommen werden.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big||2\,x-1|-1\big| + \big||x|-1\big|$

(b) $g\colon [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big||2\,x-1|-1\big| + \big||x|-1\big|$

(c) $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \big||2\,x-1|-1\big| + \big||x|-1\big|$

Lösungshinweise hierzu: Mittels einer Fallunterscheidung, berechnen wir

$$a(x) := \big||2\,x-1|-1\big| + \big||x|-1\big|$$

abschnittsweise für $x \in \mathbb{R}$ durch Auflösen der Beträge.

1. Fall: $x < 0$.

$$a(x) = |-2x+1-1| + |-x-1| = -2x + |x+1|.$$

Für den letzten Betrag werden zwei weitere Fälle unterschieden.
1.1. Fall: $x < -1$ ergibt $a(x) = -2x - x - 1 = -3x - 1$.
1.2. Fall: $-1 \leqq x < 0$ ergibt $a(x) = -2x + x + 1 = -x + 1$.

2. Fall: $0 \leqq x < \frac{1}{2}$.

$$a(x) = |-2x+1-1| + |x-1| = 2x - x + 1 = x + 1.$$

3. Fall: $\frac{1}{2} \leqq x$.

$$a(x) = |2x-1-1| + |x-1| = 2|x-1| + |x-1| = 3|x-1|.$$

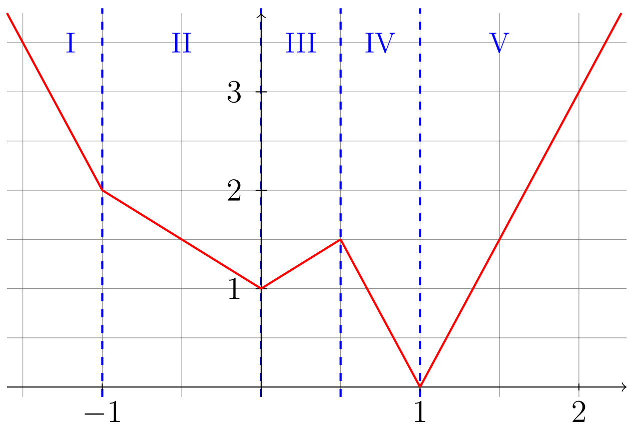
Wir unterscheiden zwei weitere Fälle.
3.1. Fall: $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ ergibt $a(x) = 3(-x+1) = -3x + 3$.
3.2. Fall: $1 \leqq x$ ergibt $a(x) = 3(x-1) = 3x - 3$.
Damit können wir f, g und h schreiben als

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} -3x-1 & \text{für } x < -1, \\ -x+1 & \text{für } -1 \leqq x < 0, \\ x+1 & \text{für } 0 \leqq x < \frac{1}{2}, \\ -3x+3 & \text{für } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1, \\ 3x-3 & \text{für } 1 \leqq x \end{cases}$$

$$g\colon [\tfrac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -3x + 3$$

$$h\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{für } 0 \leqq x < \frac{1}{2}, \\ -3x+3 & \text{für } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Zur Beantwortung der folgenden Fragen, ist es hilfreich sich eine Skizze des Graphen von f (Bereiche I bis V), des Graphen von g (Bereich IV mit Endpunkte) und des Graphen von h (Bereiche III und IV mit Endpunkte) zu machen.



Zunächst beantworten wir die Frage, welche Werte **gar nicht / wenigstens einmal** angenommen werden.

(a) *Die Abbildung f nimmt keine Werte in $\mathbb{R}^-$ an. Alle Zahlen in $\mathbb{R}_0^+$ werden wenigstens einmal als Werte angenommen:*
Da nach den Eigenschaften des Betrages $\big||2\,x-1|-1\big|+\big||x|-1\big| \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, kann f keine Werte in $\mathbb{R}^-$ annehmen.
Es bleibt zu zeigen, dass für $y \in \mathbb{R}_0^+$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$ existiert. Dafür reicht es f für $x \geqq 1$ zu betrachten (Bereich V); also $f(x) = 3x - 3$. Für $y \in \mathbb{R}_0^+$ erfüllt $\tilde{x} := \frac{1}{3}y + 1$ gerade $f(\tilde{x}) = 3\tilde{x} - 3 = y$ und $\tilde{x} \geqq 1$ weil $\frac{1}{3}y \geqq 0$.

(b) *Die Abbildung g nimmt alle Zahlen in $[0, \frac{3}{2}]$ wenigstens einmal als Werte an und nimmt keine Werte in $\mathbb{R} \smallsetminus [0, \frac{3}{2}]$ an:*
Es gilt für $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ die Abschätzung $0 \leqq -3x + 3 \leqq \frac{3}{2}$. Somit nimmt g keine Werte in $\mathbb{R} \smallsetminus [0, \frac{3}{2}]$ an.
Es bleibt zu zeigen, dass für $y \in [0, \frac{3}{2}]$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ derart existiert, dass $g(x) = y$. Mit $\tilde{x} := -\frac{1}{3}y + 1$ gilt gerade $g(\tilde{x}) = -3\tilde{x} + 3 = y$ und $\frac{1}{2} \leqq \tilde{x} \leqq 1$. Die letzte Ungleichung folgt aus $0 \leqq y \leqq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 \geqq -\frac{1}{3}y \geqq -\frac{1}{2}$.

(c) *Die Abbildung h nimmt alle Zahlen in $[0, \frac{3}{2}]$ wenigstens einmal als Werte an und nimmt keine Werte in $\mathbb{R} \smallsetminus [0, \frac{3}{2}]$ an:*
Für $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ ist $h(x) = g(x)$. Es reicht daher zu zeigen, dass die Abbildung h für $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqq x < \frac{1}{2}$ keine Werte in $\mathbb{R} \smallsetminus [0, \frac{3}{2}]$ annimmt (Bereich III). Für $0 \leqq x < \frac{1}{2}$ gilt gerade $1 \leqq x + 1 < \frac{3}{2}$. Somit nimmt h für $0 \leqq x < \frac{1}{2}$ nur Werte in $\left\{b \in \mathbb{R}\,\middle|\, 1 \leqq b < \frac{3}{2}\right\} \subseteqq [0, \frac{3}{2}]$ an.

Als letzten Schritt beantworten wir die Frage, welche Werte **mehrfach** angenommen werden.

(a) *Die Abbildung f nimmt alle Zahlen in $\mathbb{R}^+$ mehrfach an und 0 nur einmal:*
Es wurde bereits gezeigt, dass f für $x \geqq 1$ (Bereich V) alle Zahlen in $\mathbb{R}_0^+$ einmal annimmt.
Für $0 \leqq x < 1$ gilt $f(x) = h(x)$. Die obigen Überlegungen für h zeigen, dass f für $0 \leqq x < 1$ alle Zahlen in $\left\{c \in \mathbb{R}\,\middle|\, 0 < c \leqq \frac{3}{2}\right\}$ wenigstens einmal annimmt.
Betrachten wir f für $-1 \leqq x < 0$ (Bereich II); also $f(x) = -x + 1$. Auf diesem Bereich nimmt f jede Zahl in $\left\{d \in \mathbb{R}\,\middle|\, 1 < d \leqq 2\right\}$ als Wert an. Dies folgt aus der Tatsache, dass für $y \in \left\{d \in \mathbb{R}\,\middle|\, 1 < d \leqq 2\right\}$ gerade $\tilde{x} := -y + 1$ die Relationen $f(\tilde{x}) = -\tilde{x} + 1 = y$ und $-1 \leqq \tilde{x} < 0$ erfüllt.
Betrachten wir f für $x < -1$ (Bereich I); also $f(x) = -3x - 1$. Auf diesem Bereich nimmt f jede Zahl in $\left\{e \in \mathbb{R}\,\middle|\, 2 < e\right\}$ als Wert an. Dies folgt, da für $y \in \left\{e \in \mathbb{R}\,\middle|\, 2 < e\right\}$ gerade $\tilde{x} := -\frac{1}{3}(y + 1)$ die Relationen $f(\tilde{x}) = -3\tilde{x} - 1 = y$ und $\tilde{x} < -1$ erfüllt.
Da $\mathbb{R}^+ = \left\{c \in \mathbb{R}\,\middle|\, 0 < c \leqq \frac{3}{2}\right\} \cup \left\{d \in \mathbb{R}\,\middle|\, 1 < d \leqq 2\right\} \cup \left\{e \in \mathbb{R}\,\middle|\, 2 < e\right\}$, folgt die

Behauptung.

(b) *Die Abbildung g nimmt keine mehrfachen Werte an:*
Aus $g(x_1) = g(x_2)$ für $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$ folgt $-3x_1 + 3 = -3x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Dies zeigt die Behauptung.

(c) *Die Abbildung h nimmt alle Zahlen in $\left\{b \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \leqq b < \frac{3}{2}\right\}$ mehrfach an:*
Die obigen Überlegungen für g und h zeigen, dass h für $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ alle Zahlen in $[0, \frac{3}{2}]$ genau einmal als Wert annehmen, und, dass h für $0 \leqq x < \frac{1}{2}$ nur Werte in $\left\{b \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \leqq b < \frac{3}{2}\right\}$ annehmen kann.
Es bleibt daher zu zeigen, dass für $y \in \left\{b \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \leqq b < \frac{3}{2}\right\}$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqq x < \frac{1}{2}$ existiert mit $h(x) = y$. Nun ist für $y \in \left\{b \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \leqq b < \frac{3}{2}\right\}$ gerade $\tilde{x} = y - 1$ die passende Zahl, da $h(\tilde{x}) = \tilde{x} + 1 = y$ und $0 \leqq \tilde{x} < \frac{1}{2}$, womit die Behauptung folgt.

N. Borg,
S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

3. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 9. *Injektivität, Surjektivität und Bijektivität*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -2x^3$

(b) $g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto \frac{|x|}{x^2}$

(c) $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon n \mapsto \binom{n+3}{n+2}$

(d) $k\colon [0, \frac{3}{2}\pi] \to [-1, \frac{3}{2}]\colon x \mapsto \cos(x)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir weisen zunächst die Injektivität der Abbildung f nach. Seien dazu nun $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Dann gilt

$$(x-y)(x^2 + (x+y)^2 + y^2) = 2x^3 - 2y^3 = f(y) - f(x) = 0.$$

Falls der erste Faktor, also $x - y$, verschwindet gilt offensichtlich $x = y$.

Es bleibt also den zweiten Faktor zu untersuchen. Da x und y reelle Zahlen sind gilt natürlich $x^2 \geqq 0$, $(x+y)^2 \geqq 0$ und $y^2 \geqq 0$. Die Gleichung $x^2 + (x+y)^2 + y^2 = 0$ kann damit nur erfüllt sein, wenn $x^2 = 0$, $(x+y)^2 = 0$ und $y^2 = 0$ gelten. Das liefert schießlich $x = 0$ und $y = 0$, also insbesondere auch $x = y$.

Nun zeigen wir die Surjektivität von f. Sei dazu $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Für $x = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{2}}$ gilt dann

$$f(x) = -2x^3 = 2\frac{y}{2} = y.$$

Da f sowohl injektiv also auch surjektiv ist, ist f bijektiv.

(b) Die Abbildung g ist nicht injektiv, denn es gilt $g(-1) = 1 = g(1)$.

Die Abbildung g ist surjektiv, denn für $y \in \mathbb{R}^+$ ist $x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ und

$$g(x) = \frac{|x|}{x^2} = \frac{|\frac{1}{y}|}{\frac{1}{y^2}} = \frac{y^2}{|y|} = y.$$

Da g nicht injektiv ist, ist g auch nicht bijektiv.

(c) Die Abbildung h ist injektiv, denn für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $h(n) = h(m)$ gilt

$$n + 3 = \binom{n+3}{n+2} = h(n) = h(m) = \binom{m+3}{m+2} = m + 3,$$

und somit $n = m$.

Die Abbildung h ist nicht surjektiv, da für $n \in \mathbb{N}$ stets

$$h(n) = \binom{n+3}{n+2} = n + 3 > 3$$

gilt und somit der Wert $3 \in \mathbb{N}$ nicht von h angenommen wird.

Da h nicht surjektiv ist, ist h auch nicht bijektiv.

(d) Die Abbildung k ist nicht injektiv, denn es gilt $k(\frac{1}{2}\pi) = 0 = k(\frac{3}{2}\pi)$.

Wir zeigen nun, dass k auch nicht surjektiv ist. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit insbesondere auch für alle $x \in [0, \frac{3}{2}\pi]$ die Gleichung

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

Daraus folgt aber $0 \leqq (\cos x)^2 \leqq 1$ und somit $-1 \leqq \cos x \leqq 1$, weswegen etwa der Wert $\frac{3}{2}$ von k nicht angenommen werden kann.

Die Abbildung k ist nicht bijektiv, da sie weder injektiv noch surjektiv ist.

Aufgabe H 10. *Links- und Rechtsinverse*

Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g\colon B \to A$ heißt *Links-* bzw. *Rechtsinverse* von f, wenn $g \circ f = \mathrm{id}_A$ bzw. $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gilt. Wir nennen f *links-/rechtsinvertierbar*, wenn eine *Links-/Rechtsinverse* von f existiert. Zeigen Sie:

(a) Wenn $f\colon A \to B$ linksinvertierbar ist, dann ist f injektiv.

(b) Wenn $f\colon A \to B$ rechtsinvertierbar ist, dann ist f surjektiv.

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Links- und Rechtsinvertierbarkeit:

(c) $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2$

(d) $k\colon \mathbb{R} \to [-1,1]\colon x \mapsto \sin x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $g\colon B \to A$ eine Linksinverse von f. Für alle $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gilt dann die Gleichung

$$x = g(f(x)) = g(f(y)) = y.$$

Somit ist f injektiv.

(b) Sei $g\colon B \to A$ eine Rechtsinverse von f. Für alle $y \in B$ und $x = g(y)$ gilt dann die Gleichung

$$y = f(g(y)) = f(x).$$

Damit ist f surjektiv.

(c) Die Abbildung h ist linksinvertierbar aber nicht rechtsinvertierbar.

Eine Linksinverse von h ist etwa durch

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\colon x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \\ 42 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben, denn für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$g(h(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

Eine Rechtsinverse von h kann nach Teil **(b)** nicht existieren, da h nicht surjektiv ist. In der Tat gilt für $x \in \mathbb{R}^+$ stets $h(x) = x^2 > 0$, weswegen der Wert $0 \in \mathbb{R}$ von h nicht angenommen wird.

(d) Die Abbildung k ist rechtsinvertierbar aber nicht linksinvertierbar.

Eine Rechtsinverse von k ist etwa durch $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \arcsin x$ gegeben. In der Tat gilt für $x \in [-1,1]$ stets

$$k(g(x)) = k(\arcsin x) = \sin \arcsin x = x.$$

Wegen $\sin 0 = 0 = \sin 2\pi$ ist k nicht injektiv. Nach Teil **(a)** kann damit keine Linksinverse von k existieren.

Aufgabe H 11. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

(a) Seien $\zeta_j = (\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\,\sin(\pi/3))^j$. Zeichnen Sie die Zahl ζ_j für $j \in \{0, 1, \dots, 5\}$ in die komplexe Zahlenebene ein und bestimmen Sie $\sum_{k=0}^{5} \zeta_j$.

(b) Berechnen Sie jeweils Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument der folgenden komplexen Zahlen:

$$(-\sqrt{2} + \sqrt{6}\,\mathrm{i})^8, \quad \overline{(1+\mathrm{i})^{17}} \cdot (1-\mathrm{i})^{-20}$$

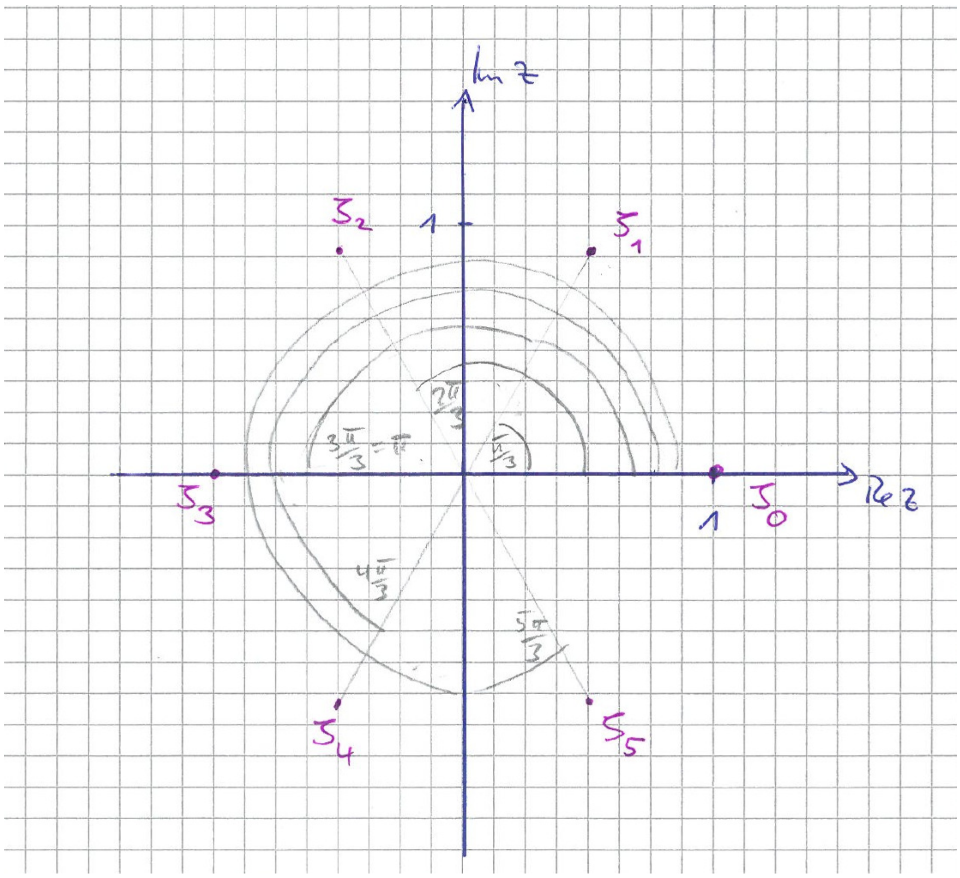
Lösungshinweise hierzu:

(a) Entweder berechnet man Real- und Imaginärteil der ζ_j (s.u.) und zeichnet diese in die komplexe Zahlenebene ein oder man macht sich die Polardarstellung zunutze: Zunächst stellt man fest, dass $|\zeta_j| = 1$ für $j \in \{0, \dots, 5\}$. Daher liegen alle ζ_j auf dem Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1.

Weiter ist

$$\arg \zeta_j = \arg\left(\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\,\sin(\pi/3)\right)^j = \arg\left(\cos(j\pi/3) + \mathrm{i}\,\sin(j\pi/3)\right) = j\frac{\pi}{3} = j\frac{2\pi}{6}.$$

Damit sind die ζ_j die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks, das $\zeta_0 = 1$ als eine Ecke besitzt und dem Einheitskreis einbeschrieben ist.



Um die Summe $\sum_{k=0}^{5} \zeta_j$ zu berechnen, beachte man, dass der Zählindex der Reihe verschieden ist von j. Daher ist $\sum_{k=0}^{5} \zeta_j = 6\zeta_j$.

Anmerkung: Wesentlich interessanter ist die Berechnung der Summe $\sum_{j=0}^{5} \zeta_j$ (aber nach der war nicht gefragt):
Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{5} \zeta_j &= 1 + [\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)] + [\cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3)] \\ &\quad + [\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)] + [\cos(4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi/3)] + [\cos(5\pi/3) + \mathrm{i}\sin(5\pi/3)] \\ &= 1 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}\right] + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}\right] + [-1 + 0\mathrm{i}] + \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Wenn man weiß, dass die ζ_j ein regelmäßiges Sechseck, welches symmetrisch zum Ursprung ist, beschreiben, kann man geometrisch argumentieren: Denn dann geht ζ_3 durch Spiegelung von ζ_0 am Ursprung hervor, so dass $\zeta_3 = -\zeta_0$. Genauso folgern wir, dass $\zeta_4 = -\zeta_1$ und $\zeta_5 = -\zeta_2$ ist. Somit ist klar, dass $\sum_{j=0}^{5} \zeta_j = 0$ gelten muss.

(b)

- Prinzipiell kann man die achte Potenz auch in kartesischen Koordinaten durch Ausmultiplizieren - oder etwas eleganter durch die Binomische Formel - berechnen. Bei höheren Potenzen wird das natürlich extrem aufwändig. Beim Potenzieren empfiehlt sich generell die Umrechnung in Polarkoordinaten. Sei $z = -\sqrt{2} + \sqrt{6}\,\mathrm{i}$. Dann ist $|z| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Um das Argument zu berechnen, klammern wir den Betrag von z aus, so dass $z = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$. Damit lässt sich nämlich das Argument mit Hilfe einer Wertetabelle für Sinus und Kosinus bestimmen. Wir erhalten damit $\arg z = \frac{2\pi}{3}$. Damit ist

$$\begin{aligned}z^8 &= (2\sqrt{2})^8(\cos(16\pi/3) + \mathrm{i}\sin(16\pi/3)) \\ &= 2^8 \cdot 2^{8/2}(\cos(4\pi + 4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi + 4\pi/3)) \\ &= 2^{12}(\cos(4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi/3)) \qquad \text{(Polardarstellung)} \\ &= 2^{12}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}\right) \\ &= -2^{11} - 2^{11}\sqrt{3}\mathrm{i} \qquad \text{(kartesische Darstellung),}\end{aligned}$$

  woraus wir ablesen, dass

$$\operatorname{Re} z^8 = -2048,\ \operatorname{Im} z^8 = -2048\sqrt{3},\ |z^8| = 4096,\ \arg z^8 = \frac{4\pi}{3}.$$

- Es sei $w = \overline{(1+\mathrm{i})^{17}} \cdot (1-\mathrm{i})^{-20}$. Dann ist

$$\begin{aligned}w &= \frac{\left(\overline{1+\mathrm{i}}\right)^{17}}{(1-\mathrm{i})^{20}} = \frac{(1-\mathrm{i})^{17}}{(1-\mathrm{i})^{20}} = \frac{1}{(1-\mathrm{i})^3} = \left(\frac{1}{1-\mathrm{i}}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(1+\mathrm{i})^3 = \frac{1}{8}(1+3\mathrm{i}-3-\mathrm{i}) \\ &= \frac{1}{4}(-1+\mathrm{i}) \qquad \text{(kartesische Darstellung)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{i}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4)) \qquad \text{(Polardarstellung).}\end{aligned}$$

Wir lesen daher ab:

$$\operatorname{Re} w = -\frac{1}{4},\ \operatorname{Im} w = \frac{1}{4},\ |w| = \frac{1}{4}\sqrt{2},\ \arg w = \frac{3\pi}{4}.$$

Aufgabe H 12. *Abbildungen im Komplexen*

Zeichnen Sie die folgenden Mengen $M, f(M) \subseteqq \mathbb{C}$ in die komplexe Zahlenebene ein, wenn

(a) $f\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{1}{z}$, $M = \{1, \mathrm{i}, 1 - 2\mathrm{i}\}$,

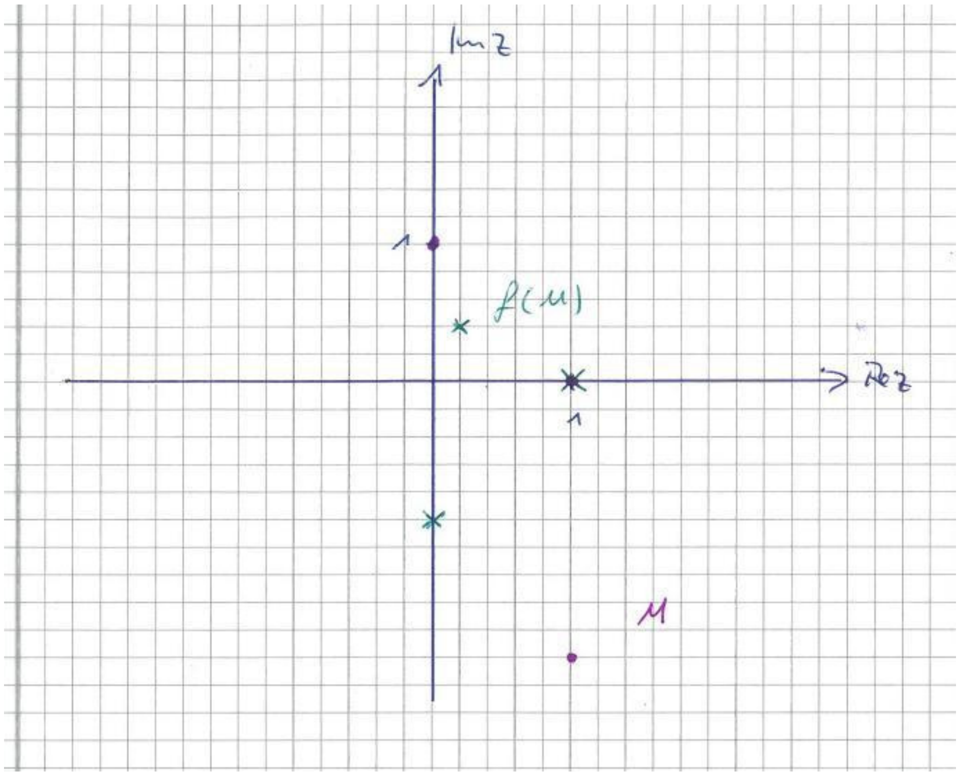
(b) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto (1+\mathrm{i})z$ und M der Kreis um 1 mit Radius $\sqrt{2}$ ist,

(c) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto z^2$, $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 2 \vee \operatorname{Im} z = 1\}$.

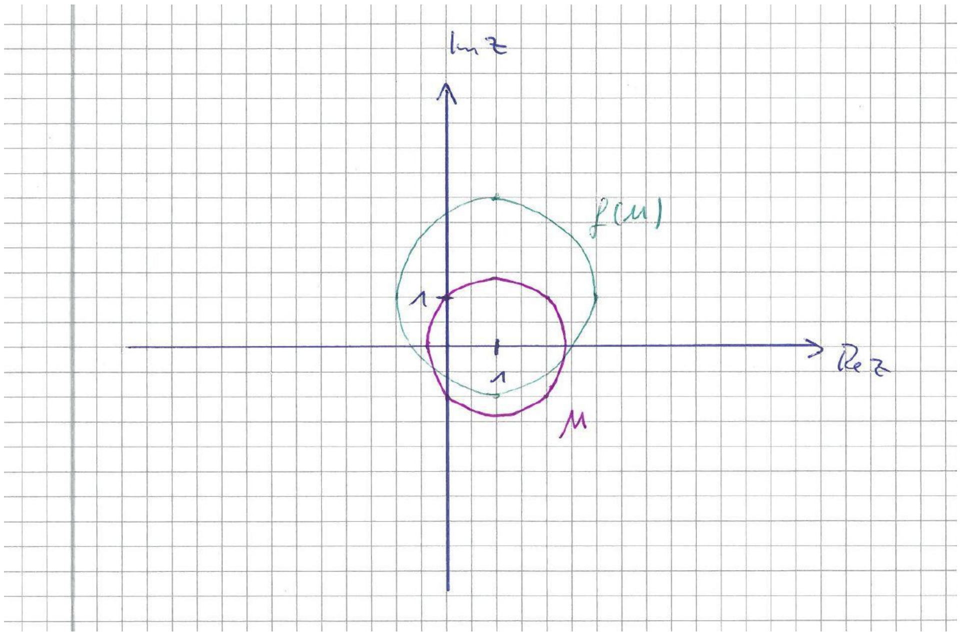
Hinweis: Verwenden Sie verschiedene Farben für M und $f(M)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $f(1) = 1$, $f(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$ und $f(1-2\mathrm{i}) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}$. Zum besseren Einzeichnen auf Karopapier eignet sich die Längeneinheit $2,5$ cm.



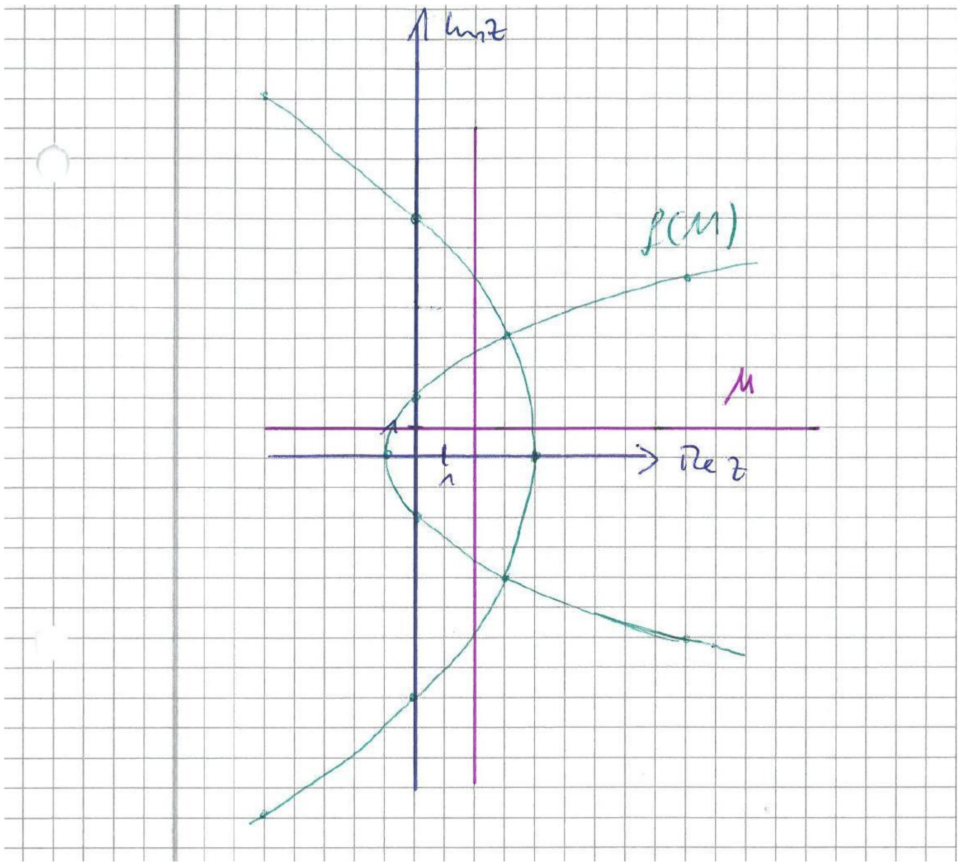
(b) Die Multiplikation mit $(1+\mathrm{i}) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4))$ ist eine Drehstreckung (Streckung um Faktor $\sqrt{2}$ und Drehwinkel $\pi/4$ gegen den Uhrzeigersinn). Damit wird der Kreis um 1 mit Radius $\sqrt{2}$ auf den Kreis um $1+\mathrm{i}$ mit Radius 2 abgebildet. Tipp zum Einzeichnen auf Karopapier: M geht durch die Punkte $2+\mathrm{i}$, i, $-\mathrm{i}$ und $2-\mathrm{i}$, $f(M)$ geht durch die Punkte $3+\mathrm{i}$, $1+3\mathrm{i}$, $-1+\mathrm{i}$ und $1-\mathrm{i}$.



(c) Die Menge M ist die Vereinigung der senkrechten Geraden $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : z = 2 + \mathrm{i}b,\, b \in \mathbb{R}\}$ und der waagrechten Geraden $M_2 := \{z \in \mathbb{C} :\ z = a + \mathrm{i},\, a \in \mathbb{R}\}$. Die Menge $f(M)$ ist damit die Vereinigung der Mengen

$$\begin{aligned} f(M_1) &= \{w \in \mathbb{C} :\ w = (2 + \mathrm{i}b)^2 = 4 - b^2 + 4\mathrm{i}b,\, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{w \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} w = 4 - \frac{1}{16}(\operatorname{Im} w)^2\right\}, \\ f(M_2) &= \{w \in \mathbb{C} :\ w = (a + \mathrm{i})^2 = a^2 - 1 + 2\mathrm{i}a,\, a \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{w \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} w = \frac{1}{4}(\operatorname{Im} w)^2 - 1\right\}. \end{aligned}$$

Damit ist $f(M_1)$ eine nach links geöffnete Parabel mit Scheitel bei 4, die die imaginäre Achse in $\pm 8\mathrm{i}$ schneidet. Die Menge $f(M_2)$ ist eine nach rechts geöffnete Parabel, die die imaginäre Achse in $\pm 2\mathrm{i}$ schneidet. Da sich M_1 und M_2 in $2 + \mathrm{i}$ schneiden, ist $f(2 + \mathrm{i}) = 3 + 4\mathrm{i} \in f(M)$, d.h. die beiden Parabeln schneiden sich in $3 + 4\mathrm{i}$. Wegen der Symmetrie zur reellen Achse gibt es einen weiteren Schnittpunkt der Parabeln in $3 - 4\mathrm{i}$. Für das Einzeichnen auf Karopapier empfiehlt sich eine Längeneinheit von $0,5$ cm.


Im z
f(M)
M
Re z
1
1

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 13. *Untervektorräume*

In welchen der folgenden Fälle ist W ein Untervektorraum des reellen Vektorraums V?

(a) V ist der Vektorraum aller reellen Polynome und W die Menge aller Polynome vom Grad 5,

(b) V ist der Vektorraum aller reellen Polynome und W die Menge aller Polynome vom Grad höchstens 5,

(c) $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0, y \geqq 0\}$,

(d) $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x \,|\, y\rangle = 0\}$ für einen festen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir erinnern daran, dass W genau dann ein Untervektorraum ist, wenn die drei Eigenschaften aus Definition 2.4.4 erfüllt sind. Dies ist hier nicht der Fall und W folglich kein Untervektorraum von V: Das Nullpolynom, also der Nullvektor des Vektorraums V, besitzt nämlich nicht Grad 5 (sondern $-\infty$) und liegt daher nicht in der Menge W.

(b) Dies ist ein Untervektorraum von V, was wir durch Überprüfung der Eigenschaften aus Definition 2.4.4. nachweisen. Zur Erinnerung, es muss gelten:

- Der Nullvektor von V liegt in W.
- Sind $f, g \in W$, dann gilt auch $f + g \in W$.
- Für alle $f \in W$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist auch $\lambda f \in W$.

Nun besitzt das Nullpolynom wie bereits bemerkt Grad $-\infty$ und ist daher per Definition der Menge W auch in W enthalten. Sind nun $f, g \in W$ gegeben sind, bedeutet dies, dass sowohl f als auch g Grad höchstens 5 besitzt. Es gibt also reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_5$, sodass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

erfüllt ist. Analog hierzu haben wir

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5.$$

Dann gilt für die Summe der beiden Polynome

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_5 + b_5)x^5,\end{aligned}$$

was zeigt, dass $f + g$ wieder ein Polynom vom Grad höchstens 5 und daher in W enthalten ist. Es verbleibt also nur noch die letzte Eigenschaft nachzuweisen. Sind $f \in W$ und ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben, dann ist λf entweder das Nullpolynom, wenn $\lambda = 0$, oder besitzt den selben Grad wie f; das sieht man, indem man den Ausdruck $(\lambda f)(x)$ $(= \lambda \cdot f(x))$, wie oben geschehen, ausschreibt. In jedem Fall ist der Grad von λf höchstens gleich dem Grad von f, mithin besitzt λf also Grad höchstens 5 und liegt somit in W. Daher ist W ein Untervektorraum von V.

(c) Diese Menge ist wiederum kein Untervektorraum. Ist nämlich beispielsweise $(x,y)^\intercal \in W$ ein Vektor mit $x > 0$ (explizit z.B. $(1,0)^\intercal$), dann ist $(-1)\cdot(x,y)^\intercal = (-x,-y)^\intercal$ kein Element von W, da ja $-x < 0$ gilt.

(d) Die Menge W aus diesem Aufgabenteil ist ein Untervektorraum. Um dies nachzuweisen, verifizieren wir erneut die drei Eigenschaften eines Untervektorraums. Dass der Nullvektor $\vec{0} = (0,0,\ldots,0)^\intercal$, den wir zur besseren Unterscheidung von der reellen Zahl 0 mit einem Pfeil dekorieren, in W enhalten ist, folgt aus der Gleichungskette

$$\left\langle \vec{0} \,\middle|\, y \right\rangle = \left\langle 0\cdot\vec{0} \,\middle|\, y \right\rangle = 0\cdot\left\langle \vec{0} \,\middle|\, y \right\rangle = 0,$$

wobei in die erste Gleichung das Distributivgesetz (Eigenschaft 5 in Satz 2.6.1) eingeht. Sind $u,v \in W$ gegeben, dann gilt nach den Eigenschaften 1 und 4 des eben erwähnten Satzes 2.6.1:

$$\langle u+v \,|\, y\rangle = \langle y \,|\, u+v\rangle = \langle y \,|\, u\rangle + \langle y \,|\, v\rangle = \langle u \,|\, y\rangle + \langle v \,|\, y\rangle = 0+0 = 0,$$

was zeigt, dass auch die Summe $u+v$ in W liegt. Seien schließlich $u \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben. Wiederum folgt aus dem Distributivgesetz

$$\langle \lambda u \,|\, y\rangle = \lambda\cdot\langle u \,|\, y\rangle = \lambda\cdot 0 = 0.$$

Damit ist W ein Untervektorraum von V.

Aufgabe H 14. *Polarkoordinaten*

Zeigen Sie, dass es zu der Menge

$$D = \left\{ \frac{z-i}{z+i} \;\middle|\; z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(z) > 0 \right\}$$

Konstanten $\ell \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in [0,2\pi]$ mit $\varphi_1 \leqq \varphi_2$ derart gibt, dass gilt: $D = \{r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi)) \mid r \in [0,\ell),\, \varphi \in [\varphi_1,\varphi_2)\}$.

Lösungshinweise hierzu: Wir behaupten, dass die gesuchten Konstanten durch $\ell = 1$, $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 2\pi$ gegeben sind, die Menge D also den offenen Ball vom Radius 1 um 0 beschreibt, d. h. die Menge

$$B = \{\cos(\varphi) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi) \mid \varphi \in [0,2\pi)\} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}.$$

Zu zeigen ist also, dass jedes Element $(z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$ mit $\operatorname{Im}(z) > 0$ in B liegt und umgekehrt, dass jedes Element $w \in B$ eine Darstellung $w = (z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$ für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) > 0$ besitzt. Wir beginnen mit der ersten Aussage. Sei also $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(z) > 0$ gegeben. Setzen wir $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$, so gilt $z = x + \mathrm{i}y$ und dann folgt

$$|z-\mathrm{i}|^2 = |x + \mathrm{i}(y-1)|^2 = x^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1.$$

Wegen $y > 0$ ist aber $-2y < 2y$ und somit

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 < x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + (y+1)^2 = |z+\mathrm{i}|^2,$$

d. h. $|z-\mathrm{i}|^2 < |z+\mathrm{i}|^2$, was aufgrund der Monotonie des Quadrierens (Satz 1.5.7) auch $|z-\mathrm{i}| < |z+\mathrm{i}|$ zeigt. Damit folgt

$$\left|\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right| = \frac{|z-\mathrm{i}|}{|z+\mathrm{i}|} < 1$$

und $(z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i}) \in B$.
Wir wollen nun noch zeigen, dass jedes Element $w \in B$ von der Form $w = (z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Im}(z) > 0$ ist. Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\begin{aligned} w = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} &\iff w(z+\mathrm{i}) = z-\mathrm{i} \\ &\iff wz + w\mathrm{i} = z - \mathrm{i} \\ &\iff w\mathrm{i} + \mathrm{i} = z - wz \\ &\iff \mathrm{i}(1+w) = z(1-w). \end{aligned}$$

Wegen $|w| < 1$ ist insbesondere $w \neq 1$. Wir dürfen also durch $1-w$ teilen und erhalten

$$w = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \iff \mathrm{i}(1+w) = z(1-w) \iff z = \mathrm{i} \cdot \frac{1+w}{1-w}.$$

Wir sehen also: Gegeben eine komplexe Zahl $w \in B$ ist $z = \mathrm{i}\cdot(1+w)/(1-w)$ eine komplexe Zahl mit $w = (z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$. Wenn wir zeigen können, dass $\operatorname{Im}(z) > 0$ ist, gilt also $w \in D$ und wir sind fertig. Mit Hilfe der Formel zur Berechnung des multiplikativ Inversen einer von 0 verschiedenen komplexen Zahl (Punkt 2 in 1.8.2) berechnen wir nun

$$\frac{1+w}{1-w} = \frac{(1+w)\cdot\overline{(1-w)}}{|1-w|^2} = \frac{(1+w)(1-\overline{w})}{|1-w|^2} = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} + \frac{w-\overline{w}}{|1-w|^2}.$$

Wegen $w - \overline{w} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im}(w)$ folgt daher

$$z = \mathrm{i}\cdot\frac{1+w}{1-w} = \mathrm{i}\cdot\frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} - \frac{2\operatorname{Im}(w)}{|1-w|^2},$$

also aufgrund von $|w| < 1$ auch $\operatorname{Im}(z) = (1-|w|^2)/|1-w|^2 > 0$ und $w \in D$.

Aufgabe H 15. *Komplexe Nullstellen*

Geben Sie sämtliche komplexen Nullstellen eines Polynoms X^2+aX+b mit $a, b \in \mathbb{C}$ an und berechnen Sie anschließend die Nullstellen des komplexen Polynoms $5X^3+9X^2-17X+3$.

Lösungshinweise hierzu: Eine komplexe Zahl z ist genau dann Nullstelle des Polynoms $f := X^2+aX+b$, wenn die Gleichung

$$0 = f(z) = z^2 + az + b$$

erfüllt ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned} 0 = z^2+az+b &\iff 0 = z^2 + 2(a/2)z + b \\ &\iff \frac{a^2}{4} = z^2 + 2(a/2)z + \frac{a^2}{4} + b \\ &\iff \frac{a^2}{4} - b = (z+a/2)^2 \\ &\iff \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = z + \frac{a}{2} \\ &\iff -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = z, \end{aligned}$$

die beiden (möglicherweise identischen) Nullstellen von f sind daher

$$-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \text{ und } -\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Nun zum zweiten Teil der Aufabe, der Bestimmung der Nullstellen des Polynoms $g := 5X^3+9X^2-17X+3$. Der Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.8.5) besagt, dass es (mit Vielfachheit gezählt) drei Nullstellen geben muss. Wir versuchen eine Nullstelle zu erraten, indem wir die Teiler von 3 einsetzen. In der Tat ist $g(1)=5+9-17+3=0$, weshalb $(X-1)$ ein Teiler von g sein muss (vgl. 1.8.7). Polynomdivision liefert

$$\begin{array}{rcrcrcrcccl}
(5X^3 & + & 9X^2 & - & 17X & + & 3) & : & (X-1) & = & 5X^2+14X-3, \\
5X^3 & - & 5X^2 & & & & & & & & \\
\hline
 & & 14X^2 & - & 17X & + & 3 & & & & \\
 & & 14X^2 & - & 14X & & & & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & -3X & + & 3 & & & & \\
 & & & & -3X & + & 3 & & & & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

es gilt daher $g=(5X^2+14X-3)(X-1)$. Setzen wir $f := X^2+(14/5)X-3/5$, dann ist $5f=5X^2+14X-3$, die Nullstellen von f sind daher gleich den Nullstellen des Polynoms $5X^2+14X-3$, und diese die verbleibenden beiden Nullstellen des Polynoms g. Nun ist

$$\frac{(14/5)^2}{4}+\frac{3}{5}=\frac{2^2\cdot 7^2}{5^2\cdot 4}+\frac{3\cdot 5}{5^2}=\frac{64}{5^2}=\frac{8^2}{5^2},$$

weshalb sich aus der zuvor hergeleiteten Formel die folgenden Nullstellen für f ergeben:

$$-\frac{7}{5}-\frac{8}{5}=-3 \text{ und } -\frac{7}{5}+\frac{8}{5}=\frac{1}{5}.$$

Die Nullstellen von g sind also -3, $\frac{1}{5}$ und 1.

Aufgabe H 16. *Lineare Gleichungssysteme*

Bestimmen Sie alle Lösungen $(x_1,x_2,x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl}
4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0, \\
27x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 0, \\
-2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0, \\
3x_1 & & & + & x_3 & = & 0, \\
101x_1 & + & 52x_2 & - & 53x_3 & = & 0, \\
15x_1 & + & 3x_2 & & & = & 0.
\end{array}$$

Lösungshinweise hierzu: Ist $(x_1,x_2,x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung des angegebenen Gleichungssystems, so besagen die 4. und 6. Gleichung, dass

$$3x_1+x_3=0 \iff x_3=-3x_1 \text{ und } 15x_1+3x_2=0 \iff x_2=-5x_1$$

gelten muss. Der Vektor $(x_1,x_2,x_3)^\intercal$ liegt also in der Menge

$$\mathbb{L}=\left\{(t,-5t,-3t)^\intercal \mid t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Umgekehrt löst aber auch jeder Vektor der Form $(t, -5t, -3t)^\intercal$ das angegebene Gleichungssystem, denn

$$\begin{aligned}
4t - 2 \cdot 5t + 2 \cdot 3t &= (4 - 10 + 6)t &&= 0, \\
27t - 3 \cdot 5t - 4 \cdot 3t &= (27 - 15 - 12)t &&= 0, \\
-2t + 5 \cdot t - 3 \cdot t &= (-2 + 5 - 3)t &&= 0, \\
3t - 0 \cdot 5t - 3 \cdot 3t &= (3 - 0 - 3)t &&= 0, \\
101t - 52 \cdot 5t + 53 \cdot 3t &= 101t - (5 - 3)52t + 3t &&= 0, \\
15t - 3 \cdot 5t - 0 \cdot 3t &= (15 - 15)t &&= 0.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\mathbb{L}$ genau die Menge aller Vektoren beschreibt, die das angegebene Gleichungssystem lösen.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 17. *Skalarprodukt und Vektorprodukt*

Für $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ setzen wir $Jx = \left(\begin{smallmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann beschreibt $J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto Jx$ eine Drehung um $\pi/2$. Zeigen Sie die folgende Aussage über Vektoren des $\mathbb{R}^2$:

(a) Zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn gilt $\langle u \mid Jv \rangle = 0$.

Lösungshinweise hierzu: Sein $u, v \in \mathbb{R}^2$ mit $0 = \langle u \mid Jv \rangle = -u_1 v_2 + u_2 v_1$ gegeben. Falls $v_1 \neq 0$, dann erhalten wir eine nicht triviale Linearkombination der 0 durch

$$v_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - u_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 u_1 - u_1 v_1 \\ v_1 u_2 - u_1 v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Falls $v_2 \neq 0$, dann erhalten wir eine nicht triviale Linearkombination der 0 durch

$$-v_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 u_1 + u_2 v_1 \\ -v_2 u_2 + u_2 v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Falls $v_1 = v_2 = 0$, also $v = 0$, dann sind auch in diesem Fall u und v linear abhängig.

Seien nun umgekehrt $u, v \in \mathbb{R}^2$ linear abhängig und $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$ eine nichttriviale Linearkombination der 0. Wir zeigen $\langle u \mid Jv \rangle = 0$.
Falls $\lambda_1 \neq 0$, dann erhalten wir aus $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$ die Gleichung

$$0 = \langle 0 \mid Jv \rangle = \langle \lambda_1 u + \lambda_2 v \mid Jv \rangle = \lambda_1 \langle u \mid Jv \rangle + \lambda_2 \langle v \mid Jv \rangle .$$

Wegen $\langle x \mid Jx \rangle = -x_1 x_2 + x_2 x_1 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist insbesondere $\langle v \mid Jv \rangle = 0$ und wir erhalten $0 = \lambda_1 \langle u \mid Jv \rangle$ und somit schließlich $\langle u \mid Jv \rangle = 0$.
Falls $\lambda_2 \neq 0$, dann erhalten wir aus $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$ die Gleichung

$$0 = \langle 0 \mid Ju \rangle = \langle \lambda_1 u + \lambda_2 v \mid Ju \rangle = \lambda_1 \langle u \mid Ju \rangle + \lambda_2 \langle v \mid Ju \rangle .$$

Wegen $\langle u \mid Ju \rangle = 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ gilt also $\langle v \mid Ju \rangle = 0$. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt aber auch $\langle x \mid Jy \rangle = -x_1 y_2 + x_2 y_1 = -\langle y \mid Jx \rangle$ und somit $\langle u \mid Jv \rangle = -\langle v \mid Ju \rangle = 0$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

(b) Für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle u \,|\, v \times w \rangle = \langle v \,|\, w \times u \rangle = \langle w \,|\, u \times v \rangle$.

Lösungshinweise hierzu: Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 \\ y_3 z_1 - y_1 z_3 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \boxed{x_1 y_2 z_3} - \boxed{x_1 y_3 z_2} + \boxed{x_2 y_3 z_1} - \boxed{x_2 y_1 z_3} + \boxed{x_3 y_1 z_2} - \boxed{x_3 y_2 z_1} \\
&= \boxed{y_1 z_2 x_3} - \boxed{y_1 z_3 x_2} + \boxed{y_2 z_3 x_1} - \boxed{y_2 z_1 x_3} + \boxed{y_3 z_1 x_2} - \boxed{y_3 z_2 x_1} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} z_2 x_3 - z_3 x_2 \\ z_3 x_1 - z_1 x_3 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle .
\end{aligned}$$

Für $x = u$, $y = v$ und $z = w$ erhalten wir die Gleichung $\langle u \,|\, v \times w \rangle = \langle v \,|\, w \times u \rangle$; für $x = v$, $y = w$ und $z = u$ die Gleichung $\langle v \,|\, w \times u \rangle = \langle w \,|\, u \times v \rangle$.

(c) Sind $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig, dann gilt $\langle u \,|\, v \times w \rangle = 0$.

Lösungshinweise hierzu: Wir gehen analog zur zweiten Hälfte von Teil **(a)** vor.

Seien dazu $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gegeben und $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ eine nicht triviale Linearkombination der 0. Wir müssen zeigen, dass dann $\langle u \,|\, v \times w \rangle = 0$ gilt.
Falls $\lambda_1 \neq 0$, dann erhalten wir aus $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 = \langle 0 \,|\, v \times w \rangle &= \langle \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w \,|\, v \times w \rangle \\
&= \lambda_1 \langle u \,|\, v \times w \rangle + \lambda_2 \langle v \,|\, v \times w \rangle + \lambda_3 \langle w \,|\, v \times w \rangle .
\end{aligned}$$

Wegen $\langle v \,|\, v \times w \rangle = 0$ und $\langle w \,|\, v \times w \rangle = 0$ erhalten wir $0 = \lambda_1 \langle u \,|\, v \times w \rangle$ und somit schließlich $\langle u \,|\, v \times w \rangle = 0$.
Falls $\lambda_2 \neq 0$, dann erhalten wir aus $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 = \langle 0 \,|\, w \times u \rangle &= \langle \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w \,|\, w \times u \rangle \\
&= \lambda_1 \langle u \,|\, w \times u \rangle + \lambda_2 \langle v \,|\, w \times u \rangle + \lambda_3 \langle w \,|\, w \times u \rangle .
\end{aligned}$$

Wegen $\langle u \,|\, w \times u \rangle = 0$ und $\langle w \,|\, w \times u \rangle = 0$ erhalten wir $0 = \lambda_2 \langle v \,|\, w \times u \rangle$ und vermöge Teil **(b)** schließlich $\langle u \,|\, v \times w \rangle = \langle v \,|\, w \times u \rangle = 0$.
Falls $\lambda_3 \neq 0$, dann erhalten wir aus $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 = \langle 0 \,|\, u \times v \rangle &= \langle \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w \,|\, u \times v \rangle \\
&= \lambda_1 \langle u \,|\, u \times v \rangle + \lambda_2 \langle v \,|\, u \times v \rangle + \lambda_3 \langle w \,|\, u \times v \rangle .
\end{aligned}$$

Wegen $\langle u \,|\, u \times v \rangle = 0$ und $\langle v \,|\, u \times v \rangle = 0$ erhalten wir $0 = \lambda_3 \langle w \,|\, u \times v \rangle$ und vermöge Teil **(b)** schließlich $\langle u \,|\, v \times w \rangle = \langle w \,|\, u \times v \rangle = 0$.

Anmerkung: Auch hier gilt die Umkehrung der Aussage. Drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ sind also genau dann linear abhängig, wenn gilt $\langle u \,|\, v \times w \rangle = 0$.
Die fehlende Implikation zeigt man dabei ähnlich wie in der ersten Hälfte von Teil **(a)**.

Aufgabe H 18. *Dimension von Untervektorräumen*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_\alpha = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

sowie den Untervektorraum $W := \left\{ (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)^\intercal \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; w_1 + 2w_2 - w_5 = 0 \right\}$.

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die u_1, u_2, u_3, v_α linear unabhängig / abhängig sind.

Lösungshinweise hierzu: Um zu entscheiden ob u_1, u_2, u_3, v_α linear abhängig oder linear unabhängig sind, prüfen wir, ob es eine nicht triviale Linearkombination der 0 gibt. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 v_\alpha = 0$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, welches wir im Folgenden lösen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcll} 0\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & + & (-5)\lambda_4 & = & 0 & \text{(I)} \\ 1\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & (-1)\lambda_3 & + & 7\lambda_4 & = & 0 & \text{(II)} \\ 4\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 0\lambda_3 & + & 0\lambda_4 & = & 0 & \text{(III)} \\ 0\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 0\lambda_3 & + & 0\lambda_4 & = & 0 & \text{(IV)} \\ (-2)\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 1\lambda_3 & + & \alpha\lambda_4 & = & 0 & \text{(V)} \end{array}$$

Gleichung (IV) ist immer für alle $\lambda_i \in \mathbb{R}$ erfüllt.
Aus Gleichung (III) folgt $\lambda_1 = 0$.
Aus den Gleichungen (I) und (II) erhalten wir damit

$$2\lambda_2 + 3\lambda_3 - 5\lambda_4 = 2\lambda_2 - \lambda_3 + 7\lambda_4 \quad \Leftrightarrow \quad 3\lambda_3 - 5\lambda_4 = -\lambda_3 + 7\lambda_4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_3 = 3\lambda_4.$$

Dies führt nach Einsetzen in (V), schließlich auf die Bedingung $(3+\alpha)\lambda_4 = 0$.

1. Fall: $\alpha \neq -3$.
Aus $(3+\alpha)\lambda_4 = 0$ erhalten wir $\lambda_4 = 0$. Damit folgt $\lambda_3 = 3\lambda_4 = 0$, womit wegen Gleichung (I) auch $\lambda_2 = 0$. Somit kann es keine nicht triviale Linearkombination der 0 geben und u_1, u_2, u_3, v_α sind linear unabhängig.

2. Fall: $\alpha = -3$.
Wir setzen $\lambda_4 = 1$ und erhalten damit $\lambda_3 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ aus (I). Somit gilt $0u_1 - 2u_2 + 3u_3 + 1v_{-3} = 0$ und u_1, u_2, u_3, v_α sind linear abhängig.

Anmerkung: Für den Fall $\alpha = -3$ kann man alle Linearkombinationen der 0 angeben, indem man $\lambda_4 = r$ für $r \in \mathbb{R}$ setzt. Dies führt auf $\lambda_3 = 3r$ und $\lambda_2 = -2r$, womit $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 v_\alpha = 0$ gilt für alle

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} r \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es ein $w \in \mathbb{R}^5$ so, dass $\mathrm{L}\left(u_1, u_2, u_3, u_1 + u_2, v_\alpha, w\right) = \mathbb{R}^5$?

Lösungshinweise hierzu: Da $u_1 + u_2$ eine Linearkombination der Vektoren u_1 und u_2 ist, folgt $\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3, u_1 + u_2, v_\alpha, w) = \mathrm{L}(u_1, u_2, u_3, v_\alpha, w)$. Zur Beantwortung der Frage reicht es somit aus, nur $\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3, v_\alpha, w)$ zu betrachten.

1. Fall: $\alpha \neq -3$.
Da u_1, u_2, u_3, v_α als vierten Eintrag eine 0 besitzen, wählen wir z.B. den Vektor $w = (0,0,0,1,0)^\intercal \in \mathbb{R}^5$, damit $u_1, u_2, u_3, v_\alpha, w$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^5$ sein kann. Nach 2.8.4 hat $\mathbb{R}^5$ die Dimension 5. Falls wir zeigen können, dass u_1, u_2, u_3, v_α, w linear unabhängig sind, so folgt nach Bemerkung 2.8.17, dass diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^5$ bilden und somit insbesondere $\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3, v_\alpha, w) = \mathbb{R}^5$ gilt.
Analog zu **(a)** machen wir den Ansatz $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 v_\alpha + \lambda_5 w = 0$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dies führt auf

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 0\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & + & (-5)\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 \quad (\mathrm{I}) \\ 1\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & (-1)\lambda_3 & + & 7\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 \quad (\mathrm{II}) \\ 4\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 0\lambda_3 & + & 0\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 \quad (\mathrm{III}) \\ 0\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 0\lambda_3 & + & 0\lambda_4 & + & 1\lambda_5 & = & 0 \quad (\mathrm{IV}) \\ (-2)\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & + & 1\lambda_3 & + & \alpha\lambda_4 & + & 0\lambda_5 & = & 0 \quad (\mathrm{V}) \end{array}$$

Aus (IV) folgt sofort $\lambda_5 = 0$ und wir erhalten das identische Gleichungssystem aus **(a)**. Somit folgt für $\alpha \neq -3$, dass auch $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \ldots, 4$ erfüllt ist und die Vektoren u_1, u_2, u_3, v_α, w sind linear unabhängig.

2. Fall: $\alpha = -3$.
Angenommen es gilt $\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3, v_{-3}, w) = \mathbb{R}^5$ für ein $w \in \mathbb{R}$. Da die Dimension von $\mathbb{R}^5$ gerade 5 ist (2.8.4), bilden nach Bemerkung 2.8.17 die Vektoren u_1, u_2, u_3, v_{-3}, w als Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^5$ auch eine Basis von $\mathbb{R}^5$. Damit sind sie linear unabhängig, womit auch insbesondere u_1, u_2, u_3, v_{-3} linear unabhängig sind. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu **(a)**. Somit kann für $\alpha = -3$ kein solches $w \in \mathbb{R}^5$ existieren.

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von W und $\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3) \cap W$.

Lösungshinweise hierzu: Wir bestimmen zunächst eine Basis für W. Der Untervektorraum W besteht aus all den Vektoren $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)^\intercal \in \mathbb{R}^5$, für die

$$w_1 + 2w_2 - w_5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w_5 = w_1 + 2w_2$$

gilt. Also lässt sich schreiben:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; w_1 + 2w_2 - w_5 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_1 + 2w_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Vektoren die man für die Wahl $w_1 = 1, w_2 = w_3 = w_4 = 0$ sowie für $w_2 = 1, w_1 = w_3 = w_4 = 0$, für $w_3 = 1, w_1 = w_2 = w_4 = 0$ und für $w_4 = 1, w_1 = w_2 = w_3 = 0$ erhält, sind

$$v^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v^{(4)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt für jede Wahl von $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_1 + 2w_2 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Also lässt sich jeder Vektor aus W als Linearkombination von $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ und $v^{(4)}$ darstellen. Also bilden $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ und $v^{(4)}$ ein Erzeugendensystem von W. Es bleibt die lineare Unabhängigkeit zu prüfen. Dazu betrachten wir das lineare Gleichungssystem $\lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} + \lambda_3 v^{(3)} + \lambda_4 v^{(4)} = 0$ für $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Zusammenfassen der Vektoren auf der linken Seite ergibt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die ersten 4 Zeilen der Gleichung ergeben $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Also bilden $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$ eine Basis von W und W hat damit Dimension 4.

Nun bleibt noch eine Basis für $\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3) \cap W$ zu bestimmen. Wir bezeichnen im Folgenden $U := \mathrm{L}(u_1, u_2, u_3)$ und $u^{(1)} := u_1$, $u^{(2)} := u_2$, $u^{(3)} := u_3$. Zuerst bestimmen wir $U \cap W$. Es gilt

$$U \cap W = \left\{ (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^\intercal \in U \,\middle|\, v_1 + 2v_2 - v_5 = 0 \right\} .$$

Jedes $v \in U$ lässt sich eindeutig als $v = \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} + \lambda_3 u^{(3)}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ schreiben, da $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ eine Basis von U bilden (die lineare Unabhängigkeit von $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ kann wie in **(a)** gezeigt werden). Das heißt es gilt

$$v = \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} + \lambda_3 u^{(3)} = \begin{pmatrix} 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 4\lambda_1 \\ 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} .$$

Daher ist $U \cap W$ gerade die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 4\lambda_1 \\ 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ und } (2\lambda_2 + 3\lambda_3) + 2(\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3) - (-2\lambda_1 + \lambda_3) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 4\lambda_1 \\ 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ und } 4\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \right\} ,$$

womit

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 4\lambda_1 \\ 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda_1 = -\frac{3}{2}\lambda_2 \right\}$$

$$= \left\{ \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Somit erzeugen $s^{(1)} := (2, 1/2, -6, 0, 3)^\intercal$, $s^{(2)} := (3, -1, 0, 0, 1)^\intercal$ den Unterraum $U \cap W$. Zudem sind $s^{(1)}$, $s^{(2)}$ linear unabhängig, da $s^{(1)} \neq \lambda s^{(2)}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ (folgt unmittelbar durch Betrachtung des dritten Eintrages $-6 \neq \lambda \cdot 0$). Also bilden $s^{(1)}$, $s^{(2)}$ eine Basis von $U \cap W$ und die Dimension von $U \cap W$ ist 2.

Aufgabe H 19. *Funktionenräume*

Die Menge $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ von stetigen Funktionen sei gegeben durch

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 4(\sin(x))^2, \qquad f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -(\cos(x))^2,$$
$$f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 2\cos(2x), \qquad f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \exp(x).$$

(a) Entscheiden Sie welche Teilmengen von F im Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ linear abhängig, bzw. linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von F aufgespannten Untervektorraums von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Lösungshinweise hierzu: Nach dem Additionstheorem zur Winkelverdopplung gilt

$$\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit $f_1 + 4f_2 + 2f_3 = 0$. Somit sind f_1, f_2 und f_3 linear abhängig. Damit sind dann natürlich auch f_1, f_2, f_3 und f_4 linear abhängig.

Da alle skalaren Faktoren der Linearkombination $f_1 + 4f_2 + 2f_3 = 0$ von Null verschieden sind, können wir diese Gleichung nach f_1, f_2 bzw. f_3 auflösen. Damit gilt $f_1 \in \mathrm{L}(f_2, f_3)$, $f_2 \in \mathrm{L}(f_1, f_3)$ bzw. $f_3 \in \mathrm{L}(f_1, f_2)$. Insbesondere ist somit

$$\mathrm{L}(f_1, f_2, f_4) = \mathrm{L}(f_1, f_3, f_4) = \mathrm{L}(f_2, f_3, f_4) = \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4).$$

Wir zeigen nun, dass f_1, f_2 und f_4 linear unabhängig sind. Sei dazu $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_4 f_4 = 0$. Durch Einsetzen von $x = 0$ und $x = \pi$ erhalten wir

$$0 = \lambda_1 \underbrace{f_1(0)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{f_2(0)}_{=-1} + \lambda_4 \underbrace{f_4(0)}_{=1} = -\lambda_2 + \lambda_4$$

sowie

$$0 = \lambda_1 \underbrace{f_1(\pi)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{f_2(\pi)}_{=-1} + \lambda_4 \underbrace{f_4(\pi)}_{=\mathrm{e}^\pi} = -\lambda_2 + \lambda_4 \mathrm{e}^\pi.$$

Zusammengefasst gilt also $\lambda_4 = \lambda_2 = \lambda_4 \mathrm{e}^\pi$ und somit $\lambda_4 = \lambda_2 = 0$. Einsetzen von $x = \frac{\pi}{2}$ liefert schließlich

$$0 = \lambda_1 \underbrace{f_1(\tfrac{\pi}{2})}_{=4} + \lambda_2 f_2(\tfrac{\pi}{2}) + \lambda_4 f_4(\tfrac{\pi}{2}) = 4\lambda_1.$$

Da wir nun wissen, dass f_1, f_2 und f_4 linear unabhängig sind, folgern wir

$$3 = \dim \mathrm{L}(f_1, f_2, f_4) = \dim \mathrm{L}(f_1, f_2, f_3, f_4).$$

Das beantwortet zunächst Teil **(b)**. Außerdem gilt damit auch

$$3 = \dim \mathrm{L}(f_1, f_2, f_4) = \dim \mathrm{L}(f_1, f_3, f_4) = \dim \mathrm{L}(f_2, f_3, f_4),$$

weswegen sowohl f_1, f_3 und f_4 als auch f_2, f_3 und f_4 linear unabhängig sind.

Die verbleibenden elf Teilmengen von F sind jeweils linear unabhängig, da sie in mindestens einer der drei linear unabhängigen Teilmengen $\{f_1, f_2, f_4\}$, $\{f_1, f_3, f_4\}$ und $\{f_2, f_3, f_4\}$ enthalten sind.

Aufgabe H 20. *Kugel und Ebenen*

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Kugel K mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius 1, sowie die Ebene

$$E_t\colon\ 2x_1+(2+t)x_2+2x_3=3 \qquad \text{für } t\in\mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E_t.

Lösungshinweise hierzu: Ein Normalenvektor von E_t ist gerade gegeben durch $(2,2+t,2)^\mathsf{T}$. Diesen müssen wir allerdings noch normieren! Seine Länge beträgt

$$l(t):=\sqrt{2^2+(2+t)^2+2^2}=\sqrt{t^2+4t+12}.$$

Damit lautet die Hesse-Normalform

$$E_t:\ \left\langle \frac{1}{l(t)}\begin{pmatrix}2\\2+t\\2\end{pmatrix}\middle|\, x\right\rangle=\frac{3}{l(t)}.$$

(b) Geben Sie eine Ebene F in Parameterdarstellung an, welche E_{-2} orthogonal schneidet.

Lösungshinweise hierzu: Wir erhalten $E_{-2}\colon\ 2x_1+2x_3=3$ mit dem zugehörigen Normalenvektor $n_{-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(2,0,2)^\mathsf{T}$. Der Winkel zwischen einer Ebene F mit Normalenvektor n_F und der Ebene E_{-2} ist nach Definition 2.9.3 gerade der Winkel zwischen deren Normalenvektoren. Damit wir einen orthogonalen Schnitt erhalten, muss nach Definition 2.9.1 die Bedingung $\langle n_F\,|\,n_{-2}\rangle=0$ erfüllt sein.
Ein passender Normalenvektor n_F ist z.B. $n_F=(0,1,0)^\mathsf{T}$. Dies ergibt $F\colon\ x_2=d$ als Koordinatengleichung für F mit $d\in\mathbb{R}$. Aufgrund der Schnittbedingung liegt mindestens ein Punkt von E_{-2} in F. Wir wählen z.B. $(3/2,0,0)$. Einsetzen in die Gleichung für F ergibt die Koordinatengleichung $F\colon\ x_2=0$.
Für die Parameterdarstellung von F parametrisieren wir $x_1=s$ und $x_3=t$. Somit folgt aus der Koordinatengleichung von F gerade, dass $x_2=0$ und somit

$$F:\ x=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad s,t\in\mathbb{R}.$$

(c) Bestimmen Sie diejenigen Werte von $t\in\mathbb{R}$, für welche sich E_t und K in keinem Punkt / genau einem Punkt / einem Schnittkreis schneiden.

Lösungshinweise hierzu: Nach Bemerkung 2.9.7 ist der Abstand von E_t zum Ursprung aus der Hesse-Normalform von E_t ablesbar. Er beträgt

$$d(t):=\frac{3}{l(t)}=\frac{3}{\sqrt{t^2+4t+12}},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Somit schneiden sich E_t und K in keinem Punkt / genau einem Punkt / einem Schnittkreis, wenn $d(t)>1$ / $d(t)=1$ / $d(t)<1$ gilt.
Da stets $t^2+4t+12=(2+t)^2+8>0$ für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt, folgt mit der Monotonie des Quadrierens (1.5.7)

$$d(t)>1 \quad\Leftrightarrow\quad 3>l(t) \quad\Leftrightarrow\quad 9>l(t)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0>(t+1)(t+3).$$

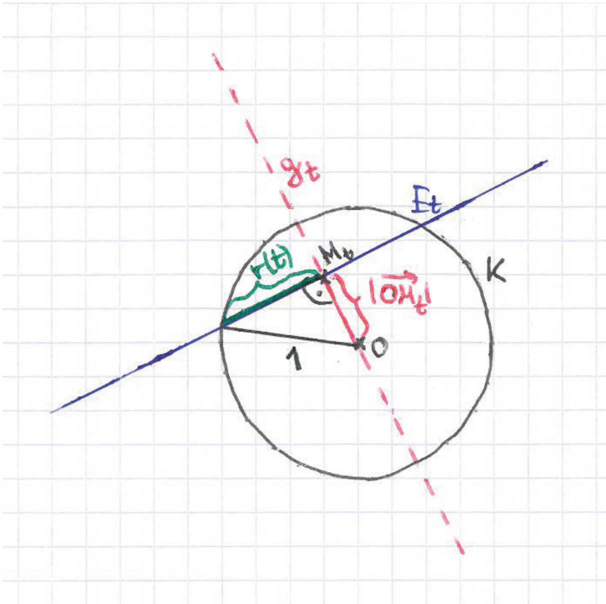
Damit gibt es genau dann keinen Schnittpunkt, wenn $t\in\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-3<x<-1\right\}$.
Andererseits erhalten wir erneut mit der Monotonie des Quadrierens (1.5.7)

$$d(t)\leqq 1 \quad\Leftrightarrow\quad 3\leqq l(t) \quad\Leftrightarrow\quad 9\leqq l(t)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0\leqq(t+1)(t+3).$$

Damit gibt es genau dann exakt einen Schnittpunkt, wenn $t = -3$ oder $t = -1$ gilt. Zudem zeigt diese Umformung die Existenz eines Schnittkreis genau dann, wenn $t \in \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \ \vee \ -1 < x\}$.

(d) Geben Sie die Radien der Schnittkreise aus **(c)** in Abhängigkeit von t an.

Lösungshinweise hierzu: Wir stellen eine Hilfsgerade g_t auf, welche durch den Ursprung $O = (0, 0, 0)$ geht und E_t senkrecht schneidet; den Schnittpunkt bezeichnen wir als M_t. In der folgenden Skizze ist K schwarz, E_t blau und g_t rot gestrichelt dargestellt.



Die Gerade g_t muss somit als Richtungsvektor ein Vielfaches des Normalenvektors von E_t sein. Als Stützpunkt können wir den Ursprung O selbst wählen. Dies ergibt

$$g_t\colon\ x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\2+t\\2\end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zur Berechnung von $\overrightarrow{OM_t}$ setzen wir einen beliebigen Geradenpunkt $x = (0,0,0)^\intercal + \lambda(2, 2+t, 2)^\intercal = (2\lambda, (2+t)\lambda, 2\lambda)^\intercal$ von g_t in die Koordinatenform von E_t ein:

$$2(2\lambda)+(2+t)\left((2+t)\lambda\right)+2(2\lambda) = 3 \quad\Leftrightarrow\quad \left(8+(2+t)^2\right)\lambda = 3 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \frac{3}{l(t)^2}.$$

Setzen wir diesen Wert für λ in g_t, so erhalten wir

$$\overrightarrow{OM_t} = \frac{3}{l(t)^2}(2, 2+t, 2)^\intercal \qquad \text{mit} \qquad |\overrightarrow{OM_t}| = \frac{3}{l(t)} = d(t).$$

Wir bezeichnen den Radius des Schnittkreises mit $r(t)$ (grün in der Skizze). Nach Pythagoras (s.h. Skizze) gilt

$$r(t)^2+|\overrightarrow{OM_t}|^2 = 1^2 \quad\Leftrightarrow\quad r(t) = \sqrt{1-|\overrightarrow{OM_t}|^2} = \sqrt{1-d(t)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{t^2+4t+12}}.$$

Dieser Ausdruck ist gerade wohldefiniert für $t \leqq -3 \ \vee -1 \leqq t$.
Für den Radius des Schnittkreises gilt für $t < -3 \ \vee -1 < t$ gerade $r(t) > 0$. Dies

entspricht nach **(c)** genau der Situation, in welcher sich E_t und K in einem Schnittkreis schneiden.
Zudem gilt für den Radius $r(-3) = r(-1) = 0$. Nach **(c)** ist dies die Situation, in welcher sich E_t und K in genau einem Punkt schneiden.
Für die Werte $t \in \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -3 < x < -1\right\}$ ist der Ausdruck für $r(t)$ nicht wohldefiniert. Dies korrespondiert mit der Situation aus **(c)**, in welcher sich E_t und K in keinem Punkt schneiden.

N. Borg,
S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

6. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 21. *Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen*

Eine Matrix A heißt *symmetrisch* wenn $A^\intercal = A$ und *schiefsymmetrisch* wenn $A^\intercal = -A$. Seien V_n und W_n die Mengen der symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen $n\times n$-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass V_n und W_n Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass sich jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eindeutig als Summe $A = S + T$ mit Matrizen $S \in V_n$ und $T \in W_n$ schreiben lässt.

(c) Bestimmen Sie je eine Basis von V_2 und W_2.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $0 = 0^\intercal$ gilt $0 \in V_n$. Für $A \in V_n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda A)^\intercal = \lambda A^\intercal = \lambda A$ und somit $\lambda A \in V_n$. Für $A, B \in V_n$ ist schließlich $(A + B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal = A + B$ und somit $A + B \in V_n$. Das zeigt, dass V_n ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

Analog erhält man die Untervektorraumeigenschaft von W_n: Wegen $-0 = 0^\intercal$ ist $0 \in W_n$. Für $A \in W_n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda A)^\intercal = \lambda A^\intercal = \lambda(-A) = -(\lambda A)$ und somit $\lambda A \in W_n$. Für $A, B \in W_n$ ist $(A + B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal = -A - B = -(A + B)$, also auch $A + B \in W_n$.

(b) Seien zunächst $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $S \in V_n$ und $T \in W_n$ mit $A = S + T$ gegeben. Dann erhalten wir aus $A = S + T$ und $A^\intercal = S^\intercal + T^\intercal = S - T$ die Gleichungen $S = \frac{1}{2}(A + A^\intercal)$ und $T = \frac{1}{2}(A - A^\intercal)$. Damit sind dann S und T eindeutig bestimmt.

Für beliebiges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ setzen wir dann $S := \frac{1}{2}(A + A^\intercal)$ und $T := \frac{1}{2}(A - A^\intercal)$. Mit dieser Wahl gilt nun offensichtlich $A = S + T$ und zudem

$$S^\intercal = \tfrac{1}{2}(A + A^\intercal)^\intercal = \tfrac{1}{2}(A^\intercal + A^{\intercal\intercal}) = \tfrac{1}{2}(A^\intercal + A) = S$$

und

$$T^\intercal = \tfrac{1}{2}(A - A^\intercal)^\intercal = \tfrac{1}{2}(A^\intercal - A^{\intercal\intercal}) = \tfrac{1}{2}(A^\intercal - A) = -T,$$

also $S \in V_n$ und $T \in W_n$.

(c) Es ist $V_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ und $W_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\}$. Wir können die Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von V_2 sowie die Basis

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

von W_2 daraus direkt ablesen.

Aufgabe H 22. *Spurfreie Matrizen*

Sei der Untervektorraum $V = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid a + d = 0 \right\}$ von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ gegeben sowie

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $AB - BA \in V$ für alle $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu: Seien $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ beliebig und $C = AB - BA$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Eine direkte Rechnung liefert dann

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & * \\ * & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

und

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & * \\ * & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} - b_{11}a_{11} - b_{12}a_{21} = a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} - b_{21}a_{12} - b_{22}a_{22} = a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21}. \end{aligned}$$

Da nun offenbar $c_{11} + c_{22} = 0$ gilt, ist $C = AB - BA \in V$.

(b) Zeigen Sie, dass $S\colon H, X, Y$ eine Basis von V ist. Bestimmen Sie ${}_S\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und ${}_S\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir halten fest, dass H, X und Y in der Tat zum Untervektorraum V gehören. Nun zeigen wir zunächst, dass S linear unabhängig ist. Sei dazu $\lambda_1 H + \lambda_2 X + \lambda_3 Y = 0$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$, also

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 & -2\mathrm{i}\lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2 - \mathrm{i}\lambda_3 \\ 2\mathrm{i}\lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2 - \mathrm{i}\lambda_3 & -\lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der linke obere Eintrag liefert nach Vereinfachen $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Die Summe des linken unteren und rechten oberen Eintrags liefern nach Vereinfachen $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$. Zusammen ergibt sich daraus $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Einsetzen in den linken unteren (oder den rechten oberen) Eintrag und anschließendes Vereinfachen ergibt schließlich $\lambda_1 = 0$.

Als nächstes weisen wir nach, dass S ein Erzeugendensystem von V ist:
Wegen $X + Y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $X - Y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist tatsächlich jedes $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in V$ durch

$$a(X+Y) - \mathrm{i}\tfrac{b+c}{2}(X - Y) + \mathrm{i}\tfrac{b-c}{2}H = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} \\ \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

als Linearkombination in H, X und Y darstellbar.

Als linear unabhängiges Erzeugendensystem ist S eine Basis von V.

Die Koordinatenvektoren ${}_S\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und ${}_S\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir schließlich direkt aus der obigen Gleichung. Es gilt

$${}_S\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad {}_S\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 23. *Matrizen potenzieren*

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen A^n und B^n.

Lösungshinweise hierzu:

- Es ist

$$A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Damit ist klar, dass $A^n = 0$ für $n > 4$, da $A^n = A^4 A^{n-4} = 0A^{n-4} = 0$ (wobei 0 hier als Nullmatrix zu verstehen ist).

- Wir stellen im Folgenden zwei Lösungsmethoden vor.
  - Wir berechnen die ersten Potenzen von B und stellen die Vermutung auf, dass gilt $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}$. Das beweisen wir nun mit vollständiger Induktion.
    * **IA** Es ist $B^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 1 \cdot 2^{1-1} & 0 \\ 0 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 7^1 \end{pmatrix}$.
    * **IS** $n \rightsquigarrow n+1$: Es ist

$$B^{n+1} = B^n B \overset{\text{IS}}{=} \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n + n \cdot 2^n & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 7^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & (n+1) \cdot 2^{(n+1)-1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 7^{n+1} \end{pmatrix}.$$

  - Wir beweisen das Resultat direkt. Wir machen die Zerlegung

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N}.$$

    Wir stellen fest, dass die beiden Matrizen D und N kommutieren, also dass gilt $DN = ND$. Damit können wir den Binomischen Satz verwenden, um B^n zu berechnen. Es ist

$$B^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k.$$

    Achtung! Wenn die beteiligten Matrizen nicht kommutieren, gilt die Binomische Formel im Allgemeinen nicht. Ein Beispiel, bei dem die binomischen Formeln versagen, wenn die Matrizen nicht kommutieren, haben Sie in der Präsenzaufgabe **P 22** selbst konstruiert!

Jetzt stellen wir noch fest, dass $N^k = 0$ für $k \geqq 2$, so dass alle Summanden aus der Summendarstellung von B^n für $k \geqq 2$ verschwinden. Da das Potenzieren einer Diagonalmatrix einfach durch das Potenzieren der Diagonaleinträge zu erreichen ist, haben wir damit

$$
\begin{aligned}
B^n = D^n + nD^{n-1}N &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 7^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe H 24. *Rechtsinverse Matrizen*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ soll gelten $AB = E_n$.

(a) Bestimmen Sie ℓ, m und n.

(b) Geben Sie eine solche Matrix B explizit an.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $b \in \mathbb{R}^2$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ von $x = Bb$ gelöst wird.

(d) Ist die Lösung des Gleichungssystems aus **(c)** für alle $b \in \mathbb{R}^2$ eindeutig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das Matrixprodukt AB ist nur dann definiert, wenn die Zeilenanzahl von B gleich der Spaltenanzahl von A ist. Also ist $\ell = 3$. Das Ergebnis des Produkts hat dann 2 Zeilen und m Spalten. Da sich als Resultat die Einheitsmatrix ergeben soll, also eine quadratische Matrix, muss $m = n = 2$ sein.

(b) Wir setzen allgemein die Matrix $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ an und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 2b_{11} & + & b_{21} & + & 3b_{31} & & & & & & & = & 1, \\ -b_{11} & & & + & 4b_{31} & & & & & & & = & 0, \\ & & & & & & 2b_{12} & + & b_{22} & + & 3b_{32} & = & 0, \\ & & & & & & -b_{12} & & & + & 4b_{32} & = & 1. \end{array}$$

Es ergibt sich aus der zweiten Gleichung, dass $b_{11} = 4b_{31}$ und nach Einsetzen in die erste Gleichung $b_{21} = 1 - 11b_{31}$. Weiterhin erhalten wir aus der vierten Gleichung, dass $b_{12} = 4b_{32} - 1$ und durch Einsetzen in die dritte Gleichung, dass $b_{22} = 2 - 11b_{32}$. Daher ist jede Matrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} 4s & 4t - 1 \\ 1 - 11s & 2 - 11t \\ s & t \end{pmatrix},$$

mit $s \in \mathbb{R}$, eine Lösung der Aufgabe.

(c) Es ist $A(Bb) = (AB)b = E_2 b = b$, also ist Bb Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

(d) Die Wahl von B ist nicht eindeutig (vgl. Teilaufgabe **(b)**), sondern hängt von zwei beliebig wählbaren Parametern ab. Ist $b \neq 0$, so ist Bb eine Lösung, die von mindestens einem frei wählbaren Parameter abhängt, also gibt es allein schon unendlich viele Lösungen der Form Bb.

Falls $b = 0$, so gibt es nur eine Lösung der Form Bb, nämlich 0. Trotzdem hat das LGS $Ax = 0$ noch weitere Lösungen, zum Beispiel

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist also für kein $b \in \mathbb{R}^2$ eindeutig lösbar.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 25. *Gauß–Algorithmus*

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & -4 & 3 \\ 7 & 11 & -1 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \\ -14 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^5$ der Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Gauß–Algorithmus.

Lösungshinweise hierzu: Wir stellen die erweiterte Koeffizientenmatrix auf:

$$\left[\, A \,\|\, b \,\right] = \left[\begin{array}{rrrrr||r} -2 & 3 & 2 & -4 & 3 & 15 \\ 7 & 11 & -1 & 8 & 5 & 24 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & -2 & -14 \\ -4 & -3 & 2 & -6 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Nun wenden wir den Gauß–Algoritmus an. Es liegt nahe, die dritte oder die vierte Zeile mit der ersten zu vertauschen. Wir wählen die dritte Zeile, weil ihre Einträge allesamt kleiner sind als die der vierten Zeile.

$$\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 7 & 11 & -1 & 8 & 5 & 24 \\ -2 & 3 & 2 & -4 & 3 & 15 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & -2 & -14 \\ -4 & -3 & 2 & -6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Wir ziehen nun Vielfache der ersten von den anderen Zeilen ab.

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 7\cdot Z_1 \\ Z_3 + 2\cdot Z_1 \\ Z_4 - Z_1 \\ Z_5 + 4\cdot Z_1 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & 7 & 2 & -2 & 5 & 25 \\ 0 & -5 & -2 & 2 & -3 & -19 \\ 0 & 5 & 2 & -2 & 3 & 19 \end{array}\right]$$

Wir sehen, dass die fünfte Zeile das Negative der vierten Zeile ist.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ Z_5 + Z_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & 7 & 2 & -2 & 5 & 25 \\ 0 & -5 & -2 & 2 & -3 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Um Brüche zu vermeiden, vertauschen wir die zweite und dritte Spalte. Dies führt auf

$$\left[\begin{array}{rrrrr||r} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & 7 & -2 & 5 & 25 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & -3 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Es ist zu beachten, dass die vorherige Spaltenvertauschung die Lösungsmenge verändert hat: Ist $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = b\}$ und $\mathcal{L}'$ die Lösungsmenge des zu der obigen erweiterten Koeffizientenmatrix dazugehörigen Gleichungssystems, so gilt $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\intercal \in \mathcal{L}'$ genau dann, wenn $(x_1, x_3, x_2, x_4, x_5)^\intercal \in \mathcal{L}$ erfüllt ist. Wir fahren mit dem Gauß–Algorithmus fort:

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + 2 \cdot Z_2 \\ Z_4 - 2 \cdot Z_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ (-1) \cdot Z_2 \\ \\ Z_4 - Z_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - 2 \cdot Z_3 \\ Z_2 - 3 \cdot Z_3 \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Aus dieser erweiterten Koeffizientenmatrix können wir nun direkt $\mathcal{L}'$ ablesen (vgl. Satz 3.7.6):

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem besitzt also die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 26. *Komplex–lineare Abbildungen*

Wir fassen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum auf und betrachten die reelle Basis $B : 1, \mathrm{i}$. Angenommen, $F \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist diejenige $\mathbb{R}$–lineare Abbildung, mit

(a) ${}_BF_B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, **(b)** ${}_BF_B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, **(c)** ${}_BF_B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ oder **(d)** ${}_BF_B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

In welchen der obigen Fälle ist F dann sogar $\mathbb{C}$–linear?

Lösungshinweise hierzu: Wir beginnen mit folgender Vorüberlegung. Dass F eine lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{C}$ ist, bedeutet per Definition, dass

$$F(z + w) = F(z) + (w) \qquad (*)$$

$$F(\alpha z) = \alpha \cdot F(z) \qquad (**)$$

für alle reellen Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt, siehe Definiton 3.8.1. Die Gleichung $(*)$ ist aber zugleich die Bedingung, dass sich F, aufgefasst als Abbildung des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}$, additiv verhält. Die Abbildung F ist also genau dann $\mathbb{C}$–linear, wenn sie als Abbildung komplexer Vektorräume homogen ist, also Gleichung $(**)$ auch für alle *komplexen* Skalare α erfüllt ist. Dies prüfen wir im folgenden nach.

(a) Besitzt F bezüglich der angegebenen Basis B die Matrixdarstellung $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, so gilt für jede komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(z) = F(x + \mathrm{i}y) &= x \cdot F(1) + y \cdot F(\mathrm{i}) \\ &= x \cdot (5 \cdot 1 + 0 \cdot \mathrm{i}) + y \cdot (0 \cdot 1 + 5 \cdot \mathrm{i}) \\ &= 5z. \end{aligned}$$

Wenn also $\alpha \in \mathbb{C}$ eine weitere komplexe Zahl ist, so gilt

$$F(\alpha z) = 5\alpha z = \alpha \cdot 5z = \alpha \cdot F(z),$$

weshalb F nach der Vorüberlegung $\mathbb{C}$–linear ist.

(b) Ist ${}_BF_B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$F(x + \mathrm{i}y) = x \cdot (2 + 0 \cdot \mathrm{i}) + y \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot \mathrm{i}) = 2(x - \mathrm{i})$$

und damit insbesondere

$$F(\mathrm{i}) = -2\mathrm{i} \neq 2\mathrm{i} = \mathrm{i} \cdot F(1).$$

Also ist F nicht $\mathbb{C}$–linear.

(c) Wenn $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Darstellung von F bezüglich B ist, folgt für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$F(x + \mathrm{i}y) = -3\mathrm{i}x + 3y = -3\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y).$$

Sind also $\alpha, z \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt, berechnen wir

$$F(\alpha \cdot z) = -3\mathrm{i}\alpha z = \alpha \cdot F(z).$$

Die Abbildung F ist demnach $\mathbb{C}$–linear.

(d) Auch die letzte Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ beschreibt eine $\mathbb{C}$–lineare Abbildung. Für $x, y \in \mathbb{R}$ haben wir nämlich

$$\begin{aligned} F(x + \mathrm{i}y) &= x \cdot (1 - 3\mathrm{i}) + y \cdot (3 + \mathrm{i}) \\ &= x \cdot (1 - 3\mathrm{i}) + (-\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i}y \cdot (3 + \mathrm{i}) \\ &= x \cdot (1 - 3\mathrm{i}) + \mathrm{i}y(-3\mathrm{i} + 1) \\ &= (1 - 3\mathrm{i})(x + \mathrm{i}y). \end{aligned}$$

Also ist für $\alpha, z \in \mathbb{C}$

$$F(\alpha z) = (1 - 3\mathrm{i}) \cdot \alpha z = \alpha \cdot (1 - 3\mathrm{i})z = \alpha F(z).$$

Aufgabe H 27. *Lineare Abbildungen*

Welche der nachfolgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$–linear?

(a) Die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \langle x \,|\, x \rangle$.

(b) Die Abbildung $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \langle v \,|\, x \rangle$, wobei $v \in \mathbb{R}^n$ ein fest gewählter Vektor ist.

(c) Die Abbildung $H\colon \operatorname{Pol}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\colon f(X) \mapsto f(0)$.

(d) Die Abbildung $K\colon \operatorname{Pol}(\mathbb{R}) \to \operatorname{Pol}(\mathbb{R})\colon f(X) \mapsto f(X^2)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Abbildung F ist nicht $\mathbb{R}$–linear, denn für den Vektor $x = (1, 0, 0, \ldots, 0)^{\intercal} \in \mathbb{R}^n$ und das Skalar 2 gilt beispielsweise

$$F(2x) = \langle 2x \,|\, 2x \rangle = 4 \neq 2 = 2 \cdot F(x).$$

(b) Diese Abbildung ist $\mathbb{R}$–linear. Aus den Eigenschaften des Skalarprodukts (Satz 2.6.1) folgt nämlich für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$F(x + y) = \langle v \,|\, x + y \rangle = \langle v \,|\, x \rangle + \langle v \,|\, y \rangle = F(x) + F(y)$$

sowie

$$F(\alpha x) = \langle v \,|\, \alpha x \rangle = \alpha \langle v \,|\, x \rangle = \alpha F(x).$$

(c) Auch H ist $\mathbb{R}$–linear. Um dies einzusehen, seien Polynome

$$f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \text{ und } g = b_m X^m + \ldots + b_1 X + b_0$$

sowie ein Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Es gilt dann $m \leqq n$ oder $n \leqq m$, aber für die nachfolgende Diskussion dürfen wir $m \leqq n$ annehmen, da wir andernfalls die Rollen von f und g vertauschen können (hier geht ein, dass $f + g = g + f$ gilt). Mit dieser Annahme ist dann

$$\begin{aligned}(f + g) = a_n X^n + \ldots + a_{m+1} X^{m+1} &+ \\ &(a_m + b_m) X^m + \ldots + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0).\end{aligned}$$

Also gilt

$$H(f + g) = (f + g)(0) = a_0 + b_0 = f(0) + g(0) = H(f) + H(g)$$

und die Abbildung H additiv. Wir haben außerdem

$$(\alpha f)(X) = \alpha a_n X^n + \ldots + \alpha a_1 X + \alpha a_0,$$

weshalb H auch homogen ist:

$$H(\alpha \cdot f) = (\alpha f)(0) = \alpha a_0 = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot H(f).$$

(d) Wieder handelt es sich bei K um eine lineare Abbildung. Wenn wir die Bezeichnungen aus dem vorherigen Aufgabenteil und die Annahme $m \leqq n$ übernehmen, ist auch der Beweis nahezu identisch: Die Gleichungskette

$$\begin{aligned}K(f + g) &= (f + g)(X^2) \\ &= a_n (X^2)^n + \ldots + a_{m+1} (X^2)^{m+1} + \\ &\quad (a_m + b_m)(X^2)^m + \ldots + (a_1 + b_1)(X^2) + (a_0 + b_0) \\ &= a_n (X^2)^n + \ldots + a_{m+1} (X^2)^{m+1} + a_m (X^2)^m + \ldots + a_1 (X^2) + a_0 + \\ &\quad b_m (X^2)^m + \ldots + b_1 (X^2) + b_0 \\ &= f(X^2) + g(X^2) \\ &= K(f) + K(g)\end{aligned}$$

zeigt die Additivität von K. Die Homogenität folgt aus

$$\begin{aligned}K(\alpha \cdot f) &= (\alpha f)(X^2) \\ &= \alpha a_n (X^2)^n + \ldots + \alpha a_1 X^2 + \alpha a_0 \\ &= \alpha \cdot f(X^2) \\ &= \alpha \cdot K(f).\end{aligned}$$

Aufgabe H 28. *Kern linearer Abbildungen*

Sei $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung mit

$$F((x_1,x_2,x_3,x_4)^\intercal) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_1 + 4x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis $B : v_1, v_2, \ldots, v_k$ des Kerns von F. Welche Dimension besitzt $\mathrm{Kern}\,(F)$?

(b) Finden Sie eine Basis $C : w_1, w_2, \ldots, w_\ell$ des Untervektorraums

$$W := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle v_1 \,|\, x\rangle = \langle v_2 \,|\, x\rangle = \ldots = \langle v_k \,|\, x\rangle = 0\}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k, w_1, w_2, \ldots, w_\ell$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ geben.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Ist $x \in \mathbb{R}^4$ ein Vektor und $B : e_1, e_2, e_3, e_4$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$, dann stimmt x mit seinem Koordinatenvektor bezüglich B überein, d. h. es gilt $x = {}_Bx$. Wenn also C die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet und $A = {}_CF_B$ die Matrixdarstellung bezüglich der Basen B und C, dann ist der Kern der Abbildung F gerade gegeben durch

$$\mathrm{Kern}\,(F) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot {}_Bx = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\},$$

vergleiche Bemerkung 3.8.16. Nun ist A die Matrix mit Spalten ${}_C(F(e_1))$, ${}_C(F(e_2))$, ${}_C(F(e_3))$ und ${}_C(F(e_4))$. Konkret:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Den Kern, also die Lösungen des Gleichungssystems $Ax = 0$, bestimmen wir mit dem Gauß–Algorithmus:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - Z_1 \\ Z_3 - 2\cdot Z_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 \leftrightarrow Z_3 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 2\cdot Z_2 \\ \\ Z_3 - 2\cdot Z_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 5\cdot Z_3 \\ Z_2 + Z_3 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ (-1)\cdot Z_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Lösungsraum $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ und somit auch der Kern der Abbildung F besitzt also die Basis $v := (0, -1, -1, 1)^\mathsf{T}$:

$$\operatorname{Kern}(F) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

insbesondere ist $\operatorname{Kern}(F)$ eindimensional.

(b) Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle v \,|\, x \rangle = 0\}.$$

Gilt etwa $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\mathsf{T}$, dann haben wir

$$\langle v \,|\, x \rangle = -x_2 - x_3 + x_4,$$

gesucht sind also Vektoren x mit $v^\mathsf{T} \cdot x = 0$. Dieses Gleichungssystem mittels Koeffizientenmatrix formuliert gibt:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wenn wir die erste und letzte Spalte tauschen, erhalten wir die Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

welche zu dem Gleichungssystem $A \cdot x$ mit $A = (1, -1, -1, 0)$ korrespondiert. Obige Koeffizientenmatrix besitzt aber Gestalt wie in Satz 3.7.6 verlangt, wir können die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ also direkt ablesen:

$$\mathcal{L} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für W ergibt sich also (nach Rückgängigmachen der Vertauschung) die Basis

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir wissen bereits, dass der $\mathbb{R}^4$ vierdimensional ist (siehe Beispiel 2.8.4). Wenn also v, w_1, w_2, w_3 linear unabhängig sind, so bilden sie bereits eine Basis des $\mathbb{R}^4$, vgl. Bemerkung 2.8.17. Wir zeigen also, dass $\lambda v + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$ nur gelten kann, wenn $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ist. Nun gilt mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } y := \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix},$$

die Gleichheit

$$\lambda v + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = Ay.$$

Die Vektoren v, w_1, w_2 und w_3 sind daher genau dann linear unabhängig, wenn $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$ nur aus dem Nullvektor besteht. Wir rechnen mittels Gauß–Algorithmus nach:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 \leftrightarrow Z_4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 + Z_1 \\ Z_3 + Z_1 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 \leftrightarrow Z_4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Z_3 \leftrightarrow Z_4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_4 - 2 \cdot Z_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(-1/3) \cdot Z_4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nach Satz 3.7.6 besitzt $\mathcal{L}$ Dimension 0 und besteht somit nur aus dem Nullvektor. Also sind v, w_1, w_2, w_3 linear unabhängig.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 29. *Rechenregeln für Determinanten*

(a) Gegeben seien die regulären Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det A$, $\det B$, $\det(A-B)$, $\det\left(\frac{1}{4}B\right)$, $\det\left(\left(B^{-1}\right)^3 A^\intercal\right)$.

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geqq 2$. Bestimmen Sie $\det(vv^\intercal)$.

(c) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schiefsymmetrisch (vgl. Blatt 6, H21), so gilt $\det A = 0$, falls n ungerade ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a)
- A ist eine obere Dreiecksmatrix, damit ist die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Also ist $\det A = 7 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot 2 = -56$.
- Durch Vertauschen der ersten mit der zweiten Spalte von B ergibt sich eine Dreiecksmatrix. Da das Vertauschen von Spalten nur das Vorzeichen der Determinanten verändert, haben wir also

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -1\cdot 1\cdot 2\cdot 2 = -4.$$

  Anmerkung: Damit ist insbesondere $\det B \neq 0$ und somit B^{-1} wohldefiniert.
- Da für $\mathbb{R}^{n\times n}$-Matrizen X und Y im Allgemeinen gilt $\det(X \pm Y) \neq \det X \pm \det Y$, können wir die Determinante nur bestimmen, indem wir die Matrix $A-B$ explizit berechnen. Es ist

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 10 & 18 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Da $A-B$ eine Nullzeile enthält, ist damit $\det(A-B) = 0$.
- Es ist $\det\left(\frac{1}{4}B\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \det B = \frac{1}{4^4} \cdot (-4) = -\frac{1}{4^3} = -\frac{1}{64}$.
- Wir benutzen den Determinantenmultiplikationssatz und die Tatsache, dass Transposition die Determinante nicht verändert. Damit ergibt sich

$$\det\left(\left(B^{-1}\right)^3 A^\intercal\right) = (\det B)^{-3} \cdot \det A = (-4)^{-3} \cdot (-56) = \frac{56}{64} = \frac{7}{8}.$$

(b) Schreiben wir $v = (v_1, \ldots, v_n)^\intercal$, so ist $vv^\intercal \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix mit den Spalten $v_1 \cdot v, \ldots, v_n \cdot v$. Damit ist der (Spalten-)Rang von $vv^\intercal$ gleich Eins. Wenn $n \geqq 2$ ist, bedeutet dies, dass $vv^\intercal$ nicht den vollen Rang hat und damit $\det(vv^\intercal) = 0$.

(c) A ist schiefsymmetrisch genau dann, wenn $A^\intercal = -A$. Es ist damit $\det A = \det A^\intercal = \det(-A) = (-1)^n \det A$. Wenn n ungerade ist, führt dies auf

$$\det A = -\det A \quad \Leftrightarrow \quad 2\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det A = 0.$$

Aufgabe H 30. *Basiswechsel und beschreibende Matrizen I*

Gegeben seien die folgenden beiden Basen B und C des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$B\colon b_1 := \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ b_2 := \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ b_3 := \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ b_4 := \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$
$$C\colon c_1 := \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ c_2 := \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ c_3 := \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ c_4 := \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}\colon A \mapsto A^{\intercal}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_B\mathrm{id}_C$ und ${}_C\mathrm{id}_B$.

(b) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_B\varphi_B$, ${}_C\varphi_C$, ${}_B\varphi_C$ und ${}_C\varphi_B$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir haben

$$c_1 = 1\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 0\cdot b_3 + 1\cdot b_4 \qquad \Rightarrow \qquad {}_Bc_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$c_2 = 1\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + 0\cdot b_3 + (-1)\cdot b_4 \qquad \Rightarrow \qquad {}_Bc_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$c_3 = 0\cdot b_1 + 1\cdot b_2 + (-1)\cdot b_3 + 0\cdot b_4 \qquad \Rightarrow \qquad {}_Bc_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$c_4 = 0\cdot b_1 + 1\cdot b_2 + 1\cdot b_3 + 0\cdot b_4 \qquad \Rightarrow \qquad {}_Bc_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Die Matrix ${}_B\mathrm{id}_C$ besteht dann aus den Spalten ${}_Bc_1, {}_Bc_2, {}_Bc_3, {}_Bc_4$. Dadurch ergibt sich

$${}_B\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Die Matrix ${}_C\mathrm{id}_B$ ist die Inverse der obigen Matrix, also ${}_C\mathrm{id}_B = \left({}_B\mathrm{id}_C\right)^{-1}$. Wir berechnen diese zum Beispiel so:

$$
\left[\begin{array}{cccc||cccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\overset{Z4-Z1,\,Z2+Z3}{\rightsquigarrow}
\left[\begin{array}{cccc||cccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\overset{Z1+\frac{1}{2}Z4,\,Z3-\frac{1}{2}Z2}{\rightsquigarrow}
\left[\begin{array}{cccc||cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\overset{Z2\leftrightarrow Z4}{\rightsquigarrow}
\left[\begin{array}{cccc||cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\overset{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot Z2,\,(-1)\cdot Z3,\,\frac{1}{2}\cdot Z4}{\rightsquigarrow}
\left[\begin{array}{cccc||cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0
\end{array}\right]
$$

Damit ist ${}_C\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(b)

- Es ist $\varphi(b_1) = b_1$, $\varphi(b_2) = b_3$, $\varphi(b_3) = b_2$ und $\varphi(b_4) = b_4$. Damit ergibt sich als Abbildungsmatrix

$$
{}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

- Es ist $\varphi(c_1) = c_1$, $\varphi(c_2) = c_2$, $\varphi(c_3) = -c_3$ und $\varphi(c_4) = c_4$. Damit ergibt sich als Abbildungsmatrix

$$
{}_C\varphi_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

- Es ist

$$
{}_B\varphi_C = {}_B\mathrm{id}_C\,{}_C\varphi_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

(Man hätte auch das Produkt ${}_B\varphi_B\,{}_B\mathrm{id}_C$ verwenden bzw. die Koordinaten ${}_B(\varphi(c_j))$ für $j = 1, 2, 3, 4$ direkt berechnen können.)

- Es ist
$$
{}_C\varphi_B = {}_C\varphi_C\, {}_C\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.
$$

Aufgabe H 31. *Basiswechsel und beschreibende Matrizen II*

Es sei E die Standardbasis für $\mathbb{R}^3$. Weiter seien $\varphi, \psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$${}_E\varphi_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } {}_E\psi_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie eine Basis B so, dass ${}_B\varphi_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Warum wäre Teilaufgabe **(a)** nicht lösbar, wenn wir φ durch ψ ersetzen würden?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$${}_E\varphi_E = {}_E\mathrm{id}_B\,{}_B\varphi_E \quad \Leftrightarrow \quad {}_E\varphi_E \left({}_B\varphi_E\right)^{-1} = {}_E\mathrm{id}_B.$$

Die Spalten der Matrix ${}_E\mathrm{id}_B$ bilden aber gerade die Basisvektoren von B (in den Koordinaten von E; insbesondere muss E nicht die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ sein). Es ist damit

$${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 1 & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Die gewünschte Basis ist damit $B\colon {}_Eb_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}_Eb_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, ${}_Eb_3 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Wenn eine solche Basis existieren würde, müsste wie oben gelten, dass ${}_E\psi_E = {}_E\mathrm{id}_B\,{}_B\psi_E$. Die beiden Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\psi_E$ sind regulär, also muss auch das Produkt regulär sein. Allerdings kann das nicht sein, da ${}_E\psi_E$ den Rang 2 besitzt (die letzte Spalte ist offensichtlich ein Vielfaches der ersten).

Aufgabe H 32. *Aufstellen von Abbildungsmatrizen*

Gegeben sei die Ebene $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. Weiter sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene $\mathcal{E}$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3$, für die die Matrix ${}_B\varphi_B$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie ${}_E\varphi_E$, wobei mit E die Standardbasis für $\mathbb{R}^3$ gemeint ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Dass eine Abbildungsmatrix diagonal ist, bedeutet, dass jeder Basisvektor durch die lineare Abbildung auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet wird. Daher schauen wir uns an, was bei einer Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung eigentlich passiert:

- Zunächst einmal stellen wir fest, dass unter Spiegelung an $\mathcal{E}$ jeder Punkt, der auf $\mathcal{E}$ liegt, auf sich selbst abgebildet wird. Das heißt, die Ortsvektoren dieser Punkte werden unter φ auf sich selbst (also ihr 1-Faches) abgebildet. Als zwei unserer drei Basisvektoren können wir dann zwei linear unabhängige Ortsvektoren von Punkten auf $\mathcal{E}$ wählen. Zum Beispiel $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Jeder Punkt P, der nicht auf $\mathcal{E}$ liegt, wird gespiegelt, indem man eine Senkrechte durch P auf $\mathcal{E}$ zeichnet und auf dieser Senkrechten auf der anderen Seite den Abstand zwischen P und E abträgt, dies ergibt dann den Spiegelpunkt P'. Falls die Senkrechte durch P die Ebene im Ursprung schneidet, bedeutet dies, dass $\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP}$. Das bedeutet, dass wir als dritten Basisvektor irgendeinen zu $\mathcal{E}$ senkrechten Vektor nehmen können, zum Beispiel $b_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, denn dann ist $\varphi(b_3) = -b_3$.

(b) Mit unserer Wahl der Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ ergibt sich dann

$$
{}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad {}_B\mathrm{id}_E = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad {}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
{}_E\varphi_E &= {}_E\mathrm{id}_{B\,B}\varphi_{B\,B}\mathrm{id}_E \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

N. Borg,
S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 33. *Berechnen von Determinanten*

Berechnen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} t^5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t^4 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ t^3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ t^2 & 2 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ t & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}.$$

Für welche t ist A_t invertierbar?

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen die Determinante, in dem wir zunächst nach der letzten Spalte und anschließend die Determinante der resultierenden Matrix nach der ersten Spalte entwickeln. Dies gibt

$$\begin{aligned}
\det(A_t) &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} t^5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ t^4 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ t^3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ t^2 & 2 & 12 & 0 & 2 \\ t & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= t^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - t^4 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\
&\quad t^3 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - t^2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\
&\quad t \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt (Lemma 3.12.2), dass die Determinante einer singulären Matrix Null ist. Daher verschwinden in obigem Ausdruck die Determinanten aller derjenigen Matrizen, in denen sowohl die Zeile $(1,6,0,1)$ als auch die Zeile $(2,12,0,2)$ auftritt, denn diese beiden Vektoren sind linear abhängig, weshalb eine Matrix mit diesen Zeilen nicht vollen (Zeilen–)Rang besitzen kann. Also erhalten wir

$$\det(A_t) = (-t^4) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - t^2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie ebenfalls aus der Vorlesung bekannt (Lemma 3.12.1), ändert sich die Determinante einer Matrix nicht, wenn man Vielfache einer Zeile zu einer anderen (nicht gleichen) Zeile addiert:

$$\det\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&1&-1&0\\2&12&0&2\\2&0&0&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&12&2&2\\0&0&2&1\end{pmatrix}$$
$$=\det\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&14&2\\0&0&2&1\end{pmatrix}$$

Dies ist eine Block–Diagonalmatrix. Es gilt daher (3.13.8):

$$\det\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&14&2\\0&0&2&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14&2\\2&1\end{pmatrix}=-10.$$

Analog berechnen wir

$$\det\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\1&6&0&1\\0&1&-1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&6&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&2&1\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}6&1&1\\1&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=5,$$

wobei wir im zweiten Schritt nach der ersten Spalte entwickelt und im letzten Schritt die Regel von Sarrus (3.11.5) verwendet haben. Also gilt

$$\det(A_t)=10t^4-5t^2=5t^2(2t^2-1).$$

Nun ist A_t genau dann invertierbar, wenn $\det(A_t)$ nicht verschwindet (siehe Lemma 3.12.2). Der Ausdruck $5t^2(2t^2-1)$ ist genau dann Null, wenn einer der Fakoren $5t^2$ oder $(2t^2-1)$ Null ist; äquivalent: wenn t^2 oder $(t^2-1/2)$ Null ist. Der erste Faktor verschwindet nur bei $t=0$, der zweite bei $t=\pm1/\sqrt{2}$. Also ist A_t für $t=0$, $t=1/\sqrt{2}$ und $t=-1/\sqrt{2}$ singulär und invertierbar sonst.

Aufgabe H 34. *Orthogonale Matrizen*

Es seien $A=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $B=\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{smallmatrix}\right)$ und $C\in\mathbb{R}^{2\times2}$ eine beliebige orthogonale Matrix. Welche der Matrizen

$$A+A^\intercal,\ B+B^\intercal,\ C^\intercal,\ \left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&B\end{smallmatrix}\right)\text{ und }\left(\begin{smallmatrix}A&C\\0&B\end{smallmatrix}\right)$$

sind dann ebenfalls orthogonal?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zur Erinnerung: Eine Matrix $D\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ist per Definition orthogonal, wenn $D^\intercal D=E_n$ gilt. Insbesondere muss eine orthogonale Matrix invertierbar sein. Die Matrix $A+A^\intercal$ ist demnach nicht orthogonal, denn

$$A+A^\intercal=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

ist nicht invertierbar.

(b) Die Matrix $B + B^\intercal$ ist orthogonal: Es gilt nämlich

$$B + B^\intercal = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

und $(E_2)^\intercal E_2 = E_2$.

(c) Auch $C^\intercal$ ist orthogonal. Wie zuvor bereits bemerkt, ist eine orthogonale Matrix invertierbar, also besitzt C sowohl eine Links– als auch eine Rechtsinverse (3.10.7). Dann ist aber jede Links– oder Rechtsinverse zugleich eine Inverse, und diese eindeutig bestimmt (Lemma 3.10.4). Nun gilt per Definition aber $C^\intercal C = E_2$, $C^\intercal$ ist also eine Linksinverse zu C. Nach unserer Überlegung ist $C^\intercal$ daher die eindeutig bestimmte Inverse von C und damit auch rechtsinvers. Das bedeutet, es gilt auch die Gleichung $CC^\intercal = E_2$. Dies ist aber genau die Bedingung an $C^\intercal$ orthogonal zu sein:

$$(C^\intercal)^\intercal C^\intercal = CC^\intercal = E_2.$$

(d) Auch die Matrix ist $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ ist orthogonal, denn

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^\intercal \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\intercal & 0 \\ 0 & B^\intercal \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\intercal A & 0 \\ 0 & B^\intercal B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = E_4.$$

(e) Die Matrix $D := \left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ ist nicht orthogonal. Dazu betrachten wir

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^\intercal \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\intercal & 0 \\ C^\intercal & B^\intercal \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & A^\intercal C \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Wäre D orthogonal, müsste die obige Matrix mit der Einheitsmatrix E_4 übereinstimmen und daher auch $A^\intercal C = 0$ gelten. Wenn wir $C = \left(\begin{smallmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{smallmatrix}\right)$ schreiben, dann würde also gelten

$$0 = A^\intercal C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ -c_1 & -d_1 \end{pmatrix},$$

d. h. C wäre die Nullmatrix. Das ist aber ausgeschlossen, da C ja orthogonal, mithin also invertierbar sein soll. Daher kann D keine orthogonale Matrix sein.

Aufgabe H 35. *Gram–Schmidtsches Orthonormierungsverfahren*

Wir betrachten den $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt sowie die Vektoren

$$b_1 := (-1, 1, 0, 0)^\intercal,\ b_2 := (3, 1, 1, 0)^\intercal \text{ und } b_3 := (1, -1, 9, 1)^\intercal.$$

(a) Sei V der Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$, welcher von den Vektoren b_1, b_2 und b_3 aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass V dreidimensional ist.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3 von V, die den Gleichungen $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_1, b_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$ genügt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Vektorraum V kann, da er von drei Vektoren aufgespannt wird, höchstens dreidimensional sein (vgl. Satz 2.8.13). Wenn b_1, b_2 und b_3 linear unabhängig sind, dann ist der Vektorraum (ebenfalls nach Satz 2.8.13) aber auch mindestens dreidimensional. Wir sehen also: V ist genau dann dreidimensional, wenn die Vektoren b_1, b_2 und b_3 linear unabhängig sind. Das ist in der Tat der Fall: Aus einer Gleichung

$$0 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für reelle Zahlen λ_1, λ_2 und λ_3 folgt nämlich zunächst $\lambda_3 = 0$, anschließend $\lambda_2 = 0$ und zuletzt dann $\lambda_1 = 0$.

(b) Wir verwenden das Orthonormierungsverfahren von Gram–Schmidt. Im ersten Schritt berechnen wir

$$f_1 := \frac{1}{|b_1|} b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_1 .$$

Dies ist ein normierter Vektor mi $\mathrm{L}\,(f_1) = \mathrm{L}\,(b_1)$. Gemäß dem Orthonormierungsverfahren ist dann

$$f_2 := \frac{1}{|f_2^*|} f_2^*, \text{ wobei } f_2^* := b_2 - \langle b_2 \mid f_1 \rangle \, f_1,$$

ein normierter Vektor, der $\mathrm{L}\,(f_1, f_2) = \mathrm{L}\,(b_1, b_2)$ erfüllt. Konkret haben wir

$$\begin{aligned} f_2^* &= b_2 - \left\langle b_2 \,\middle|\, \frac{1}{|b_1|} b_1 \right\rangle \cdot \frac{1}{|b_1|} b_1 \\ &= b_2 - \frac{\langle b_2 \mid b_1 \rangle}{|b_1|^2} b_1 \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie $f_2 = 1/3 \cdot (2, 2, 1, 0)^\intercal$. Für den nächsten Schritt des Orthonormierungsalgorithmus berechnen wir

$$\begin{aligned}
f_3^* &:= b_3 - \langle b_3 \,|\, f_1\rangle\, f_1 - \langle b_3 \,|\, f_2\rangle\, f_2 \\
&= b_3 - \frac{\langle b_3 \,|\, b_1\rangle}{2} b_1 - \frac{\langle b_3 \,|\, f_2^*\rangle}{9} f_2^* \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1\cdot 2+(-1)\cdot 2+9\cdot 1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit $f_3 = 1/|f_3^*| \cdot f_3^*$ gilt dann auch $\mathrm{L}\,(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}\,(b_1, b_2, b_3)$, sodass

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } f_3 = \frac{1}{\sqrt{73}} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis mit den gewünschten Eigenschaften ist.

Aufgabe H 36. *Determinante linearer Abbildungen*

Es sei V ein n–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum und $F\colon V \to V$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Sind B und C zwei Basen von V, dann gilt

$$\det({}_BF_B) = \det({}_CF_C).$$

Wir setzen nun $\det(F) := \det({}_BF_B)$, wobei B eine beliebige Basis von V ist. Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist diese Zahl von der konkreten Wahl der Basis unabhängig.

(b) Zeigen Sie nun ferner: Ist $G\colon V \to V$ eine weitere $\mathbb{R}$–lineare Abbildung, so gilt

$$\det(G \circ F) = \det(G) \cdot \det(F).$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass zwischen den Matrizen ${}_BF_B$ und ${}_CF_C$ die folgende Beziehung besteht (vgl. Satz 3.10.11)

$${}_BF_B = {}_B\mathrm{id}_C \cdot {}_CF_C \cdot {}_C\mathrm{id}_B$$

und ferner, dass ${}_B\mathrm{id}_C$ invertierbar ist, mit $({}_B\mathrm{id}_C)^{-1} = {}_C\mathrm{id}_B$. Also folgt aus der Multiplikativität der Determinante (3.12.3):

$$\begin{aligned}
\det({}_BF_B) &= \det({}_B\mathrm{id}_C \cdot {}_CF_C \cdot {}_C\mathrm{id}_B) \\
&= \det({}_B\mathrm{id}_C) \cdot \det({}_CF_C) \cdot \det({}_C\mathrm{id}_B) \\
&= \det({}_B\mathrm{id}_C) \cdot \det({}_CF_C) \cdot \det(({}_B\mathrm{id}_C)^{-1}) \\
&= \det({}_CF_C) \cdot \det({}_B\mathrm{id}_C) \cdot \frac{1}{\det({}_B\mathrm{id}_C)} \\
&= \det({}_CF_C).
\end{aligned}$$

(b) Wir wählen eine Basis B von V. Dann gilt per Definition

$$\det(G \circ F) = \det({}_B(G \circ F)_B)$$

Andererseits haben wir nach Satz 3.12.8

$${}_B(G \circ F)_B = {}_BG_B \cdot {}_BF_B$$

und somit

$$\det(G \circ F) = \det({}_BG_B \cdot {}_BF_B) = \det({}_BG_B) \cdot \det({}_BF_B) = \det(G) \cdot \det(F).$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 37. *Spiegelung*

Eine Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die Spiegelebene in Hesse-Normalform an.

(b) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto A^{-1}v$. Ist $\alpha \circ \alpha$ eine eigentliche / uneigentliche Isometrie?

(c) Seien $r_1 := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^\intercal$ und $r_2 := \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}^\intercal$. Für welche $j \in \{1, 2\}$ ist die Abbildung $\beta_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + r_j$ eine Ebenenspiegelung? Geben Sie in diesen Fällen die Spiegelebene in Hesse-Normalform an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zur Bestimmung der Spiegelebene betrachten wir die Fixpunktgleichung $Av = v$. Dies führt auf das homogene LGS $(A - E_3)v = 0$. Wir erhalten

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} (-3)\cdot Z_1 : \\ Z_2 + 2Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

womit der Lösungsraum

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

ist. Der Lösungsraum beschreibt somit die gesuchte Spiegelebene Ebene S, welche den Ursprung $(0, 0, 0)$ enthält und die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$ hat. Wir berechnen den Normalenvektor n mittels

$$n = \frac{1}{|\hat{n}|}\hat{n}, \quad \text{wobei} \quad \hat{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\hat{n}| = \sqrt{6}.$$

Somit ist $n = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$. Da $(0, 0, 0)$ ein Punkt der Ebene ist, erhalten wir nach Bemerkung 2.9.7.1 zwei mögliche Darstellung für die Hesse-Normalform:

$$S\colon\ \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad S\colon\ -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = 0.$$

(b) Die Matrix A ist uneigentlich orthogonal, da $A^\intercal A = E_3$ und

$$\det A = \frac{1}{27}(-4 - 4 - 4 + 1 - 8 - 8) = -1$$

nach der Regel von Sarrus (3.11.5) gilt. Insbesondere gilt $A^{-1} = A^\intercal = A$ weil A orthogonal und symmetrisch ist. Somit ist $(A^{-1})^2 = A^2$ und daher $\alpha \circ \alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto A^2 v$. Zudem ist mit Lemma 3.10.5

$$(A^2)^\intercal(A^2) = (AA)^\intercal(AA) = A^\intercal \underbrace{A^\intercal A}_{=E_3} A = A^\intercal A = E_3$$

und wegen 3.12.3.1 gilt $\det(A^2) = \det(A)^2 = 1$. Damit ist A^2 eine eigentlich orthogonale Matrix und $\alpha \circ \alpha$ ist eine eigentliche Isometrie und keine uneigentliche Isometrie.

(c) Damit β_j eine Spiegelung ist, muss der Translationsanteil r_j orthogonal zu der Spiegelebene aus **(a)** sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn r_j ein Vielfaches des Normalenvektors n aus **(a)** ist. Wir erkennen sofort, dass $r_1 \neq tn$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $r_2 = -2\sqrt{6}\,n$. Somit ist nur β_2 eine Ebenenspiegelung. Dies kann jeweils auch rechnerisch durch Lösen eines inhomogenen LGS gesehen werden.
Für r_1 führt die Fixpunktgleichung $\beta_1(v) = v \;\Leftrightarrow\; (A - E_3)v = -r_1$ auf das LGS

$$\left[\begin{array}{rrr||r} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \end{array}\right] \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{r} (-3)\cdot Z_1: \\ Z_2 + 2Z_1: \\ Z_3 - Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Die 2. Zeile liefert einen Widerspruch. Somit kann es keine Lösung geben und β_1 ist keine Spiegelung.
Für r_2 führt die Fixpunktgleichung $\beta_2(v) = v \;\Leftrightarrow\; (A - E_3)v = -r_2$ auf das LGS

$$\left[\begin{array}{rrr||r} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -4 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \end{array}\right] \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{r} (-3)\cdot Z_1: \\ Z_2 + 2Z_1: \\ Z_3 - Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Der Lösungsraum ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

und beschreibt damit eine Spiegelebene T, welche den Punkt $(-6, 0, 0)$ enthält und dieselben Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$ wie S aus Teilaufgabe **(a)** hat. Damit ist n aus **(a)** auch ein Normalenvektor von T und die Hesse-Normalform von T ist gegeben durch

$$T\colon\; -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = \sqrt{6}.$$

Der Translationsanteil r_2 führt somit erneut zu einer Spiegelung mit einer Spiegelebene T, welche als die um $\sqrt{6}$ Längeneinheiten verschobene Spiegelebene S identifiziert werden kann.

Aufgabe H 38. *Drehung*

Seien $b_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$, $b_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^\intercal$, $b_3 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^\intercal$ die Vektoren der Basis B. Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$ seien $c_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & t & -2 \end{pmatrix}^\intercal$, $c_2 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}^\intercal$, $c_3 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^\intercal$ die Vektoren der Basis C und E sei die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Sei $\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit $\gamma(b_j) = c_j$ für $j \in \{1,2,3\}$. Bestimmen Sie ${}_E\gamma_E$.

(b) Gibt es $t \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$ so, dass γ aus **(a)** eine Drehung ist? Bestimmen Sie für diese Fälle die Drehachse und den Cosinus des Drehwinkels von γ.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir verwenden Satz 3.10.11 mit ${}_E\gamma_E = {}_E\mathrm{id}_C\, {}_C\gamma_B\, {}_B\mathrm{id}_E$ und bestimmen im Folgenden ${}_E\mathrm{id}_C$, ${}_C\gamma_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$. Wir erhalten für $t \in \mathbb{R}$

$$ {}_E\mathrm{id}_C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ t & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}. $$

Weiter gilt nach Satz 3.10.11 die Identität ${}_B\mathrm{id}_E = ({}_E\mathrm{id}_B)^{-1}$, womit

$$ {}_B\mathrm{id}_E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. $$

Zudem erhalten wir ${}_C\gamma_B = E_3$ direkt aus der Abbildungseigenschaft $\gamma(b_j) = c_j$ für $j \in \{1,2,3\}$. Insgesamt erhalten wir somit für $t \in \mathbb{R}$ die gesuchte Matrix

$$ {}_E\gamma_E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ t & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & t & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} $$

(b) Um zu entscheiden, ob γ aus **(a)** eine Drehung beschreibt, untersuchen wir $A_t := {}_E\gamma_E$ für $t \in \mathbb{R}$. Mit der Regel von Sarrus (3.11.5) erhalten wir

$$ \det({}_E\gamma_E) = \frac{1}{27}(t + 8 + 8 - 4t + 4 + 4) = \frac{1}{9}(8 - t). $$

Wir sehen, dass $\det({}_E\gamma_E) = 1$ genau dann, wenn $t = -1$. Zudem ist A_{-1} orthogonal, da $A_{-1}^\intercal A_{-1} = E_3$. Somit ist A_{-1} eine eigentlich orthogonale Matrix und mit Satz 4.6.16 folgt, dass γ für $t = -1$ eine Drehung beschreibt.
Für den Cosinus des Drehwinkels α gilt nach 4.6.20 die Gleichung $\mathrm{Sp}\,(A_{-1}) = 2\cos(\alpha) + 1$. Weil $\mathrm{Sp}\,(A_{-1}) = \frac{1}{3}$, erhalten wir $\cos(\alpha) = -\frac{1}{3}$.
Die Drehachse finden wir nach Satz 4.6.16 durch Lösen der Fixpunktgleichung $A_{-1}v = v$, also des homogenen LGS $(A_{-1} - E_3)v = 0$. Dies führt auf

$$ \left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} (-\frac{3}{2}) \cdot Z_1 : \\ Z_2 - Z_1 : \\ Z_3 + Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] $$

$$ \rightsquigarrow \begin{array}{r} Z_1 - \frac{1}{2}Z_2 : \\ (-\frac{1}{2}) \cdot Z_2 : \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. $$

Die Drehachse ist also die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe H 39. *Koordinatentransformation I*

Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem in $\mathbb{R}^3$. Zudem seien

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad \alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1/2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -6 & -4 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist $\mathbb{F}$ ein affines / kartesisches Koordinatensystem? Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(b) Geben Sie die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ der Abbildung α bezüglich $\mathbb{F}$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Damit $\mathbb{F}$ per Definition 4.7.1 ein affines Koordinatensystem ist, müssen wir zeigen, dass $f_1 := (\,-3 \;\; 1 \;\; 2\,)^\intercal$, $f_2 := (\,1 \;\; -4 \;\; 2\,)^\intercal$, $f_3 := (\,-4 \;\; 1 \;\; 3\,)^\intercal$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Nach Satz 2.8.17 reicht es dafür zu zeigen, dass f_1, f_2 und f_3 linear unabhängig sind. Der Ansatz $f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 = 0$ mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ führt auf das homogene LGS

$$Fx = 0 \qquad \text{mit} \qquad F := (f_1,\, f_2,\, f_3), \quad x = (\,x_1 \;\; x_2 \;\; x_3\,)^\intercal.$$

Mit der Regel von Sarrus (3.11.5) folgt zudem

$$\det F = \det \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 36 + 2 - 8 - 32 + 6 - 3 = 1 \neq 0,$$

womit das LGS $Fx = 0$ nach 3.14.1.2 genau eine Lösung besitzt. Offensichtlich ist $x = 0$ eine Lösung und damit auch die einzige Lösung des LGS. Damit folgt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und f_1, f_2, f_3 sind linear unabhängig.

Die Vektoren f_1, f_2, f_3 bilden keine ONB, da sie nicht normiert sind und nicht paarweise aufeinander senkrecht stehen (z.B. ist $\langle f_1 \mid f_1 \rangle = (-3)^2 + 1^2 + 2^2 = 14 \neq 1$). Somit ist $\mathbb{F}$ nach Definition 4.7.1 kein kartesisches Koordinatensystem.

Mit $P := (\,-2 \;\; 1 \;\; 1\,)^\intercal$ sind die Koordinatentransformationen nach 4.7.6 gegeben durch

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Fv + P \qquad \text{und} \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto F^{-1}(v - P).$$

Damit folgt

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\; v \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad F^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & -11 & -15 \\ -1 & -1 & -1 \\ 10 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

führt auf

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\; v \mapsto \begin{pmatrix} -14 & -11 & -15 \\ -1 & -1 & -1 \\ 10 & 8 & 11 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Mit F, P aus **(a)** ist nach Satz 4.7.12 gerade ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto A'\,{}_{\mathbb{F}}v + t'$ mit $A' = F^{-1}AF$ und $t' = F^{-1}(AP - P + t)$, wobei A der lineare Anteil und t der Translationsanteil von α ist. Somit erhalten wir mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1/2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -6 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

für die Beschreibung ${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}$ der Abbildung α bezüglich $\mathbb{F}$

$${}_{\mathbb{F}}\alpha_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\; {}_{\mathbb{F}}v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & 3/2 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}v + \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 40. *Koordinatentransformation II*
Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ affine Koordinatensysteme. Sei ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ für das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$, sowie

$$\begin{array}{llll} {}_{\mathbb{E}}P = (\,1\ \ 0\ \ -1\,)^{\mathsf{T}}, & {}_{\mathbb{E}}Q = (\,-3\ \ 4\ \ -2\,)^{\mathsf{T}}, & {}_{\mathbb{E}}R = (\,-7\ \ 2\ \ -1\,)^{\mathsf{T}}, & {}_{\mathbb{E}}S = (\,-5\ \ 4\ \ -1\,)^{\mathsf{T}} \\ {}_{\mathbb{G}}P = (\,0\ \ 0\ \ 0\,)^{\mathsf{T}}, & {}_{\mathbb{G}}Q = (\,1\ \ 0\ \ 1\,)^{\mathsf{T}}, & {}_{\mathbb{G}}R = (\,2\ \ 0\ \ 0\,)^{\mathsf{T}}, & {}_{\mathbb{G}}S = (\,1\ \ -1\ \ 1\,)^{\mathsf{T}}. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(b) Zeigen Sie mittels der Geradentreue affiner Abbildungen, dass es kein affines Koordinatensystem $\mathbb{H}$ so gibt, dass ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}\left((\,-1\ \ 0\ \ 3\,)^{\mathsf{T}}\right) = (\,7\ \ -3\ \ 4\,)^{\mathsf{T}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}\left((\,0\ \ 1\ \ 2\,)^{\mathsf{T}}\right) = (\,7\ \ -2\ \ 2\,)^{\mathsf{T}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}\left((\,-3\ \ -2\ \ 5\,)^{\mathsf{T}}\right) = (\,7\ \ -4\ \ 5\,)^{\mathsf{T}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach 4.7.6 ergibt sich ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Fv + s$ aus ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ gemäß

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

womit schließlich

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Um $\mathbb{G}$ zu erhalten, werden wir ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ aus den angegebenen Koordinaten der Punkte P, Q, R und S bestimmen. Dazu machen wir den Ansatz

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = Gv + t \qquad \text{mit} \quad G \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ t \in \mathbb{R}^3.$$

Die Bedingung ${}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}P)$ liefert sofort $t = {}_{\mathbb{E}}P = (\,1\ \ 0\ \ -1\,)^{\mathsf{T}}$. Somit bleibt noch G zu bestimmen. Bezeichnen wir mit g_1, g_2, g_3 die unbekannten Spalten von G so, dass $G = (\,g_1\ \ g_2\ \ g_3\,)$, dann kann die Bedingung ${}_{\mathbb{E}}R = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}R)$ geschrieben werden als

$${}_{\mathbb{E}}R = (\,g_1\ \ g_2\ \ g_3\,)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \iff {}_{\mathbb{E}}R = 2g_1 + t \iff g_1 = \frac{1}{2}({}_{\mathbb{E}}R - t) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist g_1 bestimmt. Die Bedingung ${}_{\mathbb{E}}Q = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}Q)$ liefert weiter

$${}_{\mathbb{E}}Q = (\,g_1\ \ g_2\ \ g_3\,)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \iff {}_{\mathbb{E}}Q = g_1 + g_3 + t \iff g_3 = {}_{\mathbb{E}}Q - g_1 - t = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

womit die dritte Spalte g_3 von G bestimmt ist. Weiter ergibt ${}_{\mathbb{E}}S = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}S)$ schließlich

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}S = (\,g_1\ \ g_2\ \ g_3\,)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t &\iff {}_{\mathbb{E}}S = g_1 - g_2 + g_3 + t \\ &\iff g_2 = -{}_{\mathbb{E}}S + g_1 + g_3 + t = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Spalte g_2 von G bestimmt und wir erhalten

$$
{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{womit} \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)
$$

sich aus 4.7.6 ergibt.
Als letzten Schritt bestimmen wir ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$. Nach Satz 4.7.8 bzw. 4.7.9.2 gilt

$$
{}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}\left({}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v)\right) = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(Fv + s) = G^{-1}Fv + G^{-1}(s-t).
$$

Nach Bestimmung von

$$
G^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -1 & -4 & -12 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}
$$

können wir $G^{-1}F$ und $G^{-1}(s-t)$ berechnen. Dies führt auf

$$
{}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \; v \mapsto \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 11 & -4 & 10 \\ -11 & 4 & -20 \end{pmatrix} v + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}.
$$

(b) Angenommen, es gäbe ein affines Koordinatensystem $\mathbb{H}$ so, dass ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^\intercal\right) = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}^\intercal$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^\intercal\right) = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}\left(\begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}^\intercal\right) = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 5 \end{pmatrix}^\intercal$. Wir beobachten, dass $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^\intercal$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$, $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}^\intercal$ auf einer Geraden liegen, denn die Gerade g durch $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^\intercal$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$ ist gegeben durch

$$
g = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und es gilt} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

Nach 4.7.6 ist ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}$ für das affine Koordinatensystem $\mathbb{H}$ eine affine Abbildung. Nach 4.6.3 bilden die Bilder der Punkte einer Geraden unter einer affinen Abbildung entweder wieder eine Gerade, oder fallen alle zusammen. Nun fallen die Bildpunkte $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}^\intercal$, $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$, $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 5 \end{pmatrix}^\intercal$ offensichtlich nicht zusammen. Zudem bilden diese Punkte auch keine Gerade, denn die Gerade h durch $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}^\intercal$, $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$ wird beschrieben durch $h = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}^\intercal + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^\intercal$ und es ist für alle $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.
$$

Damit ergibt sich ein Widerspruch zu 4.6.3 und es kann kein solches affines Koordinatensystem $\mathbb{H}$ geben.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 41. *Eigenwerte und Vielfachheiten*

Für $s \in \mathbb{R}$ seien

$$A := \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_s := \begin{pmatrix} 0 & s-2 \\ 4 & 2s-6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_s := \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C_s \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und von C_s in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie die algebraische Vielfachheit aller Eigenwerte von D_s in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ an.

(c) Bestimmen Sie für $s = 1$ die Eigenräume aller Eigenwerte von D_1 und geben Sie jeweils die geometrische Vielfachheit an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(4-\lambda) + 18 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 = (-2-\lambda)(1-\lambda). \end{aligned}$$

Damit sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$ die Eigenwerte von A.
Für $s \in \mathbb{R}$ ist das charakteristische Polynom von C_s

$$\begin{aligned} \chi_{C_s}(\lambda) = \det(C_s - \lambda E_2) &= \begin{vmatrix} -\lambda & s-2 \\ 4 & 2s-6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2s-6-\lambda) - 4(s-2) \\ &= \lambda^2 + (6-2s)\lambda + 8 - 4s. \end{aligned}$$

Dabei gilt $\chi_{C_s}(\lambda) = 0$ genau dann, wenn λ einen der folgenden Werte annimmt:

$$\frac{-(6-2s) \pm \sqrt{(6-2s)^2 - 4(8-4s)}}{2} = s - 3 \pm \sqrt{(s-1)^2} = s - 3 \pm (s-1).$$

Damit sind $\lambda_3 = 2s - 4$ und $\lambda_4 = -2 = \lambda_1$ für $s \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von C_s.

(b) Die Matrix D_s ist eine Block-Dreiecksmatrix. Wir berechnen das charakteristische Polynom nach 3.13.8 und erhalten für $s \in \mathbb{R}$

$$\chi_{D_s}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A - \lambda E_2 & B \\ 0 & C_s - \lambda E_2 \end{pmatrix} = \det(A - \lambda E_2)\det(C_s - \lambda E_2) = \chi_A(\lambda)\chi_{C_s}(\lambda).$$

Damit ist λ ein Eigenwert von D_s genau dann, wenn λ ein Eigenwert von A oder von C_s ist. Also sind λ_1, λ_2, λ_3 und λ_4 aus **(a)** die Eigenwerte von D_s.
Zur Bestimmung der algebraischen Vielfachheit der Eigenwerte von D_s genügt es zu untersuchen, für welche $s \in \mathbb{R}$ der Eigenwert λ_3 die Werte -2 oder 1 annehmen kann. Es gilt $\lambda_3 = -2 \iff s = 1$ und $\lambda_3 = 1 \iff s = \frac{5}{2}$.
Insgesamt folgt damit für die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von D_s:

(i) Für $s = 1$ ist $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = -2$. Somit gilt $e_{-2} = 3$ und $e_{\lambda_2} = 1$.

(ii) Für $s = \frac{5}{2}$ ist $\lambda_1 = \lambda_4 = -2$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Somit gilt $e_{-2} = 2$ und $e_1 = 2$.

(iii) Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{5}{2}\}$ ist $\lambda_1 = \lambda_4 = -2$. Somit gilt $e_{-2} = 2$ und $e_{\lambda_2} = e_{\lambda_3} = 1$.

(c) In **(b)** haben wir für $s = 1$ gesehen, dass D_1 die Eigenwerte -2 und 1 mit $e_{-2} = 3$ und $e_1 = 1$ hat. Wir bestimmen zunächst den Eigenraum $V(1)$ zum Eigenwert 1 durch Lösen des LGS $(D_1 - 1 \cdot E_4)v = 0$:

$$\left[\begin{array}{rrrr||r} -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} (-\frac{1}{6}) \cdot Z_1 : \\ Z_2 + Z_1 : \\ (-1) \cdot Z_3 : \\ Z_4 + 4Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} Z_1 - \frac{1}{6} Z_2 : \\ (-1) \cdot Z_2 : \\ Z_3 + Z_2 : \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ Z_4 + 9Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vertauschung der Spalten 2 und 3 und anschließend der Spalten 3 und 4 liefert weiter

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_3 & v_4 & v_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc||c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow V(1) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die geometrische Vielfachheit gilt $d_1 = \dim V(1) = 1$ (dies sieht man auch direkt ohne Berechnung des Eigenraumes mit 5.3.4, wonach $1 \leqq d_1 \leqq e_1 = 1$). Um den Eigenraum $V(-2)$ zum Eigenwert -2 zu erhalten, lösen wir $(D_1 - (-2) \cdot E_4)v = 0$:

$$\left[\begin{array}{rrrr||r} -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} (-\frac{1}{3}) \cdot Z_1 : \\ Z_2 + 2Z_1 : \\ \frac{1}{2} \cdot Z_3 : \\ Z_4 - 2Z_3 : \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{r} Z_1 + \frac{1}{3} Z_3 : \\ Z_2 \leftrightarrow Z_3 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\text{Spalten } Z_2 \leftrightarrow Z_3}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{rrrr||r} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

wobei im letzten Schritt die Spalten 2 und 3 vertauscht wurden. Wir erhalten somit

$$V(-2) = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{C} \right\},$$

womit für die geometrische Vielfachheit $d_{-2} = \dim V(-2) = 2$ gilt.

Aufgabe H 42. *Eigenwerte und orthogonale Matrizen*

(a) Seien v und w reelle Eigenvektoren von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu den reellen Eigenwerten λ bzw. μ. Drücken Sie $\langle Av \,|\, Aw\rangle$ in Abhängigkeit von $\langle v \,|\, w\rangle$ aus.

(b) Zeigen Sie: Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

(c) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ uneigentlich orthogonal, so sind 1, -1 Eigenwerte von A.

(d) Geben Sie eine eigentlich orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, die keine reellen Eigenwerte hat.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Weil v und w Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ bzw. μ sind, gelten $Av = \lambda v$ und $Aw = \mu w$. Mit den Eigenschaften des Skalarprodukts folgt somit

$$\langle Av \,|\, Aw\rangle = \langle \lambda v \,|\, \mu w\rangle = \lambda\mu \langle v \,|\, w\rangle .$$

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A. Dann gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, mit $Av = \lambda v$. Da A eine orthogonale Matrix ist, erhält A das Skalarprodukt (Satz 4.5.7), womit $\langle v \,|\, v\rangle = \langle Av \,|\, Av\rangle$. Insgesamt folgt daher mit Aufgabenteil **(a)**

$$\langle v \,|\, v\rangle = \langle Av \,|\, Av\rangle = \lambda^2 \cdot \langle v \,|\, v\rangle .$$

Da $\langle u \,|\, u\rangle = 0$ nur für $u = 0$ gilt, ist $\langle v \,|\, v\rangle > 0$. Wir dürfen in obiger Gleichungskette also durch $\langle v \,|\, v\rangle$ teilen und erhalten $1 = \lambda^2$ oder äquivalent hierzu $\lambda = \pm 1$.

(c) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein nicht-reeller Eigenwert von A, so ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A, vgl. Lemma 5.1.9. Würde A also nur nicht–reelle Eigenwerte besitzen, dann gäbe es $z, w \in \mathbb{C}$ derart, dass z und w nicht-reell sind und so, dass z, $\overline{z}$, w und $\overline{w}$ die (nicht notwendigerweise verschiedenen) Eigenwerte von A sind. Dann gälte nach Bemerkung 5.2.3 einerseits

$$\det A = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 \geqq 0$$

und andererseits wäre $\det A = -1$, da wir A als uneigentlich angenommen haben. Da beide Gleichungen nicht zugleich erfüllt sein können, besizt A also mindestens einen reellen Eigenwert. Damit ist das charakteristische Polynom χ_A von A von der Form

$$\chi_A(\lambda) = (z_1 - \lambda)(z_2 - \lambda)(z_3 - \lambda)(z_4 - \lambda),$$

wobei z_1 und z_2 reell sind, aber nicht notwendigerweise voneinander verschieden und z_3 und z_4 beliebig sind. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(i) z_3 ist reell. Dann ist auch z_4 reell, da andernfalls $\overline{z_4}$ ebenfalls als Eigenwert auftreten müsste. Nach dem vorherigen Aufgabenteil können nur 1 und -1 als reelle Eigenwerte von A auftreten. Gälte nun $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$, dann wäre also

$$-1 = \det A = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = (\pm 1)^4 = 1,$$

was unmöglich ist. Deshalb muss $z_i \neq z_j$ für zwei verschiedene Zahlen $i, j = 1, 2, 3, 4$ sein, und das bedeutet, dass entweder $z_i = 1$ und $z_j = -1$ oder $z_i = -1$ und $z_j = 1$ ist. In diesem Fall sind also sowohl 1 als auch -1 Eigenwerte von A.

(ii) z_3 ist nicht reell. Dann ist auch $\overline{z_3}$ ein (nicht–reeller) Eigenwert von A, und weil wir annehmen, dass z_1 und z_2 reell sind, muss $z_4 = \overline{z_3}$ gelten. Wäre nun $z_1 = z_2$, dann gälte

$$-1 = \det A = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = (\pm 1)^2 \cdot |z_3|^2 = |z_3|^2 \geqq 0,$$

was unmöglich ist. Daher ist $z_1 \neq z_2$ und somit entweder $z_1 = 1$ und $z_2 = -1$ oder $z_1 = -1$ und $z_2 = 1$. Also sind auch in diesem Fall sowohl 1 als auch -1 Eigenwerte von A.

Alternativer Lösungsweg: Nach Satz 5.1.4 ist 1 ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\det(A - E_4) = 0$. Da A uneigentlich orthogonal ist, gilt $A^\intercal A = E_4$ und $\det A = -1$. Wir erhalten mit den Rechenregeln für die Determinante

$$\begin{aligned}\det(A - E_4) &= \det(A - A^\intercal A) = \det\Big((E_4 - A^\intercal)A\Big) = \det\Big(-(A^\intercal - E_4^\intercal)\Big)\det(A) \\ &= -\det\Big(-(A - E_4)^\intercal\Big) \overset{n=4}{=} -\det(A - E_4)\end{aligned}$$

und somit schließlich $\det(A - E_4) = 0$. Um zu sehen, dass auch -1 ein Eigenwert ist, kann analog $\det(A + E_4) = \det(A - (-1)E_4) = 0$ gezeigt zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A + E_4) &= \det(A + A^\intercal A) = \det\Big((E_4 + A^\intercal)A\Big) = \det\Big((A + E_4)^\intercal\Big)\det(A) \\ &= -\det(A + E_4),\end{aligned}$$

womit $\det(A + E_4) = 0$.

(d) Die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal, da ihre Spalten normiert und paarweise orthogonal sind, also eine Orthonormalbasis bilden. Das charakteristische Polynom $\chi_B(\lambda) := \det(B - \lambda E_4)$ von B ist gegeben durch

$$\chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + \mathrm{i})^2 \cdot (\lambda - \mathrm{i})^2.$$

B besitzt also nur die Eigenwerte i und $-\mathrm{i}$, und es gilt $\det(B) = \chi(0) = 1$.

Aufgabe H 43. *Schiefsymmetrische Matrizen*
Für $t \in \mathbb{R}$ sei $A_t \in \mathbb{R}^{4\times4}$ die schiefsymmetrische Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & -t & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie zu jedem $t \in \mathbb{R}$ das charakteristische Polynom, sämtliche Eigenwerte von A_t sowie deren geometrische und algebraische Vielfachheit.

(b) Für welche t gibt es eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times4}$, die zu A_t konjugiert ist?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das charakteristische Polynom $\chi_{A_t}(\lambda) := \det(A_t - \lambda E_4)$ von A_t ist

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda & t \\ 1 & 0 & -t & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & t \\ 1 & -t & -\lambda \end{pmatrix},$$

wobei im letzten Schritt die Determinante nach der zweiten Spalte entwickelt wurde. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & t \\ 1 & -t & -\lambda \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda t & -1-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda - t & t-\lambda \\ 1 & -t & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda t)(t-\lambda) - (\lambda + t)(1+\lambda^2) \\ &= -\lambda^3 - (t^2+2)\lambda \\ &= (-\lambda)\cdot(\lambda^2 + (t^2+2)) \\ &= (-\lambda)\cdot(\lambda + \mathrm{i}\sqrt{t^2+2})\cdot(\lambda - \mathrm{i}\sqrt{t^2+2}). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \lambda^2\cdot(\lambda + \mathrm{i}\sqrt{t^2+2})\cdot(\lambda - \mathrm{i}\sqrt{t^2+2})$$

und die Eigenwerte von A_t lauten

$$0,\ -\mathrm{i}\sqrt{t^2+2} \text{ und } \mathrm{i}\sqrt{t^2+2}.$$

Der Eigenwert 0 tritt mit algebraischer Vielfachheit 2 auf, die beiden anderen Eigenwerte jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Weil die geometrische Vielfachheit nach Lemma 5.3.4 durch die algebraische Vielfachheit nach oben beschränkt ist, wissen wir zudem, dass die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte $-\mathrm{i}\sqrt{t^2+2}$ und $\mathrm{i}\sqrt{t^2+2}$ ebenfalls 1 beträgt. Es verbleibt die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 0 zu bestimmen, also die Dimension des Eigenraums $V(0) = \{z \in \mathbb{C}^4 \mid A_t z = 0\}$. Aufgrund der Dimensionsformel (3.8.17) gilt nun $\dim V(0) = 4 - \dim \operatorname{Rg} A_t$, es genügt daher den Rang der Matrix A_t zu bestimmen. Nun gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & -t & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3+Z_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & t \\ 1 & 0 & -t & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3+t\cdot Z_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -t & 0 \end{pmatrix}.$$

Elementare Zeilenumformungen verändern den Rang einer Matrix nicht (Lemma 3.9.7). Da in der Matrix auf der rechten Seite die erste und letzte Zeile linear unabhängig sind, besitzt A_t also Rang 2 und es gilt $\dim V(0) = 4 - \operatorname{Rg} A_t = 2$, d.h. der Eigenwert 0 tritt mit geometrischer Vielfachheit 2 auf.

(b) Es gibt keine reelle symmetrische (4×4)–Matrix B, die zu irgendeinem A_t konjugiert ist: Aus der Vorlesung (Satz 5.4.2) wissen wir nämlich, dass B orthogonal diagonalisierbar ist, es gibt also eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$T^{-1}BT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix},$$

wobei λ_1, λ_2, λ_3 und λ_4 die Eigenwerte von B sind. Weil T und B reelle Matrizen sind, sind also insbesondere auch die Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 und λ_4 reell. Wäre B nun zu A_t konjugiert für ein $t \in \mathbb{R}$, so müssten B und A_t bis auf Permutation dieselben Eigenwerte besitzen (Satz 5.2.2). Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist aber $\mathrm{i}\sqrt{t^2+2} \neq 0$ ein Eigenwert von A_t und dies ist keine reelle Zahl, weshalb $\mathrm{i}\sqrt{t^2+2}$ kein Eigenwert von B und B nicht zu A_t konjugiert sein kann.

Aufgabe H 44. *Symmetrische Matrizen*
Für jede reelle Zahl t definieren wir die reelle symmetrische Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & t & 1 \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Geben Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, für welche $T^{-1}A_tT$ Diagonalgestalt besitzt.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A_t zu A_0 konjugiert?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom $\chi_{A_t}(\lambda) = \det(A_t - \lambda E_3)$ von A_t. Es gilt nach Vertauschen der zweiten und dritten Zeile sowie anschließendem Vertauschen der ersten und zweiten Zeile

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} t-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & t-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & t-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & t-\lambda \\ t-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & t-\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Elementare Zeilenumformungen (genauer: addieren des $(t-\lambda)$–fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile) überführen die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & t-\lambda \\ t-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & t-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

in die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & t-\lambda \\ 0 & t-\lambda & -1+(t-\lambda)^2 \\ 0 & t-\lambda & 1 \end{pmatrix};$$

subtrahiert man in obiger Matrix die zweite Zeile von der dritten, erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & t-\lambda \\ 0 & t-\lambda & -1+(t-\lambda)^2 \\ 0 & 0 & 2-(t-\lambda)^2 \end{pmatrix}.$$

Da elementare Zeilenumformungen den Wert der Determinante einer Matrix nicht verändern, gilt also

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & t-\lambda \\ 0 & t-\lambda & -1+(t-\lambda)^2 \\ 0 & 0 & 2-(t-\lambda)^2 \end{pmatrix} = -(t-\lambda)(2-(t-\lambda)^2).$$

Die beiden Nullstellen des Polynoms $2+(t-\lambda)^2$ sind $t \pm \sqrt{2}$, wie man z.B. mittels Aufgabe H 15 sieht. Es gilt demnach

$$\chi_{A_t}(\lambda) = (t-\lambda)(t+\sqrt{2}-\lambda)(t-\sqrt{2}-\lambda)$$

und A_t besitzt die drei paarweise verschiedenen Eigenwerte

$$t,\ t+\sqrt{2} \text{ und } t-\sqrt{2},$$

die jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1 auftreten. Da die geometrische Vielfachheit durch die algebraische Vielfachheit nach oben beschränkt ist (Lemma 5.3.4), besitzen die drei Eigenwerte aber auch jeweils geometrische Vielfachheit 1. Wir bestimmen nun Eigenvektoren zu den Eigenwerten von A_t. Die Eigenvektoren zum Eigenwert t sind die Lösungen $z \in \mathbb{C}^3$ der Gleichung

$$(A_t - tE_3)z = 0 \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Da $u := (1,1,0)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ obige Gleichung erfüllt, wird der Eigenraum zum Eigenwert t folglich von u aufgespannt. Sei nun $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$. Der Eigenraum zum Eigenwert $t - \varepsilon\sqrt{2}$ ergibt sich als Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems

$$0 = \big(A_t - (t - \varepsilon\sqrt{2})E_3\big)z = \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \varepsilon\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1 & \varepsilon\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden zwei Schritte des Gauß–Algorithmus und erhalten

$$\begin{bmatrix} \varepsilon\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \varepsilon\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1 & \varepsilon\sqrt{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{Z_3 + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}} Z_1} \begin{bmatrix} \varepsilon\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \varepsilon\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow{Z_3 - \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}} Z_2} \begin{bmatrix} \varepsilon\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \varepsilon\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ein Eigenvektor und damit eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert $t - \varepsilon\sqrt{2}$ ist daher gegeben durch $(1, -1, \varepsilon\sqrt{2})^\intercal \in \mathbb{R}^3$. Wir sehen, dass Eigenvektoren zu den Eigenwerten t, $t - \sqrt{2}$ und $t + \sqrt{2}$ jeweils durch

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ und } w := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Die Vektoren u, v und w stehen nach Lemma 5.4.5 außerdem paarweise senkrecht aufeinander, da sie zu paarweise verschiedenen Eigenwerten gehören; alternativ rechnet man dies einfach nach. In jedem Fall bilden die Vektoren

$$\frac{u}{|u|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \frac{v}{|v|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ und } \frac{w}{|w|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis und demnach ist

$$T := \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix, deren Spalten aus Eigenvektoren von A_t bestehen und die

$$T^{-1} A_t T = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & t + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

erfüllt, wie gewünscht.

(b) Nach dem vorherigen Aufgabenteil ist 0 ein Eigenwert von A_0. Da konjugierte Matrizen bis auf Permutation dieselben Eigenwerte besitzen (Satz 5.2.2) und die Eigenwerte von A_t nach dem vorherigen Aufgabenteil durch t, $t-\sqrt{2}$ und $t+\sqrt{2}$ gegeben sind, muss für eine zu A_0 konjugierte Matrix A_t zumindest einer der Eigenwerte t, $t-\sqrt{2}$ oder $t+\sqrt{2}$ identisch 0 sein. Wir unterscheiden die drei Fälle.

(i) Ist $t=0$, so gilt $A_t = A_0$ und A_0 ist zu sich selbst konjugiert.

(ii) Ist $t-\sqrt{2}=0$, so gilt also $t=\sqrt{2}$ und dann ist $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ ein Eigenwert von $A_{\sqrt{2}}$. Aber $2\sqrt{2}$ ist kein Eigenwert von A_0 (die Eigenwerte von A_0 sind ja gerade 0, $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$), und deshalb ist $A_{\sqrt{2}}$ nicht zu A_0 konjugiert.

(iii) Ist $t+\sqrt{2}=0$, also $t=-\sqrt{2}$, so ist $-\sqrt{2}-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$ ein Eigenwert von $A_{-\sqrt{2}}$, aber nicht von A_0. Demnach kann auch $A_{-\sqrt{2}}$ nicht zu A_0 konjugiert sein.

Es folgt: Nur für $t=0$ ist A_t zu A_0 konjugiert.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 45. *Typbestimmung von Quadriken*

Gegeben seien die Quadriken

$$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 + 9 = 0\},$$
$$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -3x_1^2 + 2x_1x_3 + 19x_2^2 - \tfrac{1}{7}x_2x_3 + 6x_1 - 2x_3 - 3 = 0\}.$$

(a) Bestimmen Sie für $j \in \{1,2\}$ jeweils eine symmetrische Matrix $A_j \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $a_j \in \mathbb{R}^3$ und $c_j \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$Q_j = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal A_j x + 2a_j^\intercal x + c_j = 0\}.$$

(b) Geben Sie für $j \in \{1,2\}$ jeweils $A_{j,\mathrm{erw}}$ an und prüfen Sie damit, ob es sich bei Q_j um eine kegelige, parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik handelt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir haben zum Beispiel

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1 = 9,$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 19 & -\frac{1}{14} \\ 1 & -\frac{1}{14} & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = -3.$$

(b)
- Es ist

$$A_{1,\mathrm{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Da $\mathrm{Rang}(A_{1,\mathrm{erw}}) = 3 = \mathrm{Rang}(A_1) + 1$, handelt es sich um eine Mittelpunktsquadrik.

- Es ist

$$A_{2,\mathrm{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} -3 & 3 & 0 & -1 \\ \hline 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 19 & -\frac{1}{14} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{14} & 0 \end{array}\right)$$

Da $\mathrm{Rang}(A_{1,\mathrm{erw}}) = 3 = \mathrm{Rang}(A_1)$, handelt es sich um eine kegelige Quadrik.

Aufgabe H 46. *Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2\sqrt{2}\,x_1 + 2\sqrt{2}\,x_3 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich dem Q euklidische Normalform besitzt und geben Sie die zugehörige euklidische Normalform an.

Lösungshinweise hierzu: Zunächst formulieren wir die Quadrikgleichung in Matrixschreibweise $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad c = 0.$$

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von A. Es ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(4-\lambda) + 2 + 2 - 4(4-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) + 4 + 4\lambda - 16 - 2 + 2\lambda \\ &= -10 - 3\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 \\ &= (-1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte von A gegeben durch

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 5.$$

Wir bestimmen die zugehörigen Eigenräume:

- $V(-1)$: Es ist

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{Z3-Z1;\, Z1-2\cdot Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc||c} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{Z2+\frac{5}{9}Z1;\, -\frac{1}{9}\cdot Z1;\, Z2\leftrightarrow Z1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Damit ist $V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- $V(2)$: Es ist

$$\left[\begin{array}{ccc||c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{Z1+Z2;\, Z3-2\cdot Z2;\, Z2\leftrightarrow Z1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{Z2+Z3;\, Z1-\frac{2}{3}\cdot Z2,\, \frac{1}{3}\cdot Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Damit ist $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- $V(5)$: Es ist

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{Z1+4\cdot Z2;\, Z3-2\cdot Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{Z3+Z1;\, -\frac{1}{3}Z1;\, Z1\leftrightarrow Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{Z1+Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Damit ist $V(5) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren ist damit zum Beispiel gegeben durch

$$B\colon \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir nun $x = Ty$ mit $T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, so lautet die Quadrikgleichung bezüglich y

$$\begin{aligned} & -y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2 + 2\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}y_2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -y_1^2 + 2\left(y_2^2 + 2\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{8}{3}\right) - 2\cdot\frac{8}{3} + 5y_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -y_1^2 + 2\left(y_2^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2 + 5y_3^2 - \frac{16}{3} = 0. \end{aligned}$$

Mit $z = y + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt dann

$$-z_1^2 + 2z_2^2 + 5z_3^2 - \frac{16}{3} = 0,$$

woraus sich die euklidische Normalform

$$\frac{3}{16}z_1^2 - \frac{3}{8}z_2^2 - \frac{15}{16}z_3^2 + 1 = 0$$

ergibt. Da $x = Ty = T\left(z - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}\right) = Tz - \frac{2}{3}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist das zugehörige kartesische Koordinatensystem gegeben durch

$$\mathbb{F} = \left(-\frac{2}{3}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe H 47. *Schnitt von Ebene und Quadrik*

Gegeben seien die Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ und der Kreiszylinder $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0\}$. Der Schnitt $S = E \cap Q$ ist eine Ellipse, deren Halbachsenlängen im Folgenden bestimmt werden sollen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Führen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ so ein, dass $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid\ y_3 = 0\}$, wobei $y = {}_{\mathbb{F}}x$.

(b) Stellen Sie die Gleichung auf, die Q in Koordinaten $y = {}_{\mathbb{F}}x$ bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

(c) Wenn Sie in der Gleichung aus **(b)** $y_3 = 0$ setzen, ergibt sich eine beschreibende Gleichung (in zwei Variablen) für die gesuchte Ellipse S. Führen Sie nun eine Hauptachsentransformation für diese Quadrikgleichung durch, um die Halbachsenlängen von S zu bestimmen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Jedes kartesische Koordinatensystem bei dem der dritte Basisvektor senkrecht auf E steht, besitzt die gewünschte Eigenschaft. Zum Beispiel

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(b) Die Quadrikgleichung von Q hat die Matrixdarstellung

$$x^{\intercal} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2(-1, 2, 0)x + 1 = 0.$$

Setzen wir nun $x = Ty$ mit der Transformationsmatrix $T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$,

so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ = &\frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$(-1, 2, 0)T = (-\tfrac{3}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}).$$

Damit ergibt sich für unser gewähltes Koordinatensystem die Quadrikgleichung

$$y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{2}{3}y_3^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}y_2y_3 + 2(-\tfrac{3}{2}\sqrt{2}y_1 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}y_3) + 1 = 0$$

(c) Wir setzen in der Gleichung aus **(b)** nun $y_3 = 0$ und erhalten

$$y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 + 2(-\tfrac{3}{2}\sqrt{2}y_1 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}y_2) + 1 = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt eine Quadrik in zwei Variablen, nämlich die gesuchte Ellipse. Um die Halbachsenlängen zu bestimmen, führen wir eine Hauptachsentransformation durch. Durch quadratisches Ergänzen finden wir

$$\begin{aligned} & y_1^2 + 2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}y_1\right) + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{1}{3}\left(y_2^2 + 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}y_2\right) + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(y_1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Durch eine Verschiebung des Ursprungs gelangen wir zur euklidischen Normalform

$$-\frac{1}{4}z_1^2 - \frac{1}{12}z_2^2 + 1 = 0.$$

Die Halbachsenlängen sind damit 2 und $2\sqrt{3}$.

Anmerkung: Da wir unser Koordinatensystem $\mathbb{F}$ (zufälligerweise) passend gewählt haben, entfällt der Diagonalisierungsschritt. Wäre unsere Wahl in **(a)** anders ausgefallen (was bei einem allgemeinen Problem der Normalfall wäre), würde die Ellipsengleichung i.A. noch gemischtquadratische Terme enthalten. Man versuche zum Beispiel

$$\widetilde{\mathbb{F}} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe H 48. *Hauptachsentransformation und Skizzen*

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken jeweils eine euklidische Normalform und ein Koordinatensystem, bezüglich dem die Quadrik Normalform hat. Skizzieren Sie die Quadriken im Standardkoordinatensystem.

(a) $Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_2 + 3 = 0\}$

(b) $Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - x_2 = 0\}$

(c) $Q_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 0\}$

(d) $Q_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 + x_1 + x_2 = 0\}$

Lösungshinweise hierzu:

Die Gleichung für Q_1 hat die Matrixbeschreibung $x^{\mathsf{T}} A\, x + 2a^{\mathsf{T}} x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad c = 3.$$

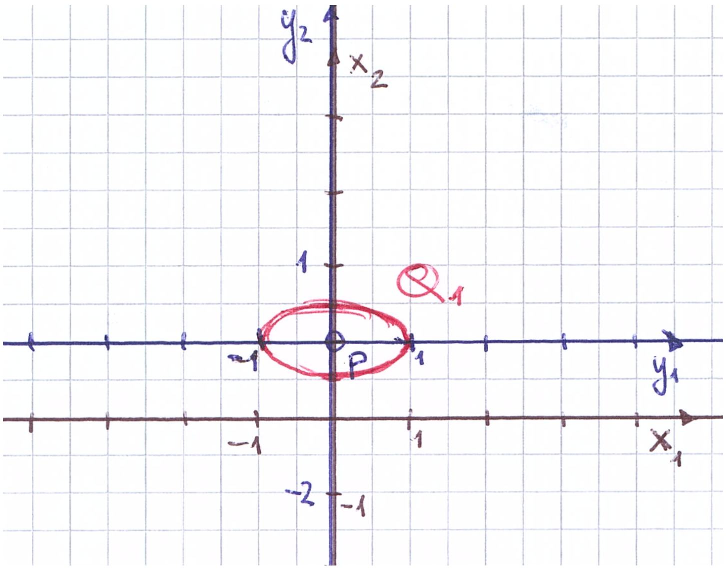
Die Matrix A ist bereits symmetrisch, der erste Schritt im Algorithmus zur Hauptachsentransformation ist also nicht nötig. Es bleibt die quadratische Ergänzung zur Beseitigung von linearen Termen: Aus $4x_2^2 - 8x_2 = 4(x_2^2 - 2x_2) = 4(x_2^2 - 2x_2 + 1) - 4 = 4(x_2 - 1)^2 - 4$ ergibt sich der Ansatz $y_1 = x_1$ und $y_2 = x_2 - 1$. In Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$ mit $P = \binom{0}{1}$ ergibt sich die Gleichung

$$y_1^2 + 4y_2^2 - 1 = 0\,,$$

eine euklidische Normalform ist

$$-y_1^2 - 4y_2^2 + 1 = 0\,.$$

Die Quadrik ist eine Ellipse mit Halbachsenlängen 1 und $1/2$:



Die Gleichung für Q_2 hat die Matrixbeschreibung $x^{\mathsf{T}} A\, x + 2a^{\mathsf{T}} x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad c = 0.$$

Die Eigenwerte von A sind 2 und 0 (jeweils mit Vielfachheit 1). Zugehörige Eigenvektoren sind z. B. $\binom{1}{1}$ und $\binom{1}{-1}$. Wir benutzen $\mathbb{F} = \left(\binom{0}{0}; \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1}\right)$ als zweites Koordinatensystem. Mit $\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ erhalten wir in Koordinaten bezüglich dieses

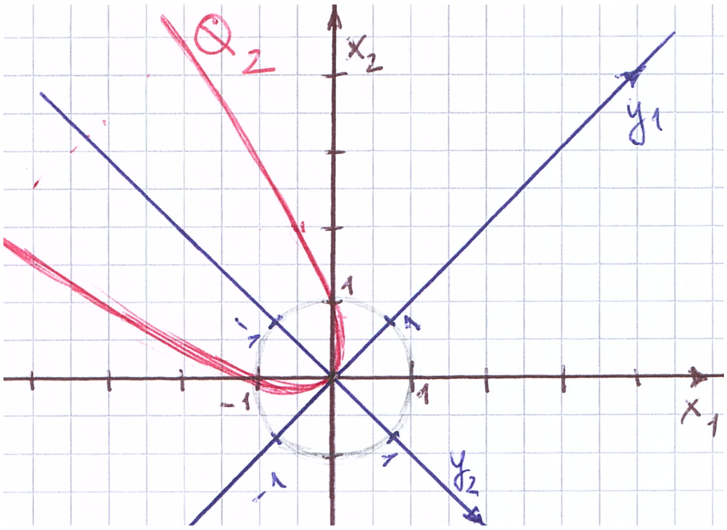
Systems die Gleichung

$$2y_1^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}y_2 = 0\,.$$

Eine euklidische Normalform ist also

$$2\sqrt{2}\,y_1^2 + 2y_2 = 0\,;$$

die Quadrik ist eine Parabel:



Die Gleichung für Q_3 hat die Matrixbeschreibung $x^\intercal A\,x + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad c = 1.$$

Die Eigenwerte von A sind $1/2$ und $-1/2$ (jeweils mit Vielfachheit 1). Zugehörige Eigenvektoren sind z. B. $\binom{1}{1}$ und $\binom{-1}{1}$. Wir benutzen $\mathbb{F} = \left(\binom{0}{0}; \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}\right)$ als zweites Koordinatensystem. Mit $\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir in Koordinaten bezüglich dieses Systems die Gleichung

$$\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \sqrt{2}\,y_1 + 1 = 0\,.$$

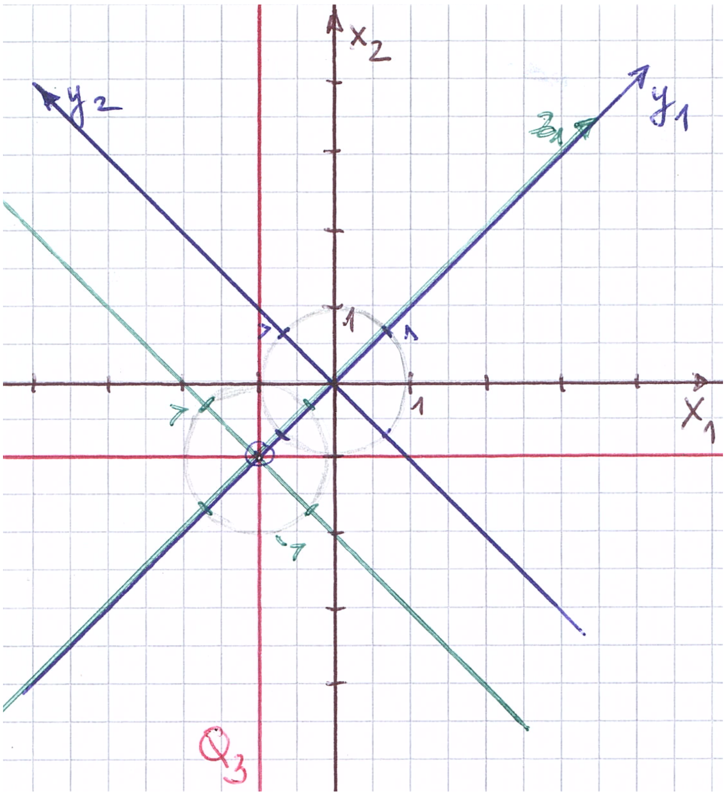
Um das weitere Vorgehen zu vereinfachen, multiplizieren wir diese Gleichung mit 2 (das ändert die Lösungsmenge nicht), und erhalten die Gleichung

$$y_1^2 - y_2^2 + 2\sqrt{2}\,y_1 + 2 = 0\,.$$

Die quadratische Ergänzung $y_1^2 + 2\sqrt{2}\,y_1 = (y_1^2 + 2\sqrt{2}\,y_1 + \sqrt{2}^2) - 2 = (y_1 + \sqrt{2})^2 - 2$ führt uns auf das Koordinatensystem $\mathbb{G} = \left(P; \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}\right)$ mit ${}_{\mathbb{F}}P = \binom{-1/\sqrt{2}}{0}$, also ${}_{\mathbb{E}}P = \binom{-1}{-1}$. In Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ erhalten wir die Gleichung

$$z_1^2 - z_2^2 = 0\,.$$

Damit ist euklidische Normalform erreicht; die Quadrik ist ein schneidendes Geradenpaar:



Die Gleichung für Q_4 hat die Matrixbeschreibung $x^\intercal A\, x + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad c = 0.$$

(Da A und a sich im Vergleich zu Q_3 nicht ändern, können wir einen großen Teil der Rechnung übernehmen.) Die Eigenwerte von A sind $1/2$ und $-1/2$ (jeweils mit Vielfachheit 1). Zugehörige Eigenvektoren sind z. B. $\binom{1}{1}$ und $\binom{-1}{1}$. Wir benutzen $\mathbb{F} = \left(\binom{0}{0}; \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}\right)$ als zweites Koordinatensystem. Mit $\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\binom{1/2}{1/2} = \binom{1/\sqrt{2}}{0}$ erhalten wir in Koordinaten bezüglich dieses Systems die Gleichung

$$\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + \sqrt{2}\, y_1 = 0\,.$$

Um das weitere Vorgehen zu vereinfachen, multiplizieren wir diese Gleichung mit 2 (das ändert die Lösungsmenge nicht), und erhalten die Gleichung

$$y_1^2 - y_2^2 + 2\sqrt{2}\, y_1 = 0\,.$$

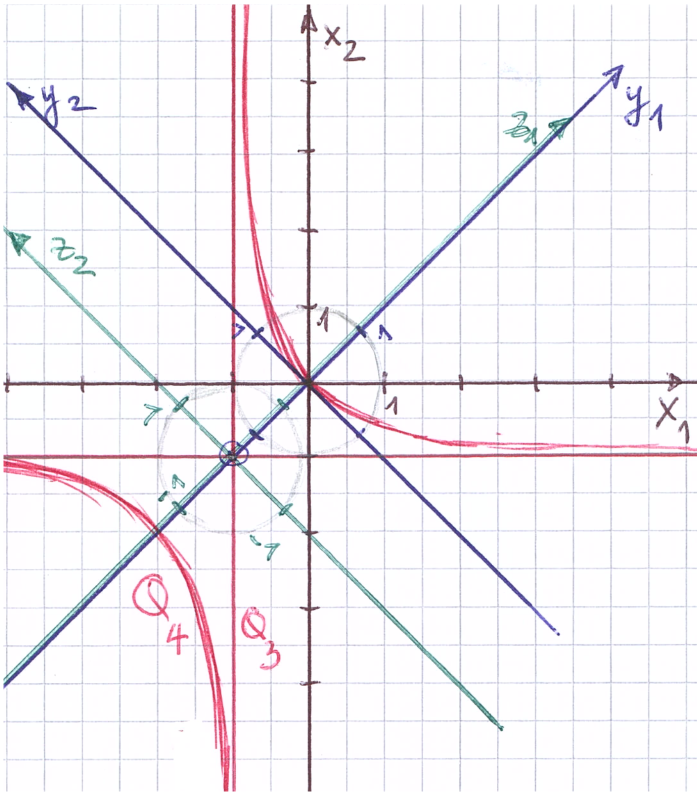
Die quadratische Ergänzung $y_1^2 + 2\sqrt{2}\, y_1 = (y_1^2 + 2\sqrt{2}\, y_1 + \sqrt{2}^2) - 2 = (y_1 + \sqrt{2})^2 - 2$ führt uns auf das Koordinatensystem $\mathbb{G} = \left(P; \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}\right)$ mit ${}_{\mathbb{F}}P = \binom{-1/\sqrt{2}}{0}$, also ${}_{\mathbb{E}}P = \binom{-1}{-1}$. In Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ erhalten wir die Gleichung

$$z_1^2 - z_2^2 - 2 = 0\,.$$

Damit ist

$$-\frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + 1 = 0\,.$$

eine euklidische Normalform; die Quadrik ist eine Hyperbel (die Asymptoten sind die beiden Geraden, die Q_3 bilden):



x_2
x_1
y_1
y_2
z_1
z_2
Q_4
Q_3
1
1
1
1
1
1
1

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 49. *Modell: Einschaliges Hyperboloid*

Die Quadrik Q in $\mathbb{R}^3$ sei bezüglich des Standarkoordinatensystems $\mathbb{E}$ gegeben durch

$$Q : x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3+(3\sqrt{2}-\sqrt{6})x_1-2\sqrt{6}x_2-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})x_3-6=0.$$

Ein Modell von Q hatten Sie in den Übungen in den Händen. Sie finden dies auch unter: http://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/03/.
Im Modell ist die x_1-Achse weiß, die x_2-Achse grau und die x_3-Achse ist schwarz dargestellt. Sei zudem $\mathbb{F}=(S;\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\tilde{f}_3)$ ein kartesisches Koordinatensystem so, dass

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\colon\ v\mapsto \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}v-\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\ 2\\ 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine Gleichung von Q in Koordinaten $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$, $\tilde{y}_3$ bezüglich $\mathbb{F}$ an.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein Koordinatensystem $\mathbb{G}=(P;\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\tilde{f}_3)$, bezüglich dem Q diese Normalform annimmt.

(c) Vergleichen Sie das Koordinatensystem $\mathbb{G}$ mit dem farbigen Koordinatensystem zur Darstellung von Q in **P 47** und beantworten Sie, ob $\mathbb{F}$ im Modell sichtbar ist?

(d) Sei $\alpha\in\mathbb{R}$ ein Parameter. Die Ebene E_α sei bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G}$ beschrieben durch die Gleichung $\tilde{z}_1=\alpha$. Kann $\alpha\in\mathbb{R}$ so gewählt werden, dass $Q\cap E_\alpha$ eine Ellipse beschreibt, welche eine Halbachse der Länge 2 besitzt?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Gleichung der Quadrik Q lautet $x^\intercal Ax+2a^\intercal x+c=0$ mit

$$A:=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ -1 & 4 & -1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad a:=\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\\ -\sqrt{6}\\ -\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix},\qquad c:=-6.$$

Zudem sind ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\colon\ \tilde{y}\mapsto\tilde{F}\tilde{y}+S$ und $\mathbb{F}=\left(S;\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\tilde{f}_3\right)$ gegeben mit

$$\tilde{F}:=(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\tilde{f}_3):=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad S:=-\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\ 2\\ 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Wir setzen nun $x=\tilde{F}\tilde{y}+S$ in $x^\intercal Ax+2a^\intercal x+c$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}(\tilde{F}\tilde{y}+S)^\intercal A(\tilde{F}\tilde{y}+S)+2a^\intercal(\tilde{F}\tilde{y}+S)+c\\ &=\tilde{y}^\intercal\tilde{F}^\intercal A\tilde{F}\tilde{y}+\tilde{y}^\intercal\tilde{F}^\intercal AS+S^\intercal A\tilde{F}\tilde{y}+2a^\intercal\tilde{F}\tilde{y}+S^\intercal AS+2a^\intercal S+c\\ &=\tilde{y}^\intercal(\tilde{F}^\intercal A\tilde{F})\tilde{y}+2(AS+a)^\intercal\tilde{F}\tilde{y}+(S^\intercal AS+2a^\intercal S+c);\end{aligned}$$

dabei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass $\tilde{y}^\intercal\tilde{F}^\intercal AS=\left\langle\tilde{F}\tilde{y}\,\middle|\,AS\right\rangle=\left\langle AS\,\middle|\,\tilde{F}\tilde{y}\right\rangle=S^\intercal A^\intercal\tilde{F}\tilde{y}$ gilt und wegen $A=A^\intercal$ somit die Identität $\tilde{y}^\intercal\tilde{F}^\intercal AS+S^\intercal A\tilde{F}\tilde{y}=2S^\intercal A^\intercal\tilde{F}\tilde{y}=2(AS)^\intercal\tilde{F}\tilde{y}$ gültig ist. Weil $AS=a$ folgt weiter

$$\tilde{F}^\intercal A\tilde{F}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix},\quad 2(AS+a)^\intercal\tilde{F}=4a^\intercal\tilde{F}=4\begin{pmatrix}-3 & -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & -12 & 0\end{pmatrix}.$$

Wegen $S^\intercal A S = 0$, $a^\intercal S = 0$ gilt zudem $S^\intercal A S + 2a^\intercal S + c = c = -6$ und somit ist

$$-3\tilde{y}_1^2 + 3\tilde{y}_2^2 + 6\tilde{y}_3^2 - 12\tilde{y}_1 - 12\tilde{y}_2 - 6 = 0$$

die gesuchte Gleichung von Q bezüglich $\mathbb{F} = (S; \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)$.

(b) Aus der Gleichung von Q bezüglich $\mathbb{F}$ folgt mit quadratischer Ergänzung weiter

$$-3(\tilde{y}_1 + 2)^2 + 3(\tilde{y}_2 - 2)^2 + 6\tilde{y}_3^2 - 6 = 0.$$

Wir setzen daher $\tilde{z}_1 := \tilde{y}_1 + 2$, $\tilde{z}_2 := \tilde{y}_2 - 2$, $\tilde{z}_3 := \tilde{y}_3$ und erhalten die Gleichung

$$-3\tilde{z}_1^2 + 3\tilde{z}_2^2 + 6\tilde{z}_3^2 - 6 = 0 \qquad \text{mit} \qquad \tilde{y} = \tilde{z} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Gleichung bezüglich $\mathbb{G} = (P; \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)$ mit ${}_{\mathbb{F}}P = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, also

$$_{\mathbb{E}}P = \tilde{F}\,{}_{\mathbb{F}}P + S = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} + 2 \\ 4 \\ -2\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 2 \\ 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 2 \\ 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Die entsprechende euklidische Normalform von Q bezüglich $\mathbb{G}$ lautet damit

$$\frac{1}{2}\tilde{z}_1^2 - \frac{1}{2}\tilde{z}_2^2 - \tilde{z}_3^2 + 1 = 0.$$

(c) Im Modell sind drei verschiedene Koordinatensysteme erkennbar:

- **(i)** Das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ mit der x_1-Achse in weiß, der x_2-Achse in grau und der x_3-Achse in schwarz dargestellt.
- **(ii)** Ein Koordinatensystem mit farbigen Achsen (gelb, grün, blau) und demselben Ursprung $(0, 0, 0)$ wie $\mathbb{E}$.
- **(iii)** Ein Koordinatensystem mit farbigen Achsen (gelb, grün, blau) und einem Ursprung, der in allen drei farbigen Symmetrie-Ebenen der Quadrik liegt. In **P 47** sind diese Ebenen mit $E_{2,3}$, $E_{1,3}$ und $E_{1,2}$ bezeichnet.

Der Ursprung S von $\mathbb{F}$ ist nicht $(0, 0, 0)$. Somit kann $\mathbb{F}$ nicht eines der Koordinatensysteme **(i)** oder **(ii)** sein.
Bezüglich des Koordinatensystems aus **P 47** ist die Quadrik gegeben durch

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z_1^2 + 2z_2^2 - z_3^2 - 2 = 0 \right\}, \qquad \text{womit} \qquad -\frac{1}{2}z_1^2 - z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 + 1 = 0$$

die zugehörige euklidische Normalform ist. Indem wir $\tilde{z}_1 = z_3$, $\tilde{z}_2 = z_1$ und $\tilde{z}_3 = z_2$ setzen, vertauschen wir die Koordinaten und erhalten die Gleichung von Q bezüglich $\mathbb{G}$ aus **(b)**. Diese Vertauschung entspricht einer Umordnung der Basisvektoren $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$, $\tilde{f}_3$ von $\mathbb{G}$. Das Koordinatensystem **(iii)** aus **P 47** ist somit gerade gegeben durch $(P; \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_1)$. Da $S \neq P$ entspricht $\mathbb{F}$ nicht dem Koordinatensystem aus **(iii)**.
Somit folgern wir, dass $\mathbb{F}$ nicht im Modell sichtbar ist.

(d) Einsetzen von $\tilde{z}_1 = \alpha$ in die Gleichung von Q aus Teil **(b)** liefert für die Beschreibung von $Q \cap E_\alpha$

$$-\frac{1}{2}\tilde{z}_2^2 - \tilde{z}_3^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) = 0.$$

Da $\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2\right) > 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, können wir dies äquivalent schreiben als

$$-\left(\frac{1}{2+\alpha^2}\right)\tilde{z}_2^2 - \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\alpha^2}\right)\tilde{z}_3^2 + 1 = 0$$

Wir erkennen, dass $Q \cap E_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Ellipse beschreibt. Da $\mathbb{G}$ ein kartesisches Koordinatensystem ist, sind die Halbachsenlängen der Ellipse gerade gegeben durch

$$l_1(\alpha) := \sqrt{2+\alpha^2} \qquad \text{und} \qquad l_2(\alpha) := \sqrt{1+\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Es gilt $l_1(\alpha) = 2 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \pm\sqrt{2}$ und $l_2(\alpha) = 2 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \pm\sqrt{6}$. Somit beschreibt $Q \cap E_\alpha$ eine Ellipse mit einer Halbachse der Länge 2 für $\alpha \in \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{6}\}$.

Aufgabe H 50. *Quadrik mit Parameter*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für die folgende parameterabhängige Quadrik Q_α die Matrixform, eine euklidische Normalform, sowie den Typ und die Gestalt in Abhängigkeit von α.

$$Q_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha(2\alpha x_1 + 1) + (x_2 - 2x_3)^2 + 6(\sqrt{5}\,x_2 - x_3^2) + 19 + 8\alpha x_1 = 0 \right\}.$$

Lösungshinweise hierzu: Durch Umsortieren folgt

$$Q_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2 + 2\alpha(\alpha+4)x_1 + 6\sqrt{5}\,x_2 + (\alpha + 19) = 0 \right\}.$$

Die Matrixform der Quadrik ist damit $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a_\alpha^\intercal x + c_\alpha = 0 \right\}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad a_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha+4) \\ 3\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_\alpha = \alpha + 19.$$

Wir berechnen zuerst die Eigenwerte von A. Da A Blockdiagonalgestalt besitzt erhalten wir für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_3) = (-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda[(1-\lambda)(-2-\lambda) - 4] = -\lambda[\lambda^2 + \lambda - 6] = -\lambda(-3-\lambda)(2-\lambda). \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 0;$$

wir haben dabei die Eigenwerte so angeordnet, dass 0 an letzter Stelle ist. Zugehörige normierte Eigenvektoren sind

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die Transformationsmatrix

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{Eine Probe ergibt} \quad F^\intercal A F = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $F^\intercal a_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \\ \alpha(\alpha+4) \end{smallmatrix}\right)$ ergibt sich die transformierte Gleichung

$$-3y_1^2 + 2y_2^2 + 6y_1 + 12y_2 + 2\alpha(\alpha+4)y_3 + (\alpha + 19) = 0.$$

Mit quadratischer Ergänzung folgt daraus

$$-3(y_1 - 1)^2 + 2(y_2 + 3)^2 + 2\alpha(\alpha+4)y_3 + (\alpha + 4) = 0.$$

Wir setzen daher $z_1 := y_1 - 1$, $z_2 := y_2 + 3$, $z_3 := y_3$ und erhalten schließlich die Gleichung

$$-3z_1^2 + 2z_2^2 + 2\alpha(\alpha+4)z_3 + (\alpha + 4) = 0.$$

Nun können wir die euklidische Normalform, die Gestalt und den Typ der Quadrik genauer spezifizieren. Wir untersuchen dafür, ob der lineare Anteil $2\alpha(\alpha+4)z_3$ und der konstante Anteil $(\alpha + 4)$ übrig bleiben oder nicht:

- Für $\alpha = -4$ verschwinden der lineare und der konstante Anteil und wir erhalten die euklidische Normalform
$$-3z_1^2 + 2z_2^2 = 0.$$
In $\mathbb{R}^3$ betrachtet, beschreibt diese Gleichung ein schneidendes Ebenenpaar und der Typ der Quadrik Q_{-4} ist eine kegelige Quadrik.
- Für $\alpha = 0$ verschwindet der lineare Anteil und wir erhalten $-3z_1^2+2z_2^2+4 = 0$. Somit ist die euklidische Normalform
$$-\frac{3}{4}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + 1 = 0.$$
In $\mathbb{R}^3$ betrachtet, beschreibt diese Gleichung einen hyperbolischen Zylinder und der Typ der Quadrik Q_0 ist eine Mittelpunktsquadrik.
- Für $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-4, 0\}$ verschwinden der lineare Anteil mit z_3 und der konstante Anteil nicht. Wir verschieben daher (gegen die Konstante) indem wir $z_3 =: w_3 - \frac{\alpha+4}{2\alpha(\alpha+4)} = w_3 - \frac{1}{2\alpha}$ (und $z_j =: w_j$ für $j \neq 3$) setzen, und erhalten $-3w_1^2+2w_2^2+2\alpha(\alpha+4)w_3 = 0$. Somit ist die euklidische Normalform schließlich
$$-\frac{3}{\alpha(\alpha+4)}w_1^2 + \frac{2}{\alpha(\alpha+4)}w_2^2 + 2w_3 = 0.$$
Für $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-4, 0\}$ tragen die Koeffizienten der zwei quadratischen Terme immer verschiedene Vorzeichen. Also ist die Gestalt der Quadrik Q_α für $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-4, 0\}$ stets ein hyperbolisches Paraboloid und der zugehörige Typ ist eine parabolische Quadrik.

Aufgabe H 51. *Rekursive Folge*

Für das Parameterpaar $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei die Folge $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_1 := s$, $a_2 := t$ und $a_{n+1} := -4a_n + 5a_{n-1}$ für $n \geqq 2$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen mit $A := \left(\begin{smallmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:
$$A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^n \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$ durch Diagonalisieren von A. Benutzen Sie **(a)** um einen Ausdruck für a_n anzugeben, der nicht rekursiv von anderen Folgengliedern abhängt.

(c) Bestimmen Sie alle Paare (s,t) so, dass $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach der Rekursionsvorschrift gilt $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt
$$\begin{pmatrix} -4a_{n+1} + 5a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$, womit die erste Identität $A \left(\begin{smallmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{smallmatrix}\right)$ gezeigt ist.
Wir zeigen nun die zweite Identität $A^n \left(\begin{smallmatrix} t \\ s \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{smallmatrix}\right)$ mittels vollständiger Induktion.

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$:
Aus der Rekursionsvorschrift folgt $a_3 = -4t + 5s$, womit
$$A^1 \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t + 5s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1+2} \\ a_{1+1} \end{pmatrix}.$$

IH Nun nehmen wir an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. es gelte
$$A^n \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:
Aus der Rekursionsvorschrift folgt $a_{n+3} = -4a_{n+2} + 5a_{n+1}$, womit
$$A^{n+1} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = A\,A^n \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \overset{\text{IH}}{=} A \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a_{n+2} + 5a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{(n+1)+2} \\ a_{(n+1)+1} \end{pmatrix}$$

Somit ist die Behauptung per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

(b) Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet
$$\det(A - \lambda E_2) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 5 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-4-\lambda) - 5 = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = (-5-\lambda)(1-\lambda).$$

Damit sind $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 1$ die Eigenwerte von A. Dazugehörige Eigenvektoren sind
$$v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A lässt sich somit diagonalisieren: Es gilt $D = T^{-1}AT$ wobei
$$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung von $A^n = (TDT^{-1})^n$ zeigen wir mit vollständiger Induktion, dass $(TDT^{-1})^n = TD^nT^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: $(TDT^{-1})^1 = TDT^{-1} = TD^1T^{-1}$.

IH Sei die Aussage wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gelte $(TDT^{-1})^n = TD^nT^{-1}$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$(TDT^{-1})^{n+1} = (TDT^{-1})(TDT^{-1})^n \overset{\text{IH}}{=} TD\underbrace{T^{-1}T}_{=E_2}D^nT^{-1} = TD^{n+1}T^{-1}.$$

Da D eine Diagonalmatrix ist, folgt somit

$$A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-5)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1-(-5)^{n+1} & 5+(-5)^{n+1} \\ 1-(-5)^n & 5+(-5)^n \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden dies und **(a)** um einen Ausdruck für a_n anzugeben, der nicht rekursiv von anderen Folgengliedern abhängt. Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} &\overset{\textbf{(a)}}{=} A^n \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1-(-5)^{n+1} & 5+(-5)^{n+1} \\ 1-(-5)^n & 5+(-5)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5s+t+(-5)^{n+1}(s-t) \\ 5s+t+(-5)^n(s-t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit ist

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}\left(5s+t+(-5)^n(s-t)\right) \qquad \text{bzw.} \qquad a_n = \frac{1}{6}\left(5s+t+(-5)^{n-1}(s-t)\right).$$

(c) Wir betrachten den Ausruck für a_n aus **(b)**. Für $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $s = t$ folgt

$$a_n = \frac{1}{6}\left(5s+s+(-5)^{n-1}(s-s)\right) = s \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},$$

womit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge ist.
Angenommen, es gibt ein Paar $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $s \neq t$, so dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge ist. Dann gilt insbesondere $a_n = a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit

$$\frac{1}{6}\left(5s+t+(-5)^{n-1}(s-t)\right) = a_n = a_{n+1} = \frac{1}{6}\left(5s+t+(-5)^n(s-t)\right).$$

Daraus folgt $(-5)^{n-1}(s-t) = (-5)^n(s-t)$. Wegen $s-t \neq 0$ können wir auf beiden Seiten durch $(-5)^{n-1}(s-t)$ teilen und erhalten den Widerspruch $1 = -5$. Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur eine konstante Folge für alle Paare der Menge $\left\{(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, s = t\right\}$.

Aufgabe H 52. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere Schranke an. Geben Sie, falls möglich, eine untere Schranke an.

(a) $\left((n+2)^3 \cdot 3^{-n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\frac{1}{\sqrt{5n+10}-\sqrt{5n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\left|(-1)^n + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)^n - \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+4)\right)^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bezeichnen die Folge als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (n+2)^3 \cdot 3^{-n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit 0 eine untere Schranke der Folge ist.
Wir zeigen, dass die Folge streng monoton fallend ist, indem wir den Quotienten betrachten. Wegen $a_n > 0$ ist $a_{n+1} < a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Die letzte Ungleichung folgt aus den folgenden Überlegungen: Da $n+3 < 2n+4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$n+3 < 2n+4 \quad \Leftrightarrow \quad (n+2)+1 < 2(n+2) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{n+2} < 2.$$

Damit erhalten wir die grobe Abschätzung

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+2+1}{n+2}\right)^3 \frac{3^{n^2}}{3^{(n+1)^2}} = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^3 \frac{1}{3^{2n+1}} < \frac{2^3}{3^{2n+1}} < \frac{3^2}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3^{2n-1}} < 1,$$

wobei die letzte Ungleichung eine wahre Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend und es gilt insbesondere $a_n \leqq a_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $a_1 = 9$ eine obere Schranke für die Folge.

(b) Wir bezeichnen die Folge als $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{\sqrt{5n+10}-\sqrt{5n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Folgenglieder können geschrieben werden als

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)} \left(\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}).$$

Aus der Monotonie der Quadrierens folgt $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ und $\sqrt{n+2} < \sqrt{n+3}$, womit

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}) < \frac{1}{2\sqrt{5}}(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}) = b_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend und es gilt insbesondere $b_1 \leqq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $b_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\sqrt{3}+1)$ eine untere Schranke für die Folge.
Wir zeigen, dass die Folge nach oben unbeschränkt ist. Angenommen, es gäbe eine obere Schranke $S \in \mathbb{R}$ so, dass $b_n \leqq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann wäre für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{5}}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}) \leqq S \quad \Rightarrow \quad 0 < \sqrt{n} < 2\sqrt{5}\,S \quad \Leftrightarrow \quad n < 20S^2,$$

wobei im letzten Schritt erneut die Monotonie des Quadrierens verwendet wurde. Insbesondere würde daraus folgen, dass $20S^2$ eine obere Schranke der Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dies ergibt einen Widerspruch, da $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine obere Schranke besitzen kann.

(c) Wir bezeichnen die Folge als $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die ersten Folgenglieder lauten

$$c_1 = \frac{1}{2} = \frac{360}{720}, \qquad c_2 = \frac{13}{24} = \frac{390}{720}, \qquad c_3 = \frac{389}{720}.$$

Somit ist $c_2 > c_1$ und $c_3 < c_2$, wonach die Folge $\big(c_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton ist.
Wir beobachten $(2\cdot 0)! \geqq 0!$, $(2\cdot 1)! \geqq 1!$, $(2\cdot 2)! = 4\cdot 3! \geqq 3!$ bzw. allgemeiner für $k\in\mathbb{N}$ mit $k \geqq 3$

$$(2k)! = \underbrace{(2k)\cdot(2k-1)\cdots(k+1)}_{\geqq 1}\cdot k! \geqq k!,$$

womit

$$k! \leqq (2k)! \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(2k)!} \leqq \frac{1}{k!} \qquad \text{für alle} \quad k\in\mathbb{N}_0 \qquad (\star)$$

gilt. Zudem wurde im Beweis von Satz 1.2.8 verwendet, dass $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < 3$ für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n \geqq 3$ gilt. Da alle Summanden positiv sind folgt, dass $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < 3$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt. Wir erhalten damit die grobe Abschätzung

$$-3 < -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \overset{(\star)}{\leqq} -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!} \leqq \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!} \leqq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!} \overset{(\star)}{\leqq} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < 3.$$

Dies zeigt $-3 < c_n < 3$ für alle $n\in\mathbb{N}$, womit die Folge beschränkt ist mit unterer Schranke -3 und oberer Schranke 3.

(d) Wir bezeichnen die Folge als $\big(d_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \left|(-1)^n + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)^n - \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+4)\right)^n\right|$ für $n\in\mathbb{N}$. Die Folge ist nicht monoton weil die ersten Folgenglieder

$$d_1 = 2, \qquad d_2 = 2, \qquad d_3 = 0, \qquad d_4 = 2$$

lauten. Da $|\sin(x)| \leqq 1$ und $|\cos(x)| \leqq 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt, erhalten wir mit den Rechenregeln für Beträge

$$\begin{aligned} 0 \leqq d_n &\leqq |(-1)^n| + \left|\cos\left(\tfrac{\pi n}{2}\right)^n\right| + \left|-\sin\left(\tfrac{\pi}{2}(n+4)\right)^n\right| \\ &= |-1|^n + \left|\cos\left(\tfrac{\pi n}{2}\right)\right|^n + \left|\sin\left(\tfrac{\pi}{2}(n+4)\right)\right|^n \leqq 1+1+1 = 3 \end{aligned}$$

für alle $n\in\mathbb{N}$, womit die Folge beschränkt ist. Eine untere Schranke ist 0 und eine mögliche obere Schranke ist 3.

Alternativ kann man $\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)^n$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+4)\right)^n$ für $n\in\mathbb{N}$ genauer untersuchen. Da $\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+4)\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$, folgt für $k\in\mathbb{N}_0$

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 4k \\ 1 & \text{für } n = 4k+1 \\ 0 & \text{für } n = 4k+2 \\ -1 & \text{für } n = 4k+3 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 4k \\ 0 & \text{für } n = 4k+1 \\ 1 & \text{für } n = 4k+2 \\ 0 & \text{für } n = 4k+3 \end{cases},$$

womit schließlich

$$d_n = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 4k \\ 2 & \text{für } n = 4k+1 \\ 2 & \text{für } n = 4k+2 \\ 0 & \text{für } n = 4k+3 \end{cases}.$$

Damit ist die Folge $\big(d_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton und beschränkt mit unterer Schranke 0 und oberer Schranke 2.

N. Borg,
S. Hagh Shenas Noshari,
S. Nitsche, C. Rösinger,
A. Thumm, D. Zimmermann

14. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2018/19

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 53. *ε-Kriterium*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert a der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie jeweils speziell für $\varepsilon = 10^{-15}$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geqq n_\varepsilon$.

(a) $a_n = \sum_{k=0}^{n} 9\left(\frac{1}{10}\right)^k$ **(b)** $a_n = \frac{n^2-4}{3n^2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist nach der geometrischen Summenformel

$$a_n = 9\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} = 9\cdot\frac{10-\left(\frac{1}{10}\right)^{n}}{9} = 10-\left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 10$. Es ist

$$|a_n - 10| \overset{!}{<} 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad 10^{-n} < 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad n > 15.$$

Also wählen wir zum Beispiel $n_\varepsilon = 16$.

(b) Es ist

$$a_n = \frac{n^2-4}{3n^2} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3n^2}.$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$. Es ist

$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| \overset{!}{<} 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{3n^2} < 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad n > \sqrt{\frac{4}{3}\cdot 10^{15}} = \frac{2}{3}\sqrt{30}\cdot 10^7.$$

Da $\sqrt{30} < 6$, ist zum Beispiel $n_\varepsilon = 40000000$ eine geeignete Wahl.

Aufgabe H 54. *Häufungspunkte*

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei

(a) $a_n = \operatorname{Re}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^n\right)$

(b) $a_n = \min\left\{(-1)^n, \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da hier eine komplexe Zahl potenziert wird, lohnt es sich, in Polarkoordinatendarstellung zu wechseln. Es ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^n &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n \\ &= \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{, falls } n=8k,\ k\in\mathbb{N}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\mathrm{i}) & \text{, falls } n=8k+1,\ k\in\mathbb{N}, \\ \mathrm{i} & \text{, falls } n=8k+2,\ k\in\mathbb{N}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1+\mathrm{i}) & \text{, falls } n=8k+3,\ k\in\mathbb{N}, \\ -1 & \text{, falls } n=8k+4,\ k\in\mathbb{N}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1-\mathrm{i}) & \text{, falls } n=8k+5,\ k\in\mathbb{N}, \\ -\mathrm{i} & \text{, falls } n=8k+6,\ k\in\mathbb{N}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-\mathrm{i}) & \text{, falls } n=8k+7,\ k\in\mathbb{N}. \end{cases}\end{aligned}$$

Dementsprechend ist

$$\operatorname{Re}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^n\right) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n=8k,\ k\in\mathbb{N}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \text{, falls } n=8k+1,\ k\in\mathbb{N}, \\ 0 & \text{, falls } n=8k+2,\ k\in\mathbb{N}, \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \text{, falls } n=8k+3,\ k\in\mathbb{N}, \\ -1 & \text{, falls } n=8k+4,\ k\in\mathbb{N}, \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \text{, falls } n=8k+5,\ k\in\mathbb{N}, \\ 0 & \text{, falls } n=8k+6,\ k\in\mathbb{N}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \text{, falls } n=8k+7,\ k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Da jeder der Werte $0, 1, -1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ unendlich oft angenommen wird, sind das Häufungspunkte der Folge. Da wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oben vollständig in Teilfolgen zerlegt haben, gibt es auch keine weiteren Häufungspunkte.

(b) Für $k\in\mathbb{N}$ gilt $a_{2k} = \min\{(-1)^{2k}, \sin(\pi\, k)\} = \min\{1,0\} = 0$. Weiterhin ist $a_{2k+1} = \min\left\{(-1)^{2k+1}, \sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)\right\} = -1$. Daher ist

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \text{ gerade,} \\ -1 & \text{, falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die beiden Häufungspunkte 0 und -1.

Aufgabe H 55. *Grenzwerte*
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1}\sqrt{\dbinom{n}{2}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}-\sqrt{n^2+3n+14}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{7^n+n^7}{4^n+3^n}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\frac{1}{n+1}\sqrt{\binom{n}{2}} = \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}}$$
$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1\cdot\sqrt{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Anmerkung: Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass für eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \geqq 0$ für $n\in\mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$. Zeigen könnte man das zum Beispiel wie folgt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann ist

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|^2 = |\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|\cdot|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| \leqq |\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|\cdot|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}| = |a_n-a|.$$

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, gibt es ein n_ε, so dass $|a_n-a|<\varepsilon^2$ für alle $n>n_\varepsilon$. Damit gilt aber auch $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|<\varepsilon$ für alle $n>n_\varepsilon$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}-\sqrt{n^2+3n+14}\\
&= \frac{\left(\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}-\sqrt{n^2+3n+14}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+3n+14}\right)}{\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+3n+14}}\\
&= \frac{n^2+2n-\sqrt{n}-(n^2+3n+14)}{\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+3n+14}}\\
&= \frac{-n-\sqrt{n}-14}{\sqrt{n^2+2n-\sqrt{n}}+\sqrt{n^2+3n+14}} = \frac{-1-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{14}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^{3/2}}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{14}{n^2}}}\\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(c) Es ist zum Einen (Zähler vergrößern, Nenner verkleinern)

$$\sqrt[n]{\frac{7^n+n^7}{4^n+3^n}} < \sqrt[n]{\frac{7^n n^7+n^7 7^n}{4^n}} = 7\cdot\frac{\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}^7}{4} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{4}\cdot 1\cdot 1^7 = \frac{7}{4}.$$

Zum Anderen ist (Zähler verkleinern, Nenner vergrößern)

$$\sqrt[n]{\frac{7^n+n^7}{4^n+3^n}} > \sqrt[n]{\frac{7^n}{4^n+4^n}} = \frac{7}{4}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{4}\cdot 1 = \frac{7}{4}.$$

Nach dem Sandwichsatz ist damit $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{7^n+n^7}{4^n+3^n}} = \frac{7}{4}$.

(d) Es ist

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n^2} = (n+1) \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Da offensichtlich $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} > 0$ gilt, haben wir nach dem Sandwichsatz, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} = 0.$$

Aufgabe H 56. *Heron-Verfahren*

Zu $c > 1$ sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right).$$

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt{c} \leqq a_n \leqq c$.

(b) Folgern Sie mit Hilfe von **(a)**, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

(c) Begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert a von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **IA** Falls $c > 1$, so ist $\sqrt{c} < c$, da $a_1 = c$, ist damit der Induktionsanfang gemacht.

IS Zum Einen haben wir

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{a_n}_{\overset{\textbf{IH}}{\leqq c}} + \underbrace{\frac{c}{a_n}}_{\overset{\textbf{IH}}{\leqq \frac{c}{\sqrt{c}} = \sqrt{c} \leqq c}} \Big) \leqq \frac{1}{2}(c + c) = c.$$

Weiterhin ist

$$a_{n+1} \geqq \sqrt{c} \quad \Leftrightarrow \quad a_n^2 + c \geqq 2a_n\sqrt{c} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n - \sqrt{c})^2 \geqq 0.$$

Damit folgt durch vollständige Induktion, dass $\sqrt{c} \leqq a_n \leqq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es ist $\sqrt{c} \leqq a_n$, also auch $c \leqq a_n^2$. Damit folgt

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \leqq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2a_n = a_n.$$

(c) Da die Folge monoton fallend und beschränkt ist, folgt die Konvergenz.

(d) Wir wissen aus der letzten Teilaufgabe, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n =: a \geqq \sqrt{c} > 0$ existiert. Da $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge ist, ist diese ebenfalls konvergent mit demselben Grenzwert. Daher können wir in der Rekursionsvorschrift auf beiden Seiten den Grenzwert bilden und erhalten (nach Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte)

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2a = a + \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{c}.$$

Online-Aufgabe.

Zu diesem Übungsblatt gibt es keine Online-Aufgabe.