I. Blaschczyk, T. Ehnes,
A. P. Nagy, S. Noshari,
I. Paul, M. Pressland,
D. Zimmermann

1. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2019/20

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Polynome, Binomischer Lehrsatz*

(a) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $(2x^3 + 12x^2 + 24x + 16)(x^4 + 1)$.

Lösungshinweise hierzu: Nach dem Satz vom Nullprodukt genügt es, die beiden Faktoren getrennt zu untersuchen.

Mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes lässt sich der erste Faktor schreiben als

$$2x^3 + 12x^2 + 24x + 16 = 2(x + 2)^3.$$

Wir erhalten also -2 als einzige Nullstelle des ersten Faktors.

Der verbleibende Faktor $x^4 + 1$ besitzt hingegen keine reelle Nullstelle:
In der Tat gilt für $x \in \mathbb{R}$ stets $x^4 = (x^2)^2 \geqq 0$ und somit $x^4 + 1 \geqq 1 > 0$.

Somit ist -2 die einzige reelle Nullstelle von $(2x^3 + 12x^2 + 24x + 16)(x^4 + 1)$.

(b) Beweisen Sie $\sum_{k=0}^{n} \sin(\frac{\pi}{4} + k\pi)\binom{n}{k} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu: Wir beweisen diese Aussage mittels des binomischen Lehrsatzes und des Additionssatzes für Sinus ($\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$). Dabei benutzen wir $\cos(k\pi) = (-1)^k = \cos(\pi)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(k\pi)(1)^{n-k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos(\pi))^k (1)^{n-k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1)^{n-k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - 1)^n = 0.
\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Ungleichung $\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)(4x^2 - 8x + 4) < 0$.

Lösungshinweise hierzu: Die Ungleichung $\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)(4x^2 - 8x + 4) < 0$ ist äquivalent zu der Ungleichung $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (2x - 2)^2 < 0$. Für alle reelle Zahlen x gilt jedoch $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (2x - 2)^2 \geqq 0$, und somit gibt es keine reelle Lösung für diese Gleichung.

(d) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Lösungshinweise hierzu: Man faktorisiert $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$, wobei man den ersten Schritt durch Substitution $t = x^2$ und anschließendes Lösen der quadratischen Gleichung $t^2 - 5t + 4 = 0$ sehen kann. Also erhält man als Lösungsmenge die vier reellen Lösungen $\{1, -1, 2, -2\} \subsetneqq \mathbb{R}$.

Aufgabe H 2. *Summen*

(a) Berechnen Sie die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen für $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu: Wir betrachten die Summe $\sum_{k=1}^{n} 2k-1$. Wir formen diese Summe um und wenden die aus der Vorlesung bekannte Gaußsche Summenformel an.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n} 2k\right) - n = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2+n-n = n^2$$

Damit haben wir die Aussage bewiesen.

(b) Berechnen Sie $\sum_{j=4}^{n}(j^2-2j)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 4$.

Lösungshinweise hierzu: Wieder verwenden wir die Beispiele 1.2.2 und 1.2.4, achten aber auf den geänderten Indexbereich der Summen:

$$\begin{aligned}\sum_{j=4}^{n}(j^2-3j) &= \left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{3} j^2\right) - 2\left(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{3} j\right)\\ &= \left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - (1^2+2^2+3^2)\right) - 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - (1+2+3)\right)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 14 - n(n+1) + 12\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n-5) - 2.\end{aligned}$$

(c) Sei $a_k = (-1)^k \cdot k$ für $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\sum_{k=4}^{103} a_{4k-12}$. Zeigen Sie außerdem $\sum_{j=1}^{2k} a_j = k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt $(-1)^{4k-12} = ((-1)^4)^{k-3} = 1$, womit man die Summe wie folgt umformt:

$$\sum_{k=4}^{103} a_{4k-12} = \sum_{k=4}^{103} 4k-12 = \sum_{k=1}^{100} 4(k+3)-12 = 4\sum_{k=1}^{100} k = 4\frac{100\cdot 101}{2} = 20200.$$

Hierbei hat eine Indexverschiebung die Summe im vorletzten Schritt vereinfacht.
Zur Berechnung der zweiten Summe sortiert man die Summanden zunächst nach geraden und ungeraden Indizes:

$$\sum_{j=1}^{2k} a_j = \sum_{j=1}^{2k}(-1)^j \cdot j = \left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{2j-1}(2j-1) + (-1)^{2j}2j\right).$$

Anschließend vereinfacht man die Vorzeichen und formt die Summe zu dem Ausdruck

$$\left(\sum_{j=1}^{k} -(2j-1)+2j\right) = \left(\sum_{j=1}^{k} 1\right) = k$$

um.

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion mit Ungleichung*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $3n + 2^n \leqq 3^n$ für alle $n \geqq 3$.

(b) Es gilt $(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 < x < 1$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir führen eine vollständige Induktion durch.

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 3$: $\quad 3 \cdot 3 + 2^3 = 17 \leqq 27 = 3^3$.
Achtung: Für $n = 0$ ist diese Aussage richtig, jedoch nicht für $n = 1$ und $n = 2$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. es gelte

$$3n + 2^n \leqq 3^n.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$3(n+1) + 2^{n+1} = 3n + 3 + 2 \cdot 2^n \overset{\text{IH}}{\leqq} 3^n + 3 + 2^n \leqq 3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1}.$$

Für die letzte Ungleichung haben wir verwendet, dass $3 \leqq 3^n$ und $2^n \leqq 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

(b) Wir führen einen Induktionsbeweis durch:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$:

$$(1-x)^1 < \frac{1}{1 + 1 \cdot x}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (1-x)(1+x) &< 1 \\ 1 - x^2 &< 1 \\ 1 &< 1 + x^2, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Äquivalenz die dritte binomische Formel angewendet haben.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. es gelte

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned} (1-x)^{n+1} &= (1-x)^n(1-x) \\ &< \frac{1-x}{1+nx} \quad \text{unter Verwendung von IH und } 0 < x < 1 \\ &= \frac{1}{1+(n+1)x} + \frac{1-x}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x} \\ &= \frac{1}{1+(n+1)x} + \frac{(1-x)(1+(n+1)x)}{(1+nx)(1+(n+1)x)} - \frac{1}{1+(n+1)x} \\ &= \frac{1}{1+(n+1)x} + \frac{1+(n+1)x - x - (n+1)x^2 - 1 + nx}{(1-nx)(1+(n+1)x)} \\ &= \frac{1}{1+(n+1)x} - \frac{(n+1)x^2}{(1+nx)(1+(n+1)x)} \\ &< \frac{1}{1+(n+1)x}. \end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung haben wir verwendet, dass

$$\frac{(n+1)x^2}{(1+nx)(1+(n+1)x)} > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 < x < 1$. Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Produkt*

Analog zur Summenschreibweise, führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{j=1}^{m} A_j$ bedeutet, dass man den Term A_j für alle j von 1 bis m auswertet und die entstandenen Zahlen zusammenmultipliziert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Es gilt $\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{(2^k)}\right) = \frac{1-x^{(2^{n+1})}}{1-x}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \neq 1$.

(b) Es gilt $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir führen einen Induktionsbeweis durch:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 0$:

$$\prod_{k=0}^{0}\left(1+x^{(2^k)}\right) = 1 + x^{(2^0)} = 1 + x = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x},$$

wobei wir im letzten Schritt die dritte binomische Formel angewendet haben.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. es gelte

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{(2^k)}\right) = \frac{1-x^{(2^{n+1})}}{1-x}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n+1}\left(1+x^{(2^k)}\right) &= \left(1+x^{(2^{n+1})}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{(2^k)}\right) \\
&= \frac{\left(1+x^{(2^{n+1})}\right)\left(1-x^{(2^{n+1})}\right)}{1-x} \quad \text{unter Verwendung von IH} \\
&= \frac{\left(1-\left(x^{(2^{n+1})}\right)^2\right)}{1-x} \quad \text{3. binomische Formel} \\
&= \frac{\left(1-x^{(2^{n+1}\cdot 2)}\right)}{1-x} \\
&= \frac{\left(1-x^{(2^{n+2})}\right)}{1-x}
\end{aligned}$$

womit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen ist.

(b) Wir führen einen Induktionsbeweis über $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 2$:

$$\prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \left(1-\frac{2}{2(2+1)}\right) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{2}\right).$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, d.h. es gelte

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right).$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) &= \left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) \quad \text{unter Verwendung von } \textbf{IH} \\
&= \frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}+\frac{2}{n}-\frac{4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{n(n+1)(n+2)-2n+2(n+1)(n+2)-4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{n(n+1)(n+2)-2n+2(n^2+2n+2)-4}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{n(n+1)(n+2)+2n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{n(n+1)+2n}{n(n+1)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

womit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ bewiesen ist.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 5. *Ungleichungen*

Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a) Für $0 < a < b$ und $k \in \mathbb{N}, k > 1$ gilt

$$0 < \sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b-a}.$$

(b) Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\frac{2ab}{a+b} \leqq \sqrt{ab}.$$

Man nennt $\frac{2ab}{a+b}$ *harmonisches Mittel* und $\sqrt{ab}$ *geometrisches Mittel*.
Zeigen Sie außerdem, dass Gleichheit der Mittel nur für $a = b$ eintritt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) *1. Ungleichung:* Aus $0 < a < b$ folgt $\sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$. Andernfalls wäre $(\sqrt[k]{a})^k = a \geqq b = \left(\sqrt[k]{b}\right)^k$.

2. Ungleichung: Gegenannahme: $\sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} \geqq \sqrt[k]{b-a}$. Aus der Gegenannahme folgt zunächst

$$\sqrt[k]{b} \geqq \sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b-a}.$$

Potenzieren auf beiden Seiten mit k ergibt dann

$$b \geqq \left(\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b-a}\right)^k \geqq a + b - a + \binom{k}{1} \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1} \cdot \sqrt[k]{b-a} > b,$$

wobei wir bei der zweiten Ungleichung den binomischen Lehrsatz angewendet haben. Damit gilt $\sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b-a}$.

(b) Wir betrachten die Differenz der Mittel und zeigen, dass diese positiv ist. Durch einfaches umformen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} &= \frac{\sqrt{ab}(a+b)}{a+b} - \frac{2ab}{a+b} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2ab}{a+b} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2\sqrt{ab}\sqrt{ab}}{a+b} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b} \\
&= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \geqq 0,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die binomische Formel angewendet haben. Aus der letzten Zeile ist sofort ersichtlich, dass die linke Seite 0 ergibt, falls $a = b$.

Aufgabe H 6. *Ungleichungen und Betragsungleichungen*

Bestimmen Sie jeweils die $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen.

(a) $3|x-2| > x+1$

Lösungshinweise hierzu: Wir betrachten zuerst den Fall $x \geqq 2$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 3(x-2) &> x+1 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{7}{2} \end{aligned}$$

also $\mathbb{L}_1 = \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$
Für $x < 2$ folgt

$$\begin{aligned} 3(2-x) &> x+1 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4} &> x \end{aligned}$$

un daher $\mathbb{L}_2 = \left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$. Und somit

$$\mathbb{L} = \left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right).$$

(b) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5) < 0$

Lösungshinweise hierzu: Unterscheide folgende Fälle: $x < -5$, $-5 < x < -3$, $-3 < x < -1$, $-1 < x < +2$, $2 < x < 4$, $4 < x$. Im ersten Fall, $x < -5$ stellen wir fest, dass

$$\underbrace{(x+1)}_{<0}\underbrace{(x-2)}_{<0}\underbrace{(x+3)}_{<0}\underbrace{(x-4)}_{<0}\underbrace{(x+5)}_{<0}.$$

also der gesamte Term als Produkt einer ungeraden Anzahl von negativen Faktoren wiederum negativ ist. Für $-5 < x < -3$ gilt

$$\underbrace{(x+1)}_{<0}\underbrace{(x-2)}_{<0}\underbrace{(x+3)}_{<0}\underbrace{(x-4)}_{<0}\underbrace{(x+5)}_{>0}.$$

Das Produkt ist also positiv. Analoges Vorgehen in den verbleibenden Fällen ergibt $\mathbb{L} = \{x \mid x < -5 \ \vee \ -3 < x < -1 \ \vee \ 2 < x < 4\}$.

(c) $|x-3||x-1| > (x+1)|x-5|$

Lösungshinweise hierzu: 1. Fall: $x < 1$: Dann ist auch $x < 3$ und $x < 5$. Wir lösen die Beträge auf und erhalten

$$\begin{aligned} (3-x)(1-x) &> (x+1)(5-x) \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 &> -x^2 + 4x + 5 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 &> 0\,. \end{aligned}$$

Also liegen die in diesem Fall gesuchten Lösungen außerhalb des Intervals, dessen Randpunkte die Nullstellen des Polynoms $x^2 - 4x - 1$ sind [weil der Graph der Polynomfunktion eine nach oben geöffnete Parabel ist]. Diese Nullstellen sind $2 - \sqrt{5}$ und $2 + \sqrt{5}$, zusammen mit $x < 1$ erhalten wir $\mathbb{L}_1 = \{x \mid x < 2 - \sqrt{5}\}$ als Teilmenge der Lösungsmenge.

2. Fall: $1 \leqq x < 3$: Dann gilt auch $x < 5$. Wir lösen wieder die Beträge auf und erhalten in diesem Fall

$$\begin{aligned} (3-x)(x-1) &> (x+1)(5-x) \\ \Leftrightarrow -x^2+4x-3 &> -x^2+4x+5 \\ \Leftrightarrow -3 &> 5\,. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Wir erhalten also keine weitere Teilmenge der Lösungsmenge.
3. Fall: $3 \leqq x < 5$: Auflösung der Beträge liefert in diesem Fall

$$\begin{aligned} (x-3)(x-1) &> (x+1)(5-x) \\ \Leftrightarrow 2x^2-8x-2 &> 0\,. \end{aligned}$$

Die Parabel x^2+4x-1 ist wieder nach oben geöffnet und die Nullstellen sind gegeben durch $2-\sqrt{5}$ und $2+\sqrt{5}$. Da die Lösungsmenge im betrachten Fall wieder außerhalb des Intervalls liegt, dessen Randpunkte die Nullstellen sind, folgt $\mathbb{L}_2 = \{x \mid 2+\sqrt{5} < x < 5\}$ der Lösungsmenge.
4. Fall: $x \geqq 5$: Auflösung aller Beträge liefert

$$\begin{aligned} (x-3)(x-1) &> (x-5)(x+1) \\ \Leftrightarrow 3 &> -5\,. \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist erfüllt, der Beitrag dieses Falls zur Lösungsmenge ist $\mathbb{L}_3 = \{x \geqq 5\}$. Somit ist $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{x \mid x < 2-\sqrt{5} \vee 2+\sqrt{5} < x\}$.

Aufgabe H 7. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die Menge $M_1 \cap M_2$ falls

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2-4 < 0\right\}, \\ M_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2+2y \geqq 0\right\}. \end{aligned}$$

Lösungshinweise hierzu:
Die Menge M_1 beschreibt eine Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{4} = 2$ und Mittelpunkt $(0,0)$, wobei der Kreisrand

$$K_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 = 4\right\}$$

wegen dem strikten Ungleichungszeichen „$<$“ nicht in M_1 enthalten ist. Um M_2 genauer zu betrachten formen wir die zugehörige Gleichung mittels quadratischer Ergänzung wie folgt um:

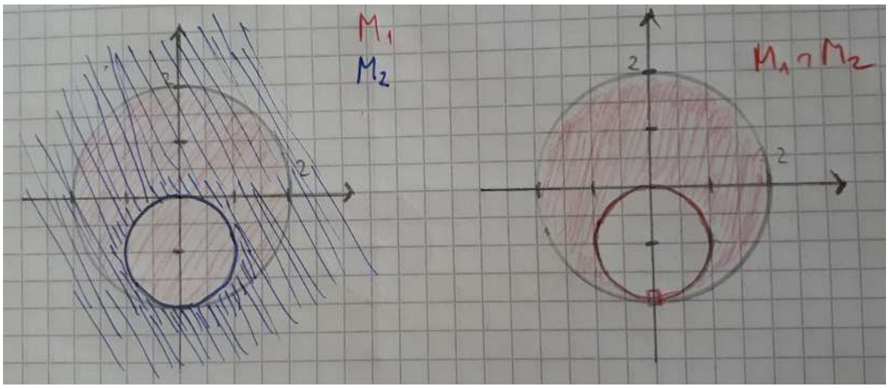
$$\begin{aligned} x^2+y^2+2y &\geqq 0 \\ \Leftrightarrow x^2+y^2+2y+1 &\geqq 1 \\ \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2 &\geqq 1. \end{aligned}$$

Damit beschreibt M_2 diejenigen Punkte im $\mathbb{R}^2$, die sich außerhalb einer Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{1} = 1$ und Mittelpunkt $(0,-1)$ befinden, wobei der Kreisrand $K_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+(y+1)^2 = 1\right\}$ aufgrund des Ungleichungszeichen „$\geqq$“ in M_2 enthalten ist.

Für die Menge $M_1 \cap M_2$ gilt dann, dass sie aus der Menge der Punkten besteht die in M_1 enthalten sind und in M_2, wobei der Kreisrand K_2 bis auf den Punkt $(0,-2)$ enthalten ist, dass heißt,

$$K_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y+1)^2 = 1\right\} \setminus \{(0,-2)\}$$

ist in $M_1 \cap M_2$ enthalten.



(b) Skizzieren Sie die Menge $M_3 \setminus M_4$ falls

$$M_3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (y-1)^2 \geqq 1 - (x-1)^2\right\},$$
$$M_4 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x-y| \leqq 1\right\}.$$

Lösungshinweise hierzu:
Die Menge M_3 beschreibt Punkte im $\mathbb{R}^2$ die sich außerhalb einer Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{1} = 1$ und Mittelpunkt $(1,1)$, wobei der Kreisrand

$$K_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\right\}$$

wegen dem nicht strikten Ungleichungszeichen „$\geqq$“ in M_3 enthalten ist.
Um M_4 genauer zu betrachten machen wir folgende Fallunterscheidung:
1. Fall: $x - y \geqq 0 \Leftrightarrow x \geqq y$.
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & |x-y| \leqq 1 \\ \Leftrightarrow\ & x - y \leqq 1 \\ \Leftrightarrow\ & y \geqq x - 1. \end{aligned}$$

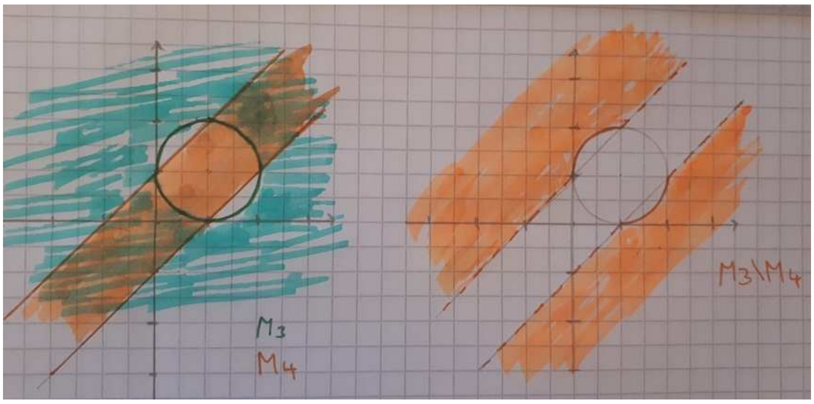
Also besteht der 1. Fall aus allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ für die $x \geqq y$ und $y \geqq x-1$ erfüllt ist. Das bedeutet, die Punkte liegen zwischen der Geraden $y = x-1$ und der 1. Winkelhalbierenden $x = y$, sowie auf der Geraden und der Winkelhalbierenden.
2. Fall: $x - y < 0 \Leftrightarrow x < y$.
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & |x-y| \leqq 1 \\ \Leftrightarrow\ & -(x-y) \leqq 1 \\ \Leftrightarrow\ & y \leqq x + 1. \end{aligned}$$

Also besteht der 1. Fall aus allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ für die $x < y$ und $y \leqq x+1$ erfüllt ist. Das bedeutet, die Punkte liegen zwischen der Geraden $y = x+1$ und der 1. Winkelhalbierenden $x = y$ sowie auf der Geraden.

Insgesamt liegen die Punkte von M_4 zwischen den Geraden $y = x + 1$ und $y = x - 1$ und auf den Geraden $y = x + 1$ und $y = x - 1$.

Die Differenz $M_3 \setminus M_4$ sind dann diejenigen Punkte im $\mathbb{R}^2$, die in M_3 liegen, aber nicht in M_4.



Aufgabe H 8. *Abbildungen*

Untersuchen Sie, welche Werte die folgenden Abbildungen jeweils gar nicht / genau einmal / mehrmals annehmen.

(a) $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \colon n \mapsto \binom{n+1}{n}$

Lösungshinweise hierzu: Es gilt $\binom{n+1}{n} = \frac{(n+1)!}{1\, n!} = n + 1$. Damit ist $f(n) = n + 1$. f nimmt jeden natürliche Zahl n mit $n \geqq 2$ an, da für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ $f(n-1) = n$ und $n - 1 \in \mathbb{N}$ gilt. f nimmt aber keinen Wert mehr als einmal an, da aus $n \neq m$ $f(n) = n + 1 \neq m + 1 = f(m)$ folgt.

(b) $g \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto \frac{x^2}{|x|}$

Lösungshinweise hierzu: Für $x > 0$ gilt

$$g(x) = \frac{x^2}{x} = x.$$

Für $x < 0$ gilt

$$g(x) = \frac{x^2}{-x} = -x.$$

g nimt jeden Wert aus $\mathbb{R}^+$ an, da für alle $y \in \mathbb{R}^+$ auch $y \neq 0$ ist und $g(y) = y$ gilt. Weiterhin gilt für ein beliebiges $y \in \mathbb{R}^+$ aber auch $g(-y) = y$, daher wird jeder Wert aus $\mathbb{R}^+$ zweimal angenommen.

(c) $h \colon [\frac{1}{3}, 1] \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \big||3\,x - 1| - 1\big| + \big||x| - 1\big|$

Lösungshinweise hierzu: Für $\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1$ gilt $0 \leqq 3x - 1 \leqq 2$. Es folgt $||3x - 1| - 1| = |3x - 2|$. Außerdem gilt $-\frac{2}{3} \leqq |x| - 1 \leqq 0$ und daher $||x| - 1| = -(x - 1)$. Damit können wir h folgendermaßen umschreiben:

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ 3 - 4x, & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right). \end{cases}$$

Es gilt für $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{2}{3} \leqq x \leqq 1$ die Abschätzung $\frac{1}{3} \leqq 2x - 1 \leqq 1$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{3} \leqq x < \frac{2}{3}$ gilt die Abschätzung $\frac{1}{3} < 3 - 4x \leqq \frac{5}{3}$. Somit nimmt h keine Werte

außerhalb von $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$ an.
Sei $\tilde{x} := -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ und $\bar{x} := -\frac{y}{4} - \frac{3}{4}$. Dann gilt für $y \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ $\frac{2}{3} \leqq \tilde{x} \leqq 1$. Weiterhin gilt für $y \in \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$ $\frac{1}{3} \leqq \bar{x} < \frac{2}{3}$. Damit folgt für $y \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ $h(\bar{x}) = h(\tilde{x}) = y$, daher werden diese Werte zweifach angenommen. Der Wert $y = \frac{1}{3}$ wird mit Urbild $\tilde{x}$ einmal angenommen, genauso wie die Werte $y \in \left(1, \frac{5}{3}\right]$ mit Urbild $\bar{x}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 9. *Abbildungen*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto (\sin(x), -\cos(x))$. Untersuchen Sie f auf Bijektivität.

(b) Sei $g\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}\colon z \mapsto \frac{1}{z-\mathrm{i}}$. Untersuchen Sie g auf Bijektivität.

(c) Sei $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (x+2y, x-y)$. Untersuchen Sie h auf Bijektivität.

(d) Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung $j : [0,2] \to [2,5]$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) f ist nicht injektiv, weil (z.B.) $f(0) = (0,-1) = f(2\pi)$.
Weil $|\sin(x)| \leqq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt (z.B.), dass es keine reelle Zahl x gibt mit $f(x) = (2,0)$, und deshalb ist f nicht surjektiv.
Eine Funktion ist genau dann bijektiv, wenn es injektiv sowohl als auch surjektiv ist. Es folgt damit, dass f nicht bijektiv ist.

(b) Seien $z, w \in \mathbb{C} \smallsetminus \{\mathrm{i}\}$ mit $g(z) = g(w)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-\mathrm{i}} = \frac{1}{w-\mathrm{i}} \quad &\implies \quad z-\mathrm{i} = w-\mathrm{i} \\ &\implies \quad z = w \end{aligned}$$

und deshalb ist g injektiv. Sei weiter $u \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Dann gilt, für $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{\mathrm{i}\}$, dass

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{z-\mathrm{i}} \quad &\iff \quad \frac{1}{u} = z-\mathrm{i} \\ &\iff \quad \frac{1}{u} + \mathrm{i} = z. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $g(\frac{1}{u} + \mathrm{i}) = u$ für alle $u \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, und deshalb ist g surjektiv. Weil g injektiv sowohl als auch surjektiv ist, ist es auch bijektiv.

(c) Um die Surjektivität nachzuweisen, sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert mit $h(x,y) = (a,b)$. D.h. wir suchen eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y &= a \\ x - y &= b \end{aligned}$$

Dazu lösen wir die zweite Gleichung nach x auf und erhalten $x = b + y$. Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \frac{a+2b}{3} \\ y &= \frac{a-b}{3}. \end{aligned}$$

Für diese Wahl von (x,y) gilt also $h(x,y) = (a,b)$. Da $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig war, ist h surjektiv. Für die Untersuchung auf Injektivität nehmen wir an, dass

$$h(x_1,y_1) = h(x_2,y_2) = (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

gilt. Obige Umformung zeigt, dass dann

$$x_1 = \frac{a+2b}{3}$$
$$y_1 = \frac{a-b}{2}.$$

und

$$x_2 = \frac{a+2b}{3}$$
$$y_2 = \frac{a-b}{3}.$$

gelten muss. Also ist $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$; die Abbildung ist also injektiv. Bijektivität: Da h injektiv und surjektiv ist, ist h bijektiv.

(d) Beispielsweise: $j(x) = 2 + \frac{3}{2}x$.

Aufgabe H 10. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an und bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil:

$$\frac{3+4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k, \; k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Berechnen Sie die folgende komplexe Zahl mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes:

$$(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^6 \cdot \frac{\mathrm{i}}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}}.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$z_1 := \frac{3+4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(3+4\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}\mathrm{i},$$

sodass $\operatorname{Re} z_1 = \frac{2}{5}$, $\operatorname{Im} z_1 = \frac{11}{5}$. Weiterhin gilt

$$z_2 := \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^k = i^k = \begin{cases} (-1)^n, & \text{für} \quad k = 2n, n \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^n\mathrm{i}, & \text{für} \quad k = 2n+1, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

sodass

$$\operatorname{Re} z_2 = \begin{cases} (-1)^n, & \text{für} \quad k = 2n, n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{für} \quad k = 2n+1, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

und

$$\operatorname{Im} z_2 = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad k = 2n, n \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^n, & \text{für} \quad k = 2n+1, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(b) • Wir formen zunächst $\frac{\mathrm{i}}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}}$ um. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{i}}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}} &= \frac{\mathrm{i}(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i})}{(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i})}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}}{2+2} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}).\end{aligned}$$

Nun berechnen wir $(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^6$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^6 &= \binom{6}{0}(-\sqrt{3})^6 + \binom{6}{1}(-\sqrt{3})^5\cdot\mathrm{i}^1 + \binom{6}{2}(-\sqrt{3})^4\cdot\mathrm{i}^2\\ &\quad+\binom{6}{3}(-\sqrt{3})^3\cdot\mathrm{i}^3 + \binom{6}{4}(-\sqrt{3})^2\cdot\mathrm{i}^4 + \binom{6}{5}(-\sqrt{3})^1\cdot\mathrm{i}^5\\ &\quad+\binom{6}{6}\mathrm{i}^6\\ &= (-\sqrt{3})^6 + 6(-\sqrt{3})^5\cdot\mathrm{i}^1 + 15(-\sqrt{3})^4\cdot\mathrm{i}^2\\ &\quad+20(-\sqrt{3})^3\cdot\mathrm{i}^3 + 15(-\sqrt{3})^2\cdot\mathrm{i}^4 + 6(-\sqrt{3})^1\cdot\mathrm{i}^5\\ &\quad+1\mathrm{i}^6\\ &= 27 + 6(-\sqrt{3})^5\cdot\mathrm{i} - 15\cdot 9\\ &\quad+20(-\sqrt{3})^3\cdot(-\mathrm{i}) + 15\cdot 3\cdot 1 + 6(-\sqrt{3})\cdot\mathrm{i}\\ &\quad-1\\ &= 27-135+45-1+(-\sqrt{3})\mathrm{i}\left(6\cdot(-\sqrt{3})^4 - 20\cdot(-\sqrt{3})^2+6\right)\\ &= 27-135+45-1+(-\sqrt{3})\mathrm{i}\,(6\cdot 9-20\cdot 3+6)\\ &= -64.\end{aligned}$$

Dann erhalten wir insgesamt

$$(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^6\cdot\frac{\mathrm{i}}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}} = \frac{-64}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}) = -16(\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}).$$

Aufgabe H 11. *Komplexe Gleichungen*

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(a) $\left\{n\in\mathbb{Z}\,\middle|\, \mathrm{i}^n\in\mathbb{R}\right\}$, **(b)** $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, z\overline{z}-2\mathrm{i}\overline{z}=1+2\mathrm{i}\right\}$,

(c) $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, z^2+|z|=-2\right\}$, **(d)** $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, z\overline{z}=4\right\}\cap\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\, z^2=-4\right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für gerade Zahlen $n\in\mathbb{Z}$, d.h. $n=2k$ für ein $k\in\mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{i}^n=\mathrm{i}^{2k}=(-1)^k\in\mathbb{R}$. Für ungerade Zahlen $n\in\mathbb{Z}$, d.h. $n=2k+1$ für ein $k\in\mathbb{Z}$ gilt $\mathrm{i}^n=\mathrm{i}^{2k+1}=(-1)^k\cdot\mathrm{i}\notin\mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir

$$\left\{n\in\mathbb{Z}\,\middle|\, \mathrm{i}^n\in\mathbb{R}\right\} = 2\mathbb{Z},$$

also die Menge der geraden ganzen Zahlen.

(b) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x{+}y\mathrm{i}$. Die Gleichung ist dann $(x{+}y\mathrm{i})(x{-}y\mathrm{i}) - 2\mathrm{i}(x{-}y\mathrm{i}) = 1{+}2\mathrm{i}$. Vereinfachen ergibt $x^2 + y^2 - 2y - 2\mathrm{i}x = 1 + 2\mathrm{i}$. Folglich sind

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y &= 1 \\ -2x &= 2 \end{cases}$$

und $x = -1$, $y = 0$ oder $y = 2$. Daher ist die Lösungsmenge gegeben durch $\{-1, -1+2\mathrm{i}\}$.

(c) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + y\mathrm{i}$. Die Gleichung ist dann $(x + y\mathrm{i})^2 + |(x + y\mathrm{i})| = -2$. Vereinfachen ergibt $x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} + \sqrt{x^2 + y^2} = -2$. Folglich sind

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} &= -2 \\ 2xy &= 0 \end{cases}$$

- $x = 0$: Dann ist $-y^2 + y + 2 = 0$, falls $y \geqq 0$ und $-y^2 - y + 2 = 0$, falls $y < 0$. Wir erhalten $y = 2$ im ersten und $y = -2$ im zweiten Fall. Es gibt also zwei Lösungen: $z = 2\mathrm{i}$ sowie $z = -2\mathrm{i}$.
- $y = 0$: Dann ist $x^2 + x + 2 = 0$, falls $x \geqq 0$ und $x^2 - x + 2 = 0$, falls $x < 0$. In beiden Fallen erhalten wir keine Lösung.

Daher ist die Lösungsmenge gegeben durch $\{2\mathrm{i}, -2\mathrm{i}\}$.

(d) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + y\mathrm{i}$. Die Gleichungen sind dann $(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i}) = 4$ und $(x + y\mathrm{i})^2 = -4$. Daraus folgt $x^2 + y^2 = 4$ und $x^2 - y^2 + 2xiy = -4$. Folglich,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 - y^2 &= -4 \\ 2xy &= 0 \end{cases}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt durch Addition der Gleichungen $x = 0$ und daraus $y = 2$ oder $y = -2$. Mit dieser Wahl von x, y ist auch die dritte Gleichung erfüllt. Die Lösungsmenge ist folglich gegeben durch $\{2\mathrm{i}, -2\mathrm{i}\}$.

Aufgabe H 12. *Komplexe Mengen*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(a) $M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - 1| = |z + 1| \right\}$,

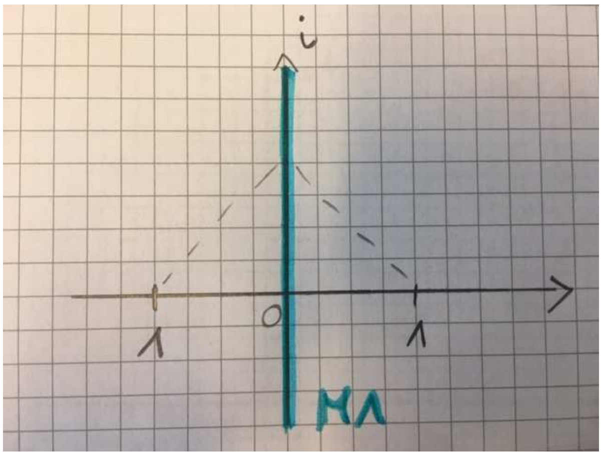
(b) $M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 < |z - \mathrm{i}| < 2 \right\}$,

(c) $M_3 := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \geqq 1, |\mathrm{Re}\, z| \leqq \frac{1}{2}, \mathrm{Im}\, z > 0 \right\}$.

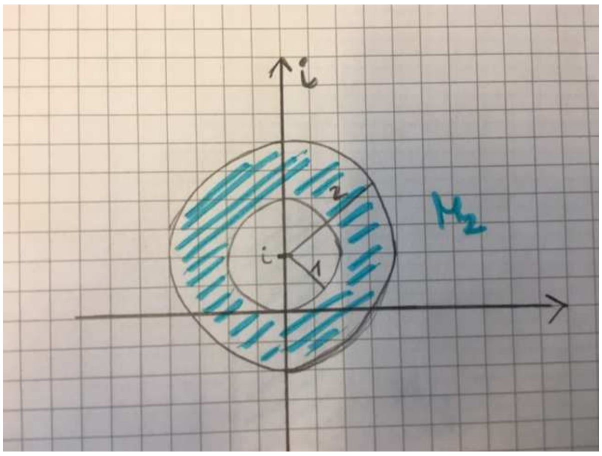
Lösungshinweise hierzu: Sei $z = x + y\mathrm{i}$. Quadrieren ergibt

$$(x + 1)^2 + y^2 = (x - 1)^2 + y^2.$$

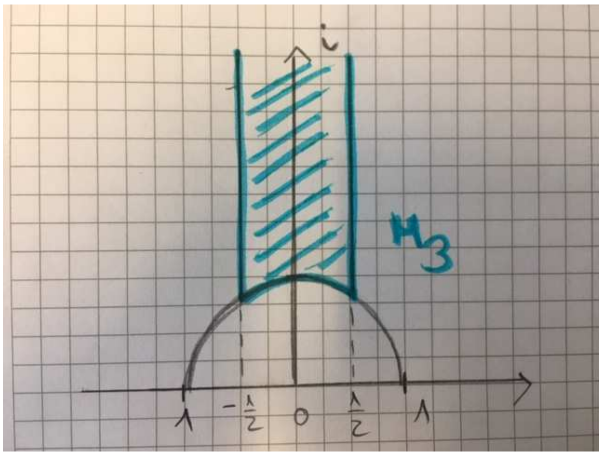
Ausmultiplizieren und Vereinfachen ergibt $x = 0$. Folglich entspricht die Menge M_1 der imaginären Achse.



Die Menge M_2 beschreibt eine Kreisgleichung um i mit Radius zwischen 1 und 2. Die Ränder sind durch echtes Gleichheitszeichen nicht enthalten.



Innerhalb der Menge M_3 beschreibt $|z| = |z-0| \geqq 1$ diejenigen Punkte $z \in \mathbb{Z}$ die außerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius 1 oder auf diesem Kreis liegen. Da $|\text{Re}\, z| \leqq \frac{1}{2}$ gilt, können wir die Punkte außerhalb des eben beschriebenen Kreises beschränken, auf diejenigen die Realteil kleiner oder gleich $1/2$ besitzen. Da $\text{Im}\, z > 0$ können wir nun auf die Punkte einschränken, die oberhalb der reellen Achse liegen.



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 13. *Polynomdivision*

Verwenden Sie Polynomdivision mit Rest, um für die nachfolgenden Polynome $f(X)$ und $g(X)$ jeweils Polynome $p(X)$ und $r(X)$ mit $f(X) = p(X)g(X) + r(X)$ zu bestimmen, wobei $r(X)$ kleineren Grad besitzt als $g(X)$.

(a) $f(X) = X - 5$ und $g(X) = X^3 - 2$;

(b) $f(X) = 6X^8 + 14X^7 - 2X^6 + 3X^5 - 29X^4 - 61X^3 - 124X^2 - 456X + 64$ und $g(X) = 3X^2 + 7X - 1$;

(c) $f(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 5$ und $g(X) = 3X^2 - 7X$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{array}{l} X - 5 : (X^3 - 2) = 0 \\ \underline{\qquad\quad 0} \\ X - 5, \end{array}$$

also ist $f(X) = p(X)g(X) + r(X)$ mit $p(X) = 0$ und $r(X) = X - 5$.

(b) Wir berechnen

$$\begin{array}{l}
6X^8 + 14X^7 - 2X^6 + 3X^5 - 29X^4 - 61X^3 - 124X^2 - 456X + 64 : (3X^2 + 7X - 1) = 2X^6 + X^3 - 12X^2 + 8X - 64 \\
\underline{6X^8 + 14X^7 - 2X^6} \\
\qquad 3X^5 - 29X^4 - 61X^3 - 124X^2 - 456X + 64 \\
\qquad \underline{3X^5 + 7X^4 - X^3} \\
\qquad\quad -36X^4 - 60X^3 - 124X^2 - 456X + 64 \\
\qquad\quad \underline{-36X^4 - 84X^3 + 12X^2} \\
\qquad\qquad 24X^3 - 136X^2 - 456X + 64 \\
\qquad\qquad \underline{24X^3 + 56X^2 - 8X} \\
\qquad\qquad\quad -192X^2 - 448X + 64 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-192X^2 - 448X + 64} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

die gesuchten Polynome sind somit $p(X) = 2X^6 + X^3 - 12X^2 + 8X - 64$ und $r(X) = 0$.

(c) Es gilt

$$\begin{array}{l}
X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 5 : (3X^2 - 7X) = \frac{1}{3}X^2 + \frac{1}{9}X + \frac{34}{27} \\
\underline{X^4 - \frac{7}{3}X^3} \\
\quad \frac{1}{3}X^3 + 3X^2 - 4X + 5 \\
\quad \underline{\frac{1}{3}X^3 - \frac{7}{9}X^2} \\
\qquad \frac{34}{9}X^2 - 4X + 5 \\
\qquad \underline{\frac{34}{9}X^2 - \frac{238}{27}X} \\
\qquad\quad \frac{130}{27}X + 5
\end{array}$$

Also ist $p(X) = 1/3X^2 + 1/9X + 34/27$ und $r(X) = 130/27X + 5$.

Aufgabe H 14. *Komplexe Lösungen von Gleichungen*

Geben Sie jeweils alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen an, und zeichnen Sie die Lösungsmenge in der komplexen Zahlenebene.

(a) $z^3 + 3\mathrm{i}z^2 + (1+6\mathrm{i})z = 2 + 9\mathrm{i}$,

(b) $(1-\sqrt{3}\mathrm{i})z^6 = 4z^2$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch den Vergleich der Koeffizienten auf jeder Seite sehen wir, dass $z = 1$ eine Lösung ist. Also ist das Polynom

$$z^3 + 3\mathrm{i}z^2 + (1+6\mathrm{i})z - (2+9\mathrm{i})$$

durch $(z-1)$ teilbar. Nach Polynomdivision sehen wir, dass

$$z^3 + 3\mathrm{i}z^2 + (1+6\mathrm{i})z - (2+9\mathrm{i}) = (z-1)(z^2 + (1+3\mathrm{i})z + (2+9\mathrm{i}))$$

ist. Also gibt es zwei weitere Lösungen, die Wurzeln von $z^2+(1+3\mathrm{i})z+(2+9\mathrm{i})$. Genau wie quadratische Polynome mit reellen Koeffizienten hat dieses Polynom die Wurzeln

$$z = \frac{-1-3\mathrm{i} \pm \sqrt{(1+3\mathrm{i})^2 - 4(2+9\mathrm{i})}}{2} = \frac{-1-3\mathrm{i} \pm \sqrt{-16-30\mathrm{i}}}{2}.$$

Bemerken Sie, dass wir hier $\sqrt{-16-30\mathrm{i}}$ für eine der beiden Lösungen von $x^2 = -16-30\mathrm{i}$ schreiben; im Gegensatz zu positiven reellen Zahlen gibt es keine bevorzugte Quadratwurzel. Weil diese Quadratwurzel mit beiden möglichen Vorzeichen in der Formel auftritt, spielt diese Wahl am Ende keine Rolle.

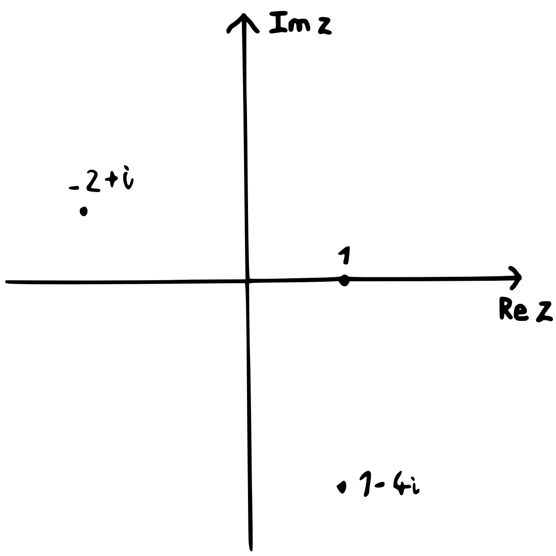
Also suchen wir $x = a + b\mathrm{i}$ so, dass $x^2 = -16-30\mathrm{i}$, dass heißt $(a^2-b^2) + 2ab\mathrm{i} = -16-30\mathrm{i}$, also $a^2 - b^2 = -16$ und $2ab = -30$. In Anbetracht der Faktorisierungen von $\frac{-30}{2} = -15$, sehen wir dass die Lösungen $a = 3$, $b = -5$, und $a = -3$, $b = 5$ sind. Also sind die zwei weiteren Lösungen unseres Polynoms

$$z = \frac{-1-3\mathrm{i}+3-5\mathrm{i}}{2} = 1-4\mathrm{i}$$

und

$$z = \frac{-1-3\mathrm{i}-3+5\mathrm{i}}{2} = -2+\mathrm{i}.$$

Insgesamt haben wir die drei Lösungen $z = 1$, $z = 1-4\mathrm{i}$ und $z = -2+\mathrm{i}$, und die Lösungsmenge ist wie in der folgenden Skizze.



(b) Wir bemerken sofort, dass $z = 0$ eine Lösung ist. Die Lösungen ungleich 0 sind auch Lösungen von $(1 - \sqrt{3}\mathrm{i})z^4 = 4$, oder von

$$z^4 = \frac{4}{1 - \sqrt{3}\mathrm{i}}.$$

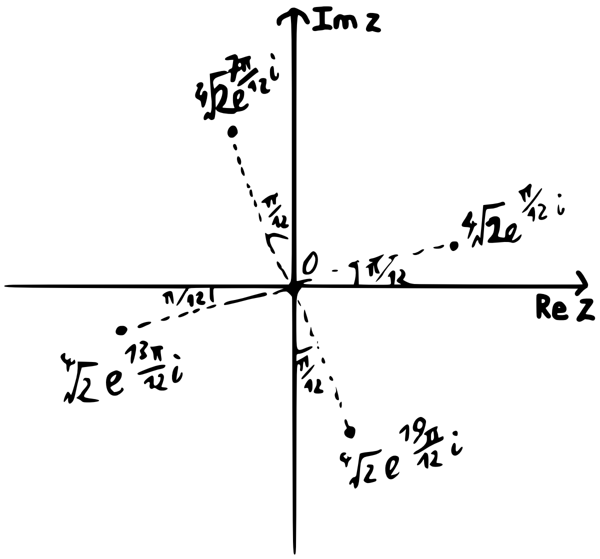
Nach Aufgabe **P13** hat $1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ in Polarkoordinaten die Darstellung $2\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}}$, also ist

$$\frac{4}{1 - \sqrt{3}} = \frac{4}{2}\mathrm{e}^{-\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}}$$

Dann sind die Lösungen der Gleichung

$$z^4 = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}}$$

$z = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{(\frac{1+6k}{12})\pi\mathrm{i}}$ für $k = 0, 1, 2, 3$. Insgesamt sind die Lösungen der ursprünglichen Gleichung diese vier zusammen mit $z = 0$, und die Lösungsmenge ist wie in der folgenden Skizze.



Aufgabe H 15. *Polarkoordinaten*

Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}\left(\frac{z^3}{1+\mathrm{i}}\right) \geqq 0,\ |z - \mathrm{i}| \leqq 2 \right\}.$$

Skizzieren Sie die Menge M in der komplexen Zahlenebene.

Lösungshinweise hierzu: Die Menge M ist die Schnittmenge von

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}\left(\frac{z^3}{1+\mathrm{i}}\right) \geqq 0 \right\}$$

und

$$M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}|^2 \leqq 2\}.$$

Die Menge M_2 ist die Scheibe mit Radius 2 und Mittelpunkt i. Um M_1 zu berechnen, schreiben wir $z = r\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{i}}$ in Polarkoordinaten, also $z^3 = r^3\mathrm{e}^{3\varphi\mathrm{i}}$. Wie in Aufgabe **P13** folgert man $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$, also ist

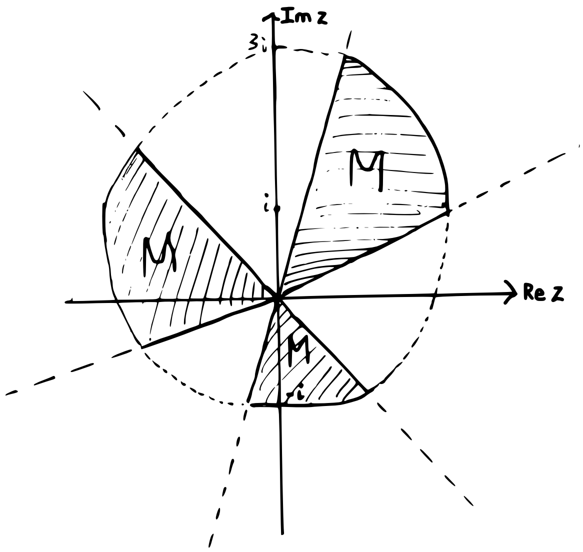
$$\frac{\sqrt{2}z^3}{1+\mathrm{i}} = r^3\mathrm{e}^{(3\varphi - \frac{\pi}{4})\mathrm{i}}.$$

Wir bemerken, dass $\operatorname{Im}\left(\frac{z^3}{1+\mathrm{i}}\right) \geqq 0$ genau dann, wenn das Argument von $\frac{\sqrt{2}z^3}{1+\mathrm{i}}$ bzw. $\frac{z^3}{1+\mathrm{i}}$ zwischen 0 und π liegt, also mü ssen wir dieses Argument berechnen.

Wegen $\varphi \in [0, 2\pi)$ ist $3\varphi - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{23\pi}{4})$. Also liegt das Argument von $\frac{z^3}{1+\mathrm{i}}$ zwischen 0 und π genau dann, wenn $3\varphi - \frac{\pi}{4}$ in $[0, \pi]$, $[2\pi, 3\pi]$ oder $[4\pi, 5\pi]$ liegt. Im ersten Fall brauchen wir

$$0 \leqq 3\varphi - \frac{\pi}{4} \leqq \pi \iff \frac{\pi}{12} \leqq \varphi \leqq \frac{5\pi}{12}.$$

Ähnlich sind die anderen Möglichkeiten $\frac{9\pi}{12} \leqq \varphi \leqq \frac{13\pi}{12}$ und $\frac{17\pi}{12} \leqq \varphi \leqq 21\pi 12$. Es ergibt sich folgende Skizze.



Die Menge M_1 besteht aus den drei Kegeln, die durch gestrichelte Linien gekennzeichnet sind. Die Menge M_2 ist die durch den gestrichelten Kreis begrenzte Scheibe. Die Menge M ist die Schnittmenge, gekennzeichnet durch den schattierten Bereich (einschließlich der Grenze).

Aufgabe H 16. *Untervektorräume*

Es sei $\mathbb{C}^{2\times 2}$ die Menge aller komplexen (2×2)–Matrizen. Für alle komplexwertigen Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ sowie $B = \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)$ und für jede komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen, ohne es beweisen zu müssen, annehmen, dass $\mathbb{C}^{2\times 2}$ auf diese Weise zu einem $\mathbb{C}$–Vektorraum wird. Überprüfen Sie

(a) für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ die Teilmenge $\{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \mid a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist;

(b) ob die Teilmenge $\{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}\}$ einen Untervektorraum von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ bildet.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nur für $\alpha = 0$ ist die angegebene Menge $V_\alpha := \{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \mid a_{12},\, a_{21},\, a_{22} \in \mathbb{C}\}$ ein Untervektorraum: Ist nämlich $\alpha \neq 0$, so liegt weder das neutrale Element von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ (die Nullmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) in V_α, noch liegt die Summe zweier Matrizen $A, B \in V_\alpha$ wieder in V_α, denn

$$A + B = \begin{pmatrix} \alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

und $2\alpha \neq \alpha$, d. h. $A + B \notin V_\alpha$. Für $A \in V_\alpha$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 1$, liegt auch λA nicht wieder in V_α, da

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix},$$

aber $\lambda\alpha \neq \alpha$ gilt.

Dass V_0 ein Untervektorraum ist, sieht man wie folgt: Das neutrale Element von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ liegt in V_0. Sind $A, B \in V_0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gilt zudem

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix},$$

also $A + B \in V_0$, und analog ist $\lambda A \in V_0$, denn

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

(b) Die Teilmenge $W := \{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \mid a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{2\times 2}$: Zwar liegt das neutrale Element von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ in W und auch die Summe zweier Elemente $A, B \in W$ ist wieder in W enthalten, aber nicht für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $A \in W$ ist λA wieder ein Element von W. Wähle beispielsweise $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\lambda = \mathrm{i}$. Dann ist

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und dies ist kein Element von W, da i keine reelle Zahl ist. Also ist W kein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 17. *Ebenen und Geraden*

(a) Liegen die Geraden $g = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in einer Ebene?

(b) Zeigen Sie, dass das Viereck $ABCD$ mit $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegt. Berechnen Sie die Kantenlängen des Vierecks $ABCD$. Berechnen Sie jeweils den Cosinus des Innenwinkels bei A und D.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Geraden g und h sind nicht parallel, da die Richtungsvektoren linear unabhängig sind. Daher liegen g und h genau dann in einer Ebene, wenn sie sich schneiden. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn es $r, s \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Zeile erhalten wir $s = 2r$. Setzen wir dies in die dritte Zeile ein, so ergibt sich $r = -2$ und schließlich $s = -4$. Mit dieser Belegung ist auch die zweite Zeile erfüllt. Also schneiden sich die beiden Geraden (im Punkt $(-7, -8, 1)^\mathsf{T}$, aber das war nicht gefragt).

Alternative: Da eine Ebene, die sowohl g als auch h enthält, insbesondere g enthalten und zu h parallel sein muss, ist der einzige Kandidat die Ebene

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn nun irgendein Punkt von h in E liegt, so liegt ganz h in E. Die Punktprobe für den Stützvektor von h führt dann auf dieselbe Vektorgleichung wie oben.

(b) Die Punkte A, B, C definieren die Ebene

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ -9/5 \\ 12/5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Punktprobe für D führt dann auf die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix}7\\2\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\3\\-4\end{pmatrix}.$$

Aus der dritten Zeile ergibt sich $r = s$, was direkt zur Folge hat, dass auch die Gleichung in der zweiten Zeile gelöst wird. Schließlich ergibt Einsetzen in die erste Zeile, dass $s = -\frac{6}{5} = r$. Insbesondere ist also die Vektorgleichung lösbar und $D \in E$.

Die Kantenlängen sind gerade die Längen der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{DA}$:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}| &= \left|\begin{pmatrix}7\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\2\\-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5,\\
|\overrightarrow{BC}| &= \left|\begin{pmatrix}4\\1/5\\-3/5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\-1\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\6/5\\-8/5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2+\left(\tfrac{6}{5}\right)^2+\left(-\tfrac{8}{5}\right)^2}\\
&= \sqrt{9+\tfrac{36}{25}+\tfrac{64}{25}} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13},\\
|\overrightarrow{CD}| &= \left|\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\1/5\\-3/5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\9/5\\-12/5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+\tfrac{81}{25}+\tfrac{144}{25}}\\
&= \sqrt{9+\tfrac{225}{25}} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2},\\
|\overrightarrow{DA}| &= \left|\begin{pmatrix}7\\2\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 6.
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen den Winkel bei A mit α und den Winkel bei D mit δ. Dann ist

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\langle\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AD}\rangle}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{5\cdot 6} = 0,\\
\cos(\delta) &= \frac{\langle\overrightarrow{DC}|\overrightarrow{DA}\rangle}{|\overrightarrow{DC}|\cdot|\overrightarrow{DA}|} = \frac{\left\langle\begin{pmatrix}3\\-9/5\\12/5\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{3\sqrt{2}\cdot 6} = \frac{18}{18\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 18. *Lineare (Un-)Abhängigkeit*

Gegeben seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{C}^3$: $a = \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{i} \\ -4+\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 2+10\mathrm{i} \\ -4-\mathrm{i} \\ -4-11\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

(a) Betrachten Sie in diesem Aufgabenteil $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Geben Sie eine (möglichst einfache) Basis von $\mathbb{C}^3$ an. Zeigen Sie, dass a, b, c linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass a, b, c linear abhängig sind, wenn man $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet. Geben Sie jeweils an, wie sich a, b, c aus den beiden anderen Vektoren kombinieren lassen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Eine besonders einfache Basis von $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Um zu zeigen, dass a, b, c linear unabhängig sind, betrachten wir $ra + sb + tc \overset{!}{=} 0$ mit reellen r, s, t. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3r + \mathrm{i}r + 2s + 2t + 10\mathrm{i}t &\overset{!}{=} 0 && (I), \\ -r + \mathrm{i}s - 4t - \mathrm{i}t &\overset{!}{=} 0 && (II), \\ \mathrm{i}r - 4s + \mathrm{i}s - 4t - 11\mathrm{i}t &\overset{!}{=} 0 && (III). \end{aligned}$$

Damit die Gleichungen gelten, müssen sowohl Real- als auch Imaginärteil gleich Null sein. Da r, s, t reell sind folgt daher aus $\mathrm{Re}\,(II) \overset{!}{=} 0$, dass $r = -4t$ und aus $\mathrm{Im}\,(I) \overset{!}{=} 0$, dass $r = -10t$, was nur geht, falls $r = t = 0$. Setzen wir dies in die Gleichung $\mathrm{Im}\,(II) \overset{!}{=} 0$ ein, so ergibt sich $s = t = 0$. Also ist das Gleichungssystem $(I) - (III)$ nur trivial lösbar, womit die Vektoren a, b, c linear unabhängig sind.

(b) Betrachten wir nun $\mathbb{C}^4$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, so führt die Untersuchung auf lineare Abhängigkeit wieder auf das Gleichungssystem $(I) - (III)$ – nur mit dem Unterschied, dass diesmal $r, s, t \in \mathbb{C}$ sind. Aus (II) gewinnen wir $r = \mathrm{i}s + (-4 - \mathrm{i})t$. Setzen wir dies in (III) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \mathrm{i}r + (-4 + \mathrm{i})s + (-4 - 11\mathrm{i})t \overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -s + (1 - 4\mathrm{i})t + (-4 + \mathrm{i})s + (-4 - 11\mathrm{i})t = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (-5 + \mathrm{i})s + (-3 - 15\mathrm{i})t = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (-5 + \mathrm{i})s = \underbrace{(3 + 15\mathrm{i})}_{=-3\mathrm{i}(-5+\mathrm{i})} t \\ \Leftrightarrow \quad & s = -3\mathrm{i}t. \end{aligned}$$

Dies ergibt dann $r = 3t + (-4 - \mathrm{i})t = (-1 - \mathrm{i})t$. Einsetzen in (I) liefert schließlich

$$\begin{aligned} & (3 + \mathrm{i}) \cdot (-1 - \mathrm{i})t - 6\mathrm{i}t + (2 + 10\mathrm{i})t \overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (-2 - 4\mathrm{i})t - 6\mathrm{i}t + (2 + 10\mathrm{i})t = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 0. \end{aligned}$$

Das bedeutet,

$$(-1 - \mathrm{i})ta + (-3\mathrm{i})tb + tc = 0, \quad \forall t \in \mathbb{C},$$

sodass der Nullvektor auf nichttriviale Weise aus a, b und c linearkombiniert werden kann. Insbesondere haben wir mit $t = -1$, dass

$$c = (1 + \mathrm{i})a + 3\mathrm{i}b,$$

mit $t = \frac{1}{3\mathrm{i}} = -3\mathrm{i}$, dass

$$b = (-3 + 3\mathrm{i})a + (-3\mathrm{i})c,$$

und schließlich mit $t = \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i})$, dass

$$a = \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right) b + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) c.$$

Aufgabe H 19.
Sei V der Raum aller Polynomfunktionen auf $[0,1]$ mit Grad maximal 3, d. h.

$$V = \{p\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

Dieser Raum kann mit dem Skalarprodukt

$$\langle p|q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x$$

für $p, q \in V$ versehen werden. Gegeben seien nun folgende Polynome:

$$p_1(x) = x^3 + x, \quad p_2(x) = x^2 - 7, \quad p_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

(a) Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\langle p_1|p_2\rangle, \langle p_1|p_3\rangle$ und $\langle p_2|p_3\rangle$.

(b) Geben Sie ein Polynom der Form $ax^3 + bx^2$ aus V mit $a \neq 0, b \neq 0$ an, dessen Norm gleich 1 ist.

Lösungshinweise hierzu: Sei $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $q = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ in V. Wir haben

$$\begin{aligned} pq =& aAx^6 + (aB + Ab)x^5 + (aC + bB + cA)x^4 + (aD + bC + cB + dA)x^3 \\ &+ (bD + cC + dB)x^2 + (cD + dC)x + dD. \end{aligned}$$

Mittels Integration folgt

$$\begin{aligned} \langle p|q\rangle =& \frac{1}{7}aA + \frac{1}{6}(aB + Ab) + \frac{1}{5}(aC + bB + cA) \\ &+ \frac{1}{4}(aD + bC + cB + dA) + \frac{1}{3}(bD + cC + dB) + \frac{1}{2}(cD + dC) + dD. \end{aligned}$$

(a) Die Koeffizienten von p_1, p_2 respektive p_3 sind $a = c = 1, b = d = 0,$ $A = C = 0, B = 1, D = -7$ respektive $A' = B' = C' = D' = 1$. Also

$$\langle p_1|p_2\rangle = -\frac{29}{6},\ \langle p_2|p_3\rangle = \frac{11}{30} - 14 = -\frac{409}{30} \text{ und } \langle p_1|p_3\rangle = \frac{143}{70}.$$

(b) Für $p = ax^3 + bx^2$ haben wir $|p|^2 = \frac{1}{7}a^2 + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{5}$. Für $|p| = 1$ wird die Gleichung zu

$$\frac{1}{7}a^2 + \frac{b}{3}a + (\frac{b^2}{5} - 1) = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in a deren Lösungen durch

$$a = \frac{-\frac{7b}{3} \pm \sqrt{7(4 - \frac{b^2}{45})}}{2}$$

gegeben sind. Für b so, dass $4 - \frac{b^2}{45} > 0$ ist a eine reelle Zahl. Zum Beispiel können wir $b = \sqrt{45}$ wählen, dann ist $a = \frac{(-7\sqrt{45} \pm 3\sqrt{21})}{6}$.

Aufgabe H 20.

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{C}^{2\times 2}$ aller komplexer 2×2-Matrizen. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \; a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}, a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0 \right\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist.

Lösungshinweise hierzu: Bezeichne mit E die Menge aus der Aufgabenstellung. Die Nullmatrix liegt in E. Wenn $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ in E liegen, haben wir $A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$. Die Summe aller Komponenten von $A+B$ ist also 0 und daher gilt $A+B \in E$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist die Summe aller Einträge von $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$ wieder 0, also gilt $\lambda A \in E$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 21. *Orthonormalbasen*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$.

(a) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$, die ein Vielfaches des Vektors $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ enthält.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die ein Vielfaches von $f(v)$ enthält.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zuerst normieren wir v und erhalten v_1: $|v| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$, also ist $v_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ der erste Basisvektor.

Nun suchen wir ein v_2, so dass $< v_1|v_2 >= 0$ gilt und $|v_2| = 1$. Sei $v_2^* = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, dann ist $< v_1|v_2^* >= 0$ genau dann, wenn $< v|v_2^* >= 0$. Aus $< v|v_2^* >= 2a - 3b = 0$ folgt $a = \frac{3}{2}b$, also z.B. $v_2^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Normieren ergibt $v_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, die ONB ist also gegeben durch $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, sofern es sich tatsächlich um eine Basis handelt.

Dafür bleibt die lineare Unabhängigkeit zu zeigen: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$, dann folgt $2\alpha + 3\beta = 0$ und $-3\alpha + 2\beta = 0$. Aus der ersten Gleichung ergibt sich $\alpha = -\frac{3}{2}\beta$, was wir in die zweite Gleichung einsetzen: $-3(-\frac{3}{2})\beta + 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$. Insgesamt ist also $\alpha, \beta = 0$ und damit ist $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ die gewünschte ONB.

(b) Zuerst bestimmen wir $f(v) = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und sehen, dass allgemein $|f(w)| = \sqrt{y^2 + x^2} = |w|$ gilt für $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Damit ist der erste Basisvektor $\frac{1}{\sqrt{13}}\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Der zweite Basisvekor ist $f(v_2) = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, denn $< f(v_1)|f(v_2) >= 0$ und $|f(v_2)| = |v_2| = 1$. Der dritte Basisvektor muss senkrecht zu $f(v_1)$ und $f(v_2)$ sein, was offensichtlich für $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt ist, außerdem ist $|e_2| = 1$.

Es bleibt die lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha f(v_1) + \beta f(v_2) + \gamma e_2 = 0.$$

Wie in Teil **(a)** erhalten wir $\alpha = \beta = 0$, die zweite Zeile des Gleichungssystems lautet $\gamma = 0$. Damit ist die ONB gegeben durch $f(v_1), f(v_2), e_2$.

Aufgabe H 22. *Hessesche Normalform*

Wir betrachten die Ebene $E \subseteqq \mathbb{R}^3$, die durch die Punkte $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ geht. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E und den Cosinus des Winkels zwischen E und der Ebene $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = 0 \right\}$.

Lösungshinweise hierzu: Der Normalenvektor n von E steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der Ebene. Diese sind zum Beispiel gegeben durch zwei linear unabhängige Verbindungsvektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$. Die Vektoren $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PR} = R - P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig und $n = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor dazu.

Der Abstand d zum Ursprung ist gegeben durch die Gleichung $< n|x >= d$. Wir berechen $< n|P >= \sqrt{1} = 1$ und machen die Probe mit den anderen beiden gegebenen Punkten: $< n|Q >= \sqrt{1} = 1$ und $< n|R >= \sqrt{1} = 1$. Es ist also $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} |x >= 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_2 = 1 \right\}$ die Hessesche Normalform von E.

Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist gegeben durch den Winkel zwischen deren Normalenvektoren. Die zweite gegebene Ebene hat den Normalenvektor $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist der Cosinus zwischen den Ebenen gegeben durch $\cos \alpha = \frac{<e_2|e_3>}{|e_2| \cdot |e_3|} = \frac{0}{1} = 0$. Die Ebenen sind zueinander orthogonal.

Aufgabe H 23. *Lineare Abhängigkeit von Abbildungen*

Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ seien gegeben durch

$$f_1(x) = \cos(x), \qquad f_2(x) = \sin(x), \qquad f_3(x) = \mathrm{e}^x.$$

(a) Als reeller Vektorraum enthält $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ die Abbildung $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Werten Sie diese Abbildung im Punkt $x_0 = 0$ aus.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren f_1, f_2, f_3 linear unabhängig in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ sind.

(c) Finden Sie eine Abbildung $f_4 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ so, dass f_1, f_2, f_3, f_4 linear unabhängige Vektoren sind.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Im Allgemeinen haben wir

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(x) = \lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x) + \lambda_3 \cdot f_3(x),$$

also ist in diesem Fall

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(0) = \lambda_1 \cdot \cos(0) + \lambda_2 \cdot \sin(0) + \lambda_3 \cdot \mathrm{e}^0 = \lambda_1 + \lambda_3.$$

(b) Nehmen wir an, dass $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Das bedeutet

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$0 = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(0) = \lambda_1 + \lambda_3$$

wie in **(a)**. Wir werten $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ an $\frac{\pi}{2}$ und an π aus, und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(\tfrac{\pi}{2}) = \lambda_2 + \lambda_3 \mathrm{e}^{\pi/2}, \\ 0 &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(\pi) = -\lambda_1 + \lambda_3 \mathrm{e}^{\pi}. \end{aligned}$$

Wegen $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ und $-\lambda_1 + \lambda_3 \mathrm{e}^\pi = 0$ ist die Summe

$$(\lambda_1 + \lambda_3) + (-\lambda_1 + \lambda_3 \mathrm{e}^\pi) = (1 + \mathrm{e}^\pi)\lambda_3 = 0.$$

Wegen $\mathrm{e}^\pi > 0$ ist $1 + \mathrm{e}^\pi \neq 0$, also ist $\lambda_3 = 0$. Es folgt $0 = \lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_1$, und $0 = \lambda_2 + \lambda^3 \mathrm{e}^{\pi/2} = \lambda_2$. Also ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ die einzige Lösung der Gleichung $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$, und f_1, f_2, f_3 sind linear unabhängig.

(c) Sei $f_4(x) = x(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi)$. Diese Abbildung ist stetig weil sie ein Polynom ist, also gilt $f_4 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Nehmen wir an, dass $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$. Weil $f_4(0) = f_4(\frac{\pi}{2}) = f_4(\pi) = 0$, bekommen wir an den Stellen 0, $\frac{\pi}{2}$ und π dieselben Gleichungen für in λ_1, λ_2 und λ_3 wie in **(b)**, also kommen wir auf die gleiche Weise zu dem Schluss, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Jetzt können wir an einer anderen reellen Zahl auswerten, z.B. an 2π, um

$$0 = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4)(2\pi) = \lambda_4 f_4(2\pi) = 3\pi^3 \lambda_4$$

zu erhalten, also ist auch $\lambda_4 = 0$.

Aufgabe H 24. *Lagrange-Polynome*

Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 - \cos(\pi x)$. Finden Sie ein Polynom $p(x)$ von Grad 2 so, dass $p(x) = f(x)$ für $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ gilt.

Lösungshinweise hierzu: Wie in **(P24)** suchen wir zuerst eine Basis von $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$, mit der Eigenschaft dass an jeder Stelle 0, $\frac{1}{2}$ und 1 nur ein Basis-Vektor nicht 0 ist. Sei

$$p_1 = (x - \tfrac{1}{2})(x-1), \quad p_2 = x(x-1), \quad p_3 = x(x - \tfrac{1}{2}).$$

Nehmen wir an, dass es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3)(0) = \lambda_1 \\ 0 &= (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3)(\tfrac{1}{2}) = \lambda_2 \\ 0 &= (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3)(1) = \lambda_3 \end{aligned}$$

und wir schließen, dass p_1, p_2, p_3 linear unabhängig sind. Weil die Dimension von $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$ gleich 3 ist, ist p_1, p_2, p_3 eine Basis.
Deswegen hat jedes $p \in \mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$ die Form $p = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3$ für einige $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$. Wir suchen solche p, sodass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu_1 &= p(0) = f(0) = -1, \\ -\frac{1}{4}\mu_2 &= p(\tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}\mu_3 &= p(1) = f(1) = 1 - (-1)^2 = 2. \end{aligned}$$

Also ist $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = -1$, $\mu_3 = 4$, und

$$p(x) = -2(x - \tfrac{1}{2})(x-1) - x(x-1) + 4x(x - \tfrac{1}{2}) = x^2 + 2x - 1.$$

Es ist auch möglich eine beliebige Basis von $\mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$ zu wählen, zum Beispiel die Basis $1, x, x^2$. Dann jedes $p \in \mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$ hat der Form

$$p = \nu_1 + \nu_2 x + \nu_3 x^2$$

für $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{R}$. Die Gleichungen $p(x) = f(x)$ für $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ liefert ein lineares Gleichungsystem in ν_1, ν_2, ν_3, dass können wir lösen unser gewünschtes p zu finden. (Der Vorteil der ersten Methode mit der Basis p_1, p_2, p_3 oben ist, dass das Gleichungsystem in μ_1, μ_2, μ_3 ist einfacher.)

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 25. *Rechnen mit Matrizen*

Berechnen Sie die Potenzen A^n, B^n, C^n, D^n für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -\frac{2}{5} & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $A^{3+k} = 0$ für alle Zahlen $k \geqq 0$.

Für die Matrix B behaupten wir, dass $B^n = B$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies zeigen wir mittels Induktion: Im Induktionsanfang müssen wir die Gleichung $B^n = B$ für $n = 1$ zeigen. Diese ist trivialerweise erfüllt, denn $B^1 = B$. Im Induktionsschritt ist für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $B^{n+1} = B$ nachzuweisen, wobei wir die Induktionsannahme (IA) $B^n = B$ verwenden dürfen. Mit dieser ergibt sich

$$B^{n+1} = B \cdot B^n \overset{\text{IA}}{=} B \cdot B = \begin{pmatrix} 4-2 & 10-5 \\ -\frac{4}{5}+\frac{2}{5} & -2+1 \end{pmatrix} = B.$$

Das beendet den Beweis des Induktionsschritts, und es gilt $B^n = B$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

Um die Potenzen der Matrix C anzugeben, berechnen wir zunächst

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_2, \qquad (*)$$

wobei E_2 die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Behauptung, die wir mittels Induktion nachweisen wollen, ist, dass für alle natürlichen Zahlen $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$C^{4k-3} = C, \; C^{4k-2} = -E_2, \; C^{4k-1} = -C \text{ und } C^{4k} = E_2.$$

Haben wir dies gezeigt, haben wir zugleich alle Potenzen C^n berechnet, denn jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich mit Rest durch 4 teilen, es gibt also immer eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ derart, dass entweder $n = 4k$, $n = 4k-1$, $n = 4k-2$ oder $n = 4k-3$ gilt.

Für den Induktionsanfang müssen wir die obigen Gleichungen für $k = 1$ überprüfen. In der Tat gilt $C^{4-3} = C^1 = C$. Außerdem ist

$$C^{4-2} = C^2 = -E_2,$$

wie wir in $(*)$ bereits gesehen haben. Des Weiteren ist

$$C^{4-1} = C^3 = C \cdot C^2 = C \cdot (-E_2) = -(C \cdot E_2) = -C$$

und schließlich gilt

$$C^4 = C \cdot C^3 = C \cdot (-C) = -C^2 = E_2.$$

Diese vier Gleichungen zeigen den Induktionsanfang. Im Induktionsschritt wollen wir die behauptete Gestalt der Matrizen $C^{4(k+1)-3}$, $C^{4(k+1)-2}$, $C^{4(k+1)-1}$ und $C^{4(k+1)}$ für eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ nachweisen, unter der Annahme, dass unsere Behauptung für k bereits gilt. Dann haben wir

$$C^{4(k+1)-3} = C^{4k+1} = C \cdot C^{4k} \overset{\text{IA}}{=} C \cdot E_2 = C.$$

Unter Ausnutzung der obigen Gleichung berechnen wir als nächstes

$$C^{4(k+1)-2} = C^{4k+2} = C \cdot C^{4k+1} = C \cdot C \overset{(*)}{=} -E_2.$$

Die zuletzt bewiesene Gleichung können wir verwenden, um zu folgern:

$$C^{4(k+1)-1} = C^{4k+3} = C \cdot C^{4k+2} = C \cdot (-E_2) = -C.$$

Jetzt ergibt sich auch

$$C^{4(k+1)} = C^{4k+4} = C \cdot C^{4k+3} = C \cdot (-C) = -C^2 \overset{(*)}{=} -C.$$

Damit haben wir den Induktionsschritt bewiesen und die Potenzen von C sind von der behaupteten Gestalt.
Als letztes behaupten wir, dass die Potenzen der Matrix D durch

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 6n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, für alle $n \in \mathbb{N}$. Auch diese Aussage beweisen wir induktiv. Für $n = 1$ gilt die Aussage per Definition der Matrix D, d. h. der Induktionsanfang ist erfüllt. Nehmen wir also an, die obige Gleichung ist für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Wir wollen zeigen, dass sie auch für $n + 1$ gültig ist. Also berechnen wir

$$D^{n+1} = D^n \cdot D \overset{\text{IA}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 6n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6+6n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und das zeigt den Induktionsschritt.

Aufgabe H 26. *Lineares Gleichungssystem*

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zwei Parameter. Wir betrachten $A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $L_0 := \{x \in \mathbb{R}^3 | A_{\alpha,\beta}x = 0\}$ in Abhängigkeit von α und β.

(b) Bestimmen Sie $L_b := \{x \in \mathbb{R}^3 | A_{\alpha,\beta}x = b\}$ in Abhängigkeit von α und β.

Lösungshinweise hierzu: Wir wenden den Gauß–Algorithmus an:

$$
\left[\begin{array}{ccc||c} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]
\xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_3}
\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\begin{matrix} \\ +Z_1 \\ \end{matrix}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \beta+1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\begin{matrix} \\ \\ -\alpha Z_1 \end{matrix}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \beta+1 & 0 \\ 0 & -\alpha & -\alpha & 1 \end{array}\right]
\begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \end{matrix}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\beta+1}{2} & 0 \\ 0 & -\alpha & -\alpha & 1 \end{array}\right]
\begin{matrix} \\ \\ +\alpha Z_2 \end{matrix}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\beta+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\cdot\frac{\beta-1}{2} & 1 \end{array}\right]
\begin{matrix} -Z_2 \\ \\ \end{matrix}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & \frac{1-\beta}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\beta+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\cdot\frac{\beta-1}{2} & 1 \end{array}\right].
$$

Wir sehen, dass die Matrix genau dann vollen Rang hat, wenn $\alpha\cdot(\beta-1)\neq 0$ ist, d.h. wenn $\alpha\neq 0$ und $\beta\neq 1$ gilt. In diesem Fall hat L_b genau eine Lösung, nämlich $(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta+1}{\alpha(\beta-1)}, \frac{2}{\alpha(\beta-1)})^\intercal$, und $L_0 = \{0\}$. Andernfalls, falls $\alpha = 0$ oder $\beta = 1$ gilt, besitzt L_b keine Lösung, d. h. $L_b = \emptyset$, und es gilt $L_0 = L((-\frac{1-\beta}{2}, -\frac{\beta+1}{2}, 1)^\intercal)$.

Aufgabe H 27. *Gauß–Algorithmus I*

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß–Algorithmus die Lösungen des reellen Gleichungssystems $Ax = 0$ für die Matrix

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -7 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Lösungshinweise hierzu: Wir wernden den Gauß–Algorithmus an:

$$
\begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -7 & 3 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ -\frac{2}{3}Z_1 \\ -Z_1 \end{array}
\begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ +\frac{1}{3}Z_2 \\ +Z_2 \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} +Z_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \cdot\frac{1}{3} \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].
$$

Aus der letzten Matrix können wir ablesen, dass der Lösungsraum $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$ zweidimensional ist und von den beiden Vektoren $(-1, 0, 0, 1)^\intercal$ und $(1, -2, 1, 0)^\intercal$ aufgespannt wird. In Formeln:

$$
\mathcal{L} = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).
$$

Aufgabe H 28. *Gauß–Algorithmus II*

Wir betrachten das folgende reelle lineare Gleichungssytem.

$$
S : \begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 10x_5 = -6 \end{cases}
$$

(a) Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für S. Bringen Sie diese mittels Algorithmus 3.7.3 in die in Satz 3.7.2 angegebene Form.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von S. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssytems S_H.

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von S an. Verwenden Sie dazu (b).

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die gesuchte Matrix ist

$$
A = \left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 9 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right].
$$

Wir wenden den Gauß–Algorithmus an:

$$
\left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 9 & 5 & 10 & -6 \end{array}\right] {\scriptstyle +Z_1}
\left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 & 4 & 8 & -6 \end{array}\right] {\scriptstyle +4Z_2}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 0 & 16 & 6 \end{array}\right] {\scriptstyle \cdot\frac{1}{17}}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{16}{17} & \frac{6}{17} \end{array}\right] {\scriptstyle -3Z_3}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{14}{17} & \frac{33}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{16}{17} & \frac{6}{17} \end{array}\right] {\scriptstyle -Z_2}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 0 & -4 & 0 & -\frac{20}{17} & -\frac{33}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{14}{17} & \frac{33}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{16}{17} & \frac{6}{17} \end{array}\right] {\scriptstyle +4Z_3}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{44}{17} & -\frac{9}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{14}{17} & \frac{33}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{16}{17} & \frac{6}{17} \end{array}\right] {\scriptstyle \cdot(-1)}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{44}{17} & \frac{9}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{14}{17} & \frac{33}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{16}{17} & \frac{6}{17} \end{array}\right].
$$

(b) Der Lösungsraum der homogenen Gleichung ist gegeben durch $\mathcal{L}_0 := \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\}$. Nach (a) is eine Basis von $\mathcal{L}_0$ gegeben durch die Vektoren $v_1 = (0,1,0,1,0)^\intercal$ und $v_2 = (\frac{44}{17}, \frac{14}{17}, -\frac{16}{17}, 0, 1)^\intercal$. Eine spezielle Lösung von (S) erhalten wir, indem wir $x_4 = x_5 = 0$ wählen, was $v_{\mathsf{sp}} = (\frac{9}{17}, \frac{33}{17}, \frac{6}{17}, 0, 0)^\intercal$ als eine spezielle Lösung von (S) gibt.

(c) Die Lösungsmenge ist $\mathcal{L} = v_{\mathsf{sp}} + L(v_1, v_2)$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 29. *Kern und Bild*

Es sei $B\colon B_1, B_2, B_3, B_4$ die Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\alpha\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}\colon A \mapsto \alpha(A) = A + A^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_B\alpha_B$ sowie deren Rang.

(b) Berechnen Sie $\dim \operatorname{Bild}(\alpha)$ sowie $\dim \operatorname{Kern}(\alpha)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Bild}(\alpha)$.

(d) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}(\alpha)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir erhalten die beschreibende Matrix, indem wir als Spalten die Koordinatenvektoren von $\alpha(B_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$ eintragen. Wir berechnen daher

$$\alpha(B_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2B_1 = 2 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\Rightarrow \quad {}_B\alpha(B_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha(B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\Rightarrow \quad {}_B\alpha(B_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha(B_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 2 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\Rightarrow \quad {}_B\alpha(B_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha(B_4) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 2 \cdot B_4$$

$$\Rightarrow \quad {}_B\alpha(B_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$${}_B\alpha_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen der Nullzeile ist der Rang dieser Matrix kleiner als 4. Da die erste, dritte und vierte Spalte offensichtlich linear unabhängig sind, hat die Matrix mindestens den Rang 3. Insgesamt ist also $\operatorname{Rg}{}_B\alpha_B = 3$.

(b) Es ist $\dim \operatorname{Bild}(\alpha) = \operatorname{Rg}{}_B\alpha_B = 3$. Aus der Dimensionsformel 3.8.18 erhalten wir

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^{2\times 2}}_{=4} = \underbrace{\dim \operatorname{Bild}(\alpha)}_{=3} + \dim \operatorname{Kern}(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \dim \operatorname{Kern}(\alpha) = 1.$$

(c) Wir wissen bereits, dass $\operatorname{Bild}(\alpha)$ dreidimensional ist. Wenn wir drei linear unabhängige Elemente aus $\operatorname{Bild}(\alpha)$ finden, bilden diese eine Basis. Wir stellen fest, dass $\alpha(B_1) = 2B_1$. Daher ist $2B_1$ und somit auch B_1 in $\operatorname{Bild}(\alpha)$. Analog folgern wir, dass auch B_3 und B_4 in $\operatorname{Bild}(\alpha)$ liegen. Da B_1, B_3, B_4 linear unabhängig sind, ist damit die Basis von $\operatorname{Bild}(\alpha)$ gefunden.

Übrigens: Das Bild von α ist der Raum der symmetrischen reellen 2×2-Matrizen. Eine andere naheliegende Basis wäre zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Man kann direkt sehen, dass $\alpha(C) = \mathbf{0}$ für $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Daher ist $C \in \operatorname{Kern}(\alpha)$.

Da nach Teil **(b)** der Kern eindimensional ist, ist C auch Basis von $\operatorname{Kern}(\alpha)$.

Falls man die Basis nicht direkt sieht, kann man auch das lineare Gleichungssystem ${}_B\alpha_B v = \mathbf{0}$ lösen. Als Lösungsraum ergibt sich $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Daher ist eine Basis gegeben durch

$$\widetilde{C} = -\frac{1}{2}\cdot B_1 + 1\cdot B_2 - \frac{1}{2}\cdot B_3 + 0\cdot B_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 30. *Linearität*

Welche der nachfolgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

(a) $F\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}\colon A \mapsto A^{\intercal}$,

(b) $G\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}\colon A \mapsto \operatorname{Sp}(A^2)$ (wobei $\operatorname{Sp}(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{jj}$ für $B = (b_{jk})_{1\leqq j,k\leqq n}$),

(c) $H\colon \operatorname{Pol}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon p \mapsto p(3)$,

(d) $K\colon \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R})\colon f \mapsto f' + 2f$. ($f'$ ist die erste Ableitung von f)

Lösungshinweise hierzu:

(a) Diese Abbildung ist linear, wie folgt. Sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wir schrieben $A = (a_{ij})_{1\leqq i\leqq n, 1\leqq j\leqq n}$ und $B = (b_{ij})_{1\leqq i\leqq n, 1\leqq j\leqq n}$ also ist

$$\lambda A + \mu B = (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})_{1\leqq i\leqq n, 1\leqq j\leqq n}$$

und

$$F(\lambda A + \mu B) = (\lambda A + \mu B)^{\intercal} = (\lambda a_{ji} + \mu b_{ji})_{1\leqq i\leqq n, 1\leqq j\leqq n}.$$

Auf der anderen Seite ist

$$F(A) = A^{\intercal} = (a_{ji})_{1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq n}, \quad F(B) = B^{\intercal} = (b_{ji})_{1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq n},$$

also ist

$$\lambda F(A) + \mu F(B) = (\lambda a_{ji} + \mu b_{ji})_{1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq j \leqq n} = F(\lambda A + \mu B).$$

(b) Diese Abbildung ist nicht linear für irgendein $n \geqq 1$. Zum Beispiel ist

$$G(2\mathrm{E}_n) = \mathrm{Sp}(4\mathrm{E}_n) = 4n,$$

aber

$$2G(\mathrm{E}_n) = 2\,\mathrm{Sp}(\mathrm{E}_n) = 2n \neq G(2\mathrm{E}_n).$$

(c) Diese Abbildung ist linear. Sei $p, q \in \mathrm{Pol}\,\mathbb{R}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Per Definition ist

$$(\lambda p + \mu q)(x) = \lambda p(x) + \mu q(x)$$

für all $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$H(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)(3) = \lambda p(3) + \mu q(3) = \lambda H(p) + \mu H(q).$$

(d) Diese Abbildung ist linear. Sei $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} K(\lambda f + \mu g) &= (\lambda f + \mu g)' + 2(\lambda f + \mu g) \\ &= \lambda f' + \mu g' + 2\lambda f + 2\mu g \\ &= \lambda(f' + 2f) + \mu(g' + 2g) \\ &= \lambda K(f) + \mu K(g). \end{aligned}$$

Aufgabe H 31. *Lineare Abbildungen und beschreibende Matrizen I*

Sei $\varphi\colon \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{C} \to \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{C}$ die Abbildung $\varphi\colon p(x) \mapsto p(x - \mathrm{i})$.

(a) Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist.

(b) Sei $P\colon p_1, p_2, p_3, p_4$ die Basis von $\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{C}$ mit $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ und $p_4(x) = x^3$. Bestimmen Sie die Matrix ${}_P\varphi_P$.

(c) Sei $Q\colon q_1, q_2, q_3, q_4$ die Basis von $\mathrm{Pol}_3\,\mathbb{C}$ mit $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = x + 1$, $q_3(x) = x^2 + x + 1$ und $q_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Bestimmen Sie die Matrix ${}_P\varphi_Q$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Genau wie $\mathbf{H30(c)}$ ist

$$(\varphi(\lambda p + \mu q))(x) = (\lambda p + \mu q)(x - \mathrm{i}) = \lambda p(x - \mathrm{i}) + \mu q(x - \mathrm{i}) = \lambda(\varphi(p))(x) + \mu(\varphi(q))(x)$$

für jede $p, q \in \mathrm{Pol}_3\,\mathbb{C}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} (\varphi(p_1))(x) = p_1(x - \mathrm{i}) &= 1 \\ &= 1 \cdot p_1(x) \\ (\varphi(p_2))(x) = p_2(x - \mathrm{i}) &= x - \mathrm{i} \\ &= -\mathrm{i} \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) \\ (\varphi(p_3))(x) = p_3(x - \mathrm{i}) &= (x - \mathrm{i})^2 = x^2 - 2\mathrm{i}x - 1 \\ &= -1 \cdot p_1(x) - 2\mathrm{i} \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_3(x) \\ (\varphi(p_4))(x) = p_4(x - \mathrm{i}) &= (x - \mathrm{i})^3 = x^3 - 3\mathrm{i}x^2 - 3x + \mathrm{i} \\ &= \mathrm{i} \cdot p_1(x) - 3 \cdot p_2(x) - 3\mathrm{i} \cdot p_3(x) + 1 \cdot p_4(x) \end{aligned}$$

Also ist

$$
{}_P\varphi_P = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & -2\mathrm{i} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

(c) Ähnlicherweise zu (b) berechnen wir

$$
\begin{aligned}
q_1(x-\mathrm{i}) &= 1 \\
&= 1 \cdot p_1(x) \\
q_2(x-\mathrm{i}) &= x + (1-\mathrm{i}) \\
&= (1-\mathrm{i}) \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) \\
q_3(x-\mathrm{i}) &= x^2 + (1-2\mathrm{i})x - \mathrm{i} \\
&= -\mathrm{i} \cdot p_1(x) + (1-2\mathrm{i}) \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_3(x) \\
q_4(x-\mathrm{i}) &= x^3 + (1-3\mathrm{i})x^2 - (2+2\mathrm{i})x \\
&= -(2+2\mathrm{i}) \cdot p_2(x) + (1-3\mathrm{i}) \cdot p_3(x) + 1 \cdot p_4(x)
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
{}_P\varphi_Q = \begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 1-2\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 1-3\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe H 32. *Lineare Abbildungen und beschreibende Matrizen II*
Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$
\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}.
$$

Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$, und $B\colon v_1, v_2$ die Basis mit $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix ${}_E\varphi_E$.

(b) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$ und ${}_B\mathrm{id}_E$.

(c) Bestimmen Sie die Matrix ${}_B\varphi_B$.

(d) Geben Sie eine geometrische Beschreibung der Abbildung φ.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \cdot e_1 - \frac{3}{5} \cdot e_2, \\
\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{3}{5} \cdot e_1 - \frac{4}{5} \cdot e_2,
\end{aligned}
$$

also ist

$$
{}_E\varphi_E = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}
$$

(b) Weil

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2,$$
$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2,$$

ist

$$_E\operatorname{id}_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir haben $_B\operatorname{id}_E = ({}_E\operatorname{id}_B)^{-1}$, also ist

$$_B\operatorname{id}_E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir können dann die Probe machen:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \cdot v_1 + \frac{1}{10} \cdot v_2,$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot v_1 + \frac{3}{10} \cdot v_2.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} {}_B\varphi_B &= {}_B\operatorname{id}_E \cdot {}_E\varphi_E \cdot {}_E\operatorname{id}_B \\ &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & -50 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Wir bemerken, dass die Vektoren v_1 und v_2 sind Orthogonal. Weil $\varphi(v_1) = v_1$ und $\varphi(v_2) = -v_2$ ist φ die Spiegelung in der Gerade durch der Urpsrung und $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 33. *Invertieren von Blockmatrizen*

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar und sei $M = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 10 & 7 \\ 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ gilt.

(b) Finden Sie geeignete Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & C \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix}$ gilt.

(c) Berechnen Sie M^{-1}, indem Sie die in **(b)** gefundenen Blockmatrizen invertieren.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zu zeigen: $A^{-1}A = \mathrm{E}_2$:

$$A^{-1}A = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det A = ad - bc$ (und Kommutativität von $\mathbb{R}$) folgt $A^{-1}A = \mathrm{E}_2$. Die Inverse ist eindeutig, insbesondere ist Linksinverse = Rechtsinverse.

(b) Setze $A := \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ und $C = \mathrm{E}_2$.

Dann gilt $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & C \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AC \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & B \end{pmatrix} = M$.

(c) Aus $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_2 \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix}$ folgt $M^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_2 \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}$, denn dann gilt

$$\begin{aligned} MM^{-1} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_2 \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_2 \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\mathrm{E}_4\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \mathrm{E}_4. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$, denn

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^{-1} & 0 \\ 0 & BB^{-1} \end{pmatrix} = \mathrm{E}_4$$

und $\begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_2 \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & -\mathrm{E}_2 \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix}$, denn

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_2 \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & -\mathrm{E}_2 \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_2^2 & -\mathrm{E}_2^2 + \mathrm{E}_2^2 \\ 0 & \mathrm{E}_2^2 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_4.$$

Mit Hilfe von **(a)** bestimmen wir

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{65}\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{65} & \frac{7}{65} \\ \frac{1}{13} & -\frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

und

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_2 & -\mathrm{E}_2 \\ 0 & \mathrm{E}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{65} & \frac{7}{65} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 34. *Vom Nutzen geeigneter Koordinaten*

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+3z \\ -x+2y-z \\ x-3y \end{pmatrix}$. Weiterhin betrachten wir die Basis $B\colon \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, sowie die Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass B tatsächlich eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie $A := {}_E\varphi_E$.

(c) Bestimmen Sie ${}_B\varphi_B$.

(d) Berechnen Sie A^7.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da B genau drei Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ enthält, was der Dimension von $\mathbb{R}^3$ entspricht, genügt es zu zeigen, dass die Vektoren in B linear unabhängig sind. Seien dafür $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \lambda_2\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \lambda_3\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0$, bzw

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Diese Matrix lässt sich mit Hilfe des Gauss-Algorithmus' zur Einheitsmatrix umformen (z.B. $Z_3 = Z_1 + Z_3; Z_2 = -Z_2 - Z_3; Z_1 = -Z_1 - Z_2$) und damit ist die eindeutige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Daraus folgt, dass B eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) $\varphi(e_1) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 2e_1 - e_2 + e_3$, $\varphi(e_2) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) = 3e_1 + 2e_2 - 3e_3$ und $\varphi(e_3) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 3e_1 - e_2 + 0e_3$. Damit ergibt sich

$${}_E\varphi_E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt ${}_B\varphi_B = {}_B\mathrm{id}_{EE}\varphi_{EE}\mathrm{id}_B$ und ${}_E\mathrm{id}_B = {}_B\mathrm{id}_E{}^{-1}$. Weiterhin ist

$${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Invertieren mit Gauss-Algorithmus liefert ${}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Damit ist ${}_B\varphi_B =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(d) Aus $A = {}_E\varphi_E = {}_E\mathrm{id}_B {}_B\varphi_B \left({}_E\mathrm{id}_B\right)^{-1}$ folgt

$$A^7 = \left({}_E\mathrm{id}_B {}_B\varphi_B \left({}_E\mathrm{id}_B\right)^{-1}\right)^7 = {}_E\mathrm{id}_B \left({}_B\varphi_B\right)^7 \left({}_E\mathrm{id}_B\right)^{-1}.$$

Setzen wir die Ergebnisse aus **(b)** ein, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^7 & 0 \\ 0 & 0 & 3^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^7 & 2^7+1 & 2^7+1 \\ -3^7+2^7 & 2^7 & -3^7+2^7 \\ 3^7-2^7 & -2^7-1 & 3^7-2^7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128 & 129 & 129 \\ -2059 & 128 & -2059 \\ 2059 & -129 & 2058 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 35. *Entwicklungssatz*

Wir betrachten, für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal \in \mathbb{R}^4$, die Determinante

$$\Delta_4(x) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Delta_4(x) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\Delta_3(x_2, x_3, x_4)$. (Siehe **P 36**.)

(b) Berechnen Sie $\Delta_4(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir haben

$$\Delta_4(x) \overset{-x_1 Z_3 + Z_4 \to Z_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ 0 & x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix}$$
$$\overset{-x_1 Z_2 + Z_3 \to Z_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) \\ 0 & x_2^2(x_2 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{vmatrix}$$

$$\overset{-x_1Z_1+Z_2\to Z_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & x_4(x_4-x_1) \\ 0 & x_2^2(x_2-x_1) & x_3^2(x_3-x_1) & x_4^2(x_4-x_1) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entwicklung erste Spalte}}{=} \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & x_4(x_4-x_1) \\ x_2^2(x_2-x_1) & x_3^2(x_3-x_1) & x_4^2(x_4-x_1) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{x_2-x_1}S_1}{=} (x_2-x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ x_2 & x_3(x_3-x_1) & x_4(x_4-x_1) \\ x_2^2 & x_3^2(x_3-x_1) & x_4^2(x_4-x_1) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{x_3-x_1}S_2}{=} (x_2-x_1)(x_3-x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_4-x_1 \\ x_2 & x_3 & x_4(x_4-x_1) \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2(x_4-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\Delta_3(x_2,x_3,x_4)$$

durch Faktorisierung $x_4 - x_1$ in der dritten Spalte.

(b) Wir haben $\Delta_3(x_2,x_3,x_4) = (x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_2)$ bei Aufgabe P36,(a). Aus (a) folgt dass $\Delta_4(x) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_2)$.

Aufgabe H 36. *Matrix-Inverse*

Sei $x \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\Delta_3(x) \neq 0$ (siehe **P 36**). Berechnen Sie die Inverse der Matrix $D_3(x)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen die Cofaktor-Matrix $\tilde{D} = (\tilde{D}_{ij})_{1\leqq i,j\leqq 3}$ von $D_3(x)$. Nach definition wir haben

$$\tilde{D}_{11} = \det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix} = x_2x_3(x_3-x_2), \quad \tilde{D}_{12} = -\det\begin{pmatrix} 1 & x_2^2 \\ 1 & x_3^2 \end{pmatrix} = x_2^2 - x_3^2$$
$$\tilde{D}_{13} = \det\begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} = x_3 - x_2$$

$$\tilde{D}_{21} = -\det\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 \\ x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = x_1x_3(x_1-x_3), \qquad \tilde{D}_{22} = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1^2 \\ 1 & x_3^3 \end{pmatrix} = x_3^2 - x_1^2$$
$$\tilde{D}_{23} = -\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} = x_1 - x_3$$
$$\tilde{D}_{31} = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 \\ x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = x_1x_2(x_2-x_1), \qquad \tilde{D}_{32} = -\det\begin{pmatrix} 1 & x_1^2 \\ 1 & x_2^2 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_2^2$$
$$\tilde{D}_{33} = -\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1.$$

Weil $D_3^{-1} = \frac{1}{\det D_3}\tilde{D}^T$ es folgt

$$D_3^{-1} = \frac{1}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \begin{pmatrix} x_2x_3(x_3-x_2) & x_1x_3(x_1-x_3) & x_1x_2(x_2-x_1) \\ x_2^2-x_3^2 & x_3^2-x_1^2 & x_1^2-x_2^2 \\ x_3-x_2 & x_1-x_3 & x_2-x_1 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung des Ausdrucks für $\det D_3(x)$ von P36, (a).

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 37. *Bewegungen*

In Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}X = (x_1, x_2, x_3)^\intercal$ bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^3$ sei die Bewegung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$ {}_{\mathbb{E}}\alpha(X) = \frac{1}{25}(25x_1, 7x_2 + 24x_3 + 90, 24x_2 - 7x_3 - 120)^\intercal . $$

(a) Finden Sie eine Matrix A und einen Vektor b mit ${}_{\mathbb{E}}\alpha(X) = A \cdot {}_{\mathbb{E}}X + b$ für alle $X \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie eine Ebene $E \subsetneqq \mathbb{R}^3$ so, dass $\alpha(X) = X$ für alle $X \in E$ gilt.

(c) Stellen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ auf, in dem für alle $X \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$ {}_{\mathbb{F}}(\alpha(X)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{F}}X . $$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $X \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}X = (x_1, x_2, x_3)$ gilt

$$ \begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\alpha(X) &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25x_1 \\ 7x_2 + 24x_3 + 90 \\ 24x_2 - 7x_3 - 120 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25x_1 \\ 7x_2 + 24x_3 \\ 24x_2 - 7x_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ -24 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & 24 & -7 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{E}}X + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ -24 \end{pmatrix} . \end{aligned} $$

Die gesuchte Matrix ist also

$$ A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & 24 & -7 \end{pmatrix} $$

und der gesuchte Vektor $b = 1/5(0, 18, -24)^\intercal$.

(b) Für $X \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$ \alpha(X) = X \Leftrightarrow AX + b = X \Leftrightarrow (A - E_3)X = -b \Leftrightarrow (25A - 25E_3)X = -25b. $$

Dies führt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 24 & -90 \\ 0 & 24 & -32 & 120 \end{array}\right] $$

und anwenden des Gauß–Algorithmus liefert

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 24 & -90 \\ 0 & 24 & -32 & 120 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \cdot(-1/6) \\ \cdot 1/8 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & 3 & -4 & 15 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -Z_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot 1/3;\ Z_1 \leftrightarrow Z_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4/3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Also erhalten wir als Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems

$$\mathcal{L}_0 = \mathrm{L}\left((1,0,0)^\intercal, (0,4/3,1)^\intercal\right)$$

und als spezielle Lösung $(0,5,0)^\intercal$. Die gesuchte Ebene ist damit $E = (0,5,0)^\intercal + \mathrm{L}\left((1,0,0)^\intercal, (0,4/3,1)^\intercal\right)$.

(c) Nach dem vorherigen Aufgabenteil wird die Ebene E von α fixiert. Da es sich bei α um eine Bewegung handelt und nur Spiegelungen eine Ebene fixieren können, muss α eine Ebenenspiegelung sein. Um das gewünschte Koordinatensystem $\mathbb{F}$ zu bestimmen, müssen wir also einen normierten Vektor finden, der zu den Vektoren $(1,0,0)^\intercal$ und $(0,4/3,1)^\intercal$ senkrecht steht. Dafür verwenden wir das Kreuzprodukt:

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Da die Vektoren $(1,0,0)^\intercal$ und $(0,4/3,1)$ bereits senkrecht zueinander stehen, ist $f_1 := (1,0,0)^\intercal$, $f_2 := 1/5 \cdot (0,4,3)^\intercal$, $f_3 := 1/5 \cdot (0,-3,4)^\intercal$ eine Orthonormalbasis und $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2, f_3)$ mit $P = (0,5,0)^\intercal$ ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich welchem

$${}_{\mathbb{F}}(\alpha(X)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{F}}X$$

gilt.

Aufgabe H 38. *Orthogonale Matrizen*

Es sei t ein reeller Parameter und $A_t = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & t \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A_t orthogonal?

(b) Entscheiden Sie für jedes in **(a)** gefundene t, ob A_t eigentlich oder uneigentlich ist.

(c) Für jedes in **(a)** gefundene t betrachten wir die Abbildung $\alpha_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto A_t x$. Finden Sie jeweils die Fixpunktmenge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_t(x) = x\}$ dieser Abbildung.

(d) Geben Sie eine geometrische Beschreibung der Abbildung α_t von Teil **(c)**.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$A_t^{\intercal} A_t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & -2+t & 0 \\ -2+t & 5+t^2 & -4+2t \\ 0 & -4+2t & 9 \end{pmatrix},$$

und prüfen, wann diese Matrix gleich E_3 ist. Dafür muss $-2+t=0$ gelten, oder $t=2$, und in diesem Fall sieht man, dass $A_2^{\intercal} A_t = E_3$. Also ist A_t orthogonal dann und nur dann, wenn $t=2$.

(b) Wir entwickeln die Determinante von A_2 nach der ersten Spalte und erhalten

$$\begin{aligned} \det A_2 &= \frac{1}{27}\left(2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{27}(-12-12-3) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Also ist A_2 uneigentlich.

(c) Für $x = (x_1, x_2, x_3)^{\intercal} \in \mathbb{R}^3$ berechnen wir

$$\alpha_2(x) = A_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Also suchen wir $x, y, z \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3x_1, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3x_2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3x_3, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die zweite und dritte Gleichung sind äquivalent zu der ersten, also müssen wir nur die Lösungen von $-x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ finden. Der Lösungsraum ist dann

$$L = \left\{ \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) Weil α_2 eine uneigentliche Isometrie mit einer Ebene als Fixpunktmenge ist, ist α_2 die Spiegelung an der Ebene L.

Aufgabe H 39. *Orthonormierungsverfahren*

Im $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Vektoren

$$b_1 = (-5, 3, 7, -7)^{\intercal},\ b_2 = (1, 1, 0, 0)^{\intercal},\ b_3 = (-2, 6, 4, 4)^{\intercal} \text{ und } b_4 = (-3, -1, 4, -2)^{\intercal}.$$

Zeigen Sie, dass $B : b_1, b_2, b_3, b_4$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bildet und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $F : f_1, f_2, f_3, f_4$ des $\mathbb{R}^4$ derart, dass $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_2)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_2, b_3)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(b_2, b_3, b_4)$ gilt.

Lösungshinweise hierzu: Damit b eine Basis gibt, muss die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 6 & -1 \\ 7 & 0 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

deren Spalten die Vektoren der Basis B sind, vollen Rang besitzen. Wir überprüfen dies, indem wir die Determinante obiger Matrix berechnen. Es gilt:

$$\det \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 6 & -1 \\ 7 & 0 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 8 & 2 \\ 7 & 0 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 2 \\ 7 & 0 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

weil der Wert der Determinante sich unter elementaren Spalten– und Zeilenumformungen nicht ändert. Entwickelt man auf der rechten Seite die Determinante noch nach der ersten Zeile, erhält man

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 8 & 8 & 2 \\ 7 & 4 & 4 \\ -7 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 192.$$

Also ist B eine Basis. Um aus B die gesuchte Orthonormalbasis F zu gewinnen, verwenden wir das Gram–Schmidtsche Orthonormierungsverfahren. Im ersten Schritt setzen wir also

$$f_1 := \frac{1}{|b_2|} b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,1,0,0)^{\intercal},$$

dann gilt $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_2)$. Der Vektor

$$\begin{aligned} f_2^* &:= b_3 - \langle b_3, f_1 \rangle f_1 \\ &= (-2,6,4,4)^{\intercal} - \frac{1}{2} \langle (-2,6,4,4)^{\intercal}, (1,1,0,0)^{\intercal} \rangle \cdot (1,1,0,0)^{\intercal} \\ &= (-2,6,4,4)^{\intercal} - 2 \cdot (1,1,0,0)^{\intercal} \\ &= (-4,4,4,4)^{\intercal} \end{aligned}$$

steht senkrecht zu f_1. Normieren gibt

$$f_2 := \frac{1}{|f_2^*|} \cdot f_2^* = \frac{1}{8} \cdot f_2^* = \frac{1}{2} (-1,1,1,1)^{\intercal}.$$

Als nächstes berechnen wir

$$\begin{aligned} f_3^* &:= b_4 - \langle b_4, f_1 \rangle f_1 - \langle b_4, f_2 \rangle f_2 \\ &= (-3,-1,4,-2)^{\intercal} - \frac{1}{2} \cdot \langle (-3,-1,4,-2)^{\intercal}, (1,1,0,0)^{\intercal} \rangle \cdot (1,1,0,0)^{\intercal} \\ &\qquad - \frac{1}{4} \cdot \langle (-3,-1,4,-2)^{\intercal}, (-1,1,1,1)^{\intercal} \rangle \cdot (-1,1,1,1)^{\intercal} \\ &= (-3,-1,4,-2)^{\intercal} + (2,2,0,0)^{\intercal} - (-1,1,1,1)^{\intercal} \\ &= (0,0,3,-3)^{\intercal}. \end{aligned}$$

Das liefert

$$f_3 := \frac{1}{|f_3^*|} \cdot f_3^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)^\intercal .$$

Als letztes berechnen wir

$$\begin{aligned}
f_4^* &:= b_1 - \langle b_1, f_1\rangle f_1 - \langle b_1, f_2\rangle f_2 - \langle b_1, f_3\rangle f_3 \\
&= (-5,3,7,-7)^\intercal - \frac{1}{2} \cdot \langle (-5,3,7,-7)^\intercal, (1,1,0,0)^\intercal \rangle \cdot (1,1,0,0)^\intercal \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{4} \cdot \langle (-5,3,7,-7)^\intercal, (-1,1,1,1)^\intercal \rangle \cdot (-1,1,1,1)^\intercal \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2} \cdot \langle (-5,3,7,-7)^\intercal, (0,0,1,-1)^\intercal \rangle \cdot (0,0,1,-1)^\intercal \\
&= (-5,3,7,-7)^\intercal + (1,1,0,0)^\intercal - 2(-1,1,1,1)^\intercal - 7(0,0,1,-1)^\intercal \\
&= (-2,2,-2,-2)^\intercal
\end{aligned}$$

sowie $f_4 = \frac{1}{2}(-1,1,-1,-1)^\intercal$. Die gesuchte Orthonormalbasis ist also

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ f_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \text{ und } f_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 40. *Koordinatensysteme*

Wir verwenden das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^3$ und betrachten die Punkte

$$P = (2,-1,1)^\intercal,\ Q_1 = (3,0,1)^\intercal,\ Q_2 = (3,-1,2)^\intercal,\ Q_3 = (2,-2,0)^\intercal .$$

(a) Überprüfen Sie, dass $\mathbb{F} = (P; \overrightarrow{PQ_1}, \overrightarrow{PQ_2}, \overrightarrow{PQ_3})$ ein affines Koordinatensystem ist.

(b) Berechnen Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(c) Sei $R \in \mathbb{R}^3$ der Punkt mit ${}_{\mathbb{F}}R = (4,2,1)^\intercal$. Berechnen Sie ${}_{\mathbb{E}}R$.

(d) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die affine Abbildung mit ${}_{\mathbb{E}}\alpha(x) = \begin{pmatrix}-1&4&2\\0&1&3\\-1&2&0\end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Matrix B und einen Vektor v so, dass ${}_{\mathbb{F}}\alpha(x) = B \cdot {}_{\mathbb{F}}x + v$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\overrightarrow{PQ_1} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ_2} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ_3} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Wir müssen dann prüfen, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

haben wir

$$\begin{aligned} x + y &= 0,\\ x - z &= 0,\\ y - z &= 0. \end{aligned}$$

Das gibt $x = y = z$ und $2x = 0$, also ist $x = y = z = 0$ und die drei Vektoren sind linear unabhängig.

(b) Weil $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem ist, haben wir

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} v + \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Für ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ müssen wir $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}$ berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

also ist

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Dann ist ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = w$ dann und nur dann, wenn

$$v = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(w) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} w + \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},$$

also ist

$$\begin{aligned}
w &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \left(v - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} v - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir haben deswegen

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon v \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{E}}R &= {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}R) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(d) Wir haben

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{F}}\alpha(x) &= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}\alpha(x)) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}\alpha(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dann haben wir ${}_{\mathbb{E}}x = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also ist

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbb{F}}\alpha(x) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Also haben wir $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 41. *komplexe Eigenwerte*

Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, sowie deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Bestimmen Sie jeweils eine Basis der Eigenräume. Ist A diagonalisierbar?

Lösungshinweise hierzu: Das charakteristische Polynom von A ist $\det(A - \lambda \mathrm{E}_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = -(\lambda+1)(\lambda^2+1) = -(\lambda+1)(\lambda+\mathrm{i})(\lambda-\mathrm{i})$.
Die Eigenwerte von A sind also $-1, -\mathrm{i}$ und i, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Aus $1 \leqq d_\lambda \leqq e_\lambda \leqq n$ folgt $d_\lambda = 1$ für alle Eigenwerte. Die Eigenräume sind die Lösungsräume der LGS $(A - \lambda \mathrm{E}_3)v = 0$, die wir mit Gauss-Algorithmus bestimmen können.

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 = \frac{1}{2}(Z_1+Z_3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 = Z_3 - Z_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Ähnlicherweise finden wir, dass

$$V(\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(-\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe H 42. *Eigenwerte I*

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- **(a)** Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.
- **(b)** Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte.
- **(c)** Ist A invertierbar?
- **(d)** Ist A diagonalisierbar? Bestimmen Sie in dem Fall eine Matrix S so, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösungshinweise hierzu:

- **(a)** Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det(A - \lambda \mathrm{E}_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^3.$$

Also die Eigenwerte von A sind 0 und 2.

(b) Die obige Berechnung zeigt, dass die algebraische Vielfachheit von 0 ist 1, und die von 2 ist 3.

Weil die geometrische Vielfachheit von 0 ist mindestens 1, und nicht mehr als die algebraische Vielfachheit, ist diese Vielfachheit auch 1.

Um die geometrische Vielfachheit von 2 zu berechnen, mussen wir die LGS $(A - 2\mathrm{E}_4)v = 0$ lösen.

$$A - 2\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 = Z_3 + 2Z_1]{Z_2 = Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 = -\frac{1}{2} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist der Lösungsraum $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, und so hat 2 geometrische Vielfachheit 2.

(c) Die Matrix A ist nicht invertierbar, weil $\det(A) = 0 \cdot 2^3 = 0$, oder weil es nicht die vollen Rang hat.

(d) Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar, weil die algebraische und geometrische Vielfachheiten des Eigenwerts 2 sind ungleich.

Aufgabe H 43. *Eigenwerte II*

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ -7 & -7 & 0 & -7 & -7 \\ -9 & -7 & -2 & -7 & -9 \\ 11 & 7 & 4 & 7 & 11 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie Av.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{Rg} A$.

(c) Welche Eigenwerte hat A, mit welchen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$Av = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2v.$$

(b) Die erste und fünfte Spalten von A, sowie die zweite und vierte Spalten, sind gleich. Außerdem ist die erste Spalte die Summe von die zweite und dritte, aber Spalten zwei und drei sind linear unabhängig. Also ist $\operatorname{Rg} A = 2$.

(c) Weil A ist eine 5×5 Matrix mit $\operatorname{Rg} A = 2$ hat A der Eigenwert 0 mit geometrische Vielfachheit $5 - 2 = 3$. Die algebraische Vielfachheit von 0 ist dann mindestens 3.

Von Teil (a) sehen wir dass A hat der Eigenwert 2 mit geometrische, und so algebraische, Vielfachheit mindestens 1.

Wir berechnen $\operatorname{Sp} A = -2 + 7 + 0 - 7 + 11 = 9$. Also ist

$$9 = 0 + 0 + 0 + 2 + \lambda$$

für λ einen Eigenwert von A, und wir berechnen das $\lambda = 7$. Wir nutzen hier dass $\operatorname{Sp} A$ ist die Summe von Eigenwerte mit seiner algebraischen Vielfachheit, und weil A ist eine 5×5 ist die Summe diese Vielfachheiten gleich 5.

Also sehen wir, dass A hat die Eigenwerte 0, 2 und 7, mit entsprechende algebraischen Vielfachheiten 3, 1 und 1. Wir haben schon berechnet, dass die geometrische Vielfachheit von 0 ist auch gleich 3. Weil die geometrische Vielfachheit eines allgemeinen Eigenwerts ist positiv und nicht mehr als die algebraische Vielfachheit, sind die geometrische Vielfachheiten von 2 und 7 beide gleich 1.

Aufgabe H 44. *Eigenwerte einer linearen Abbildung*

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : M \mapsto M - M^{\mathsf{T}}$, und sei $B\colon B_1, B_2, B_3, B_4$ die Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Matrix $A = {}_B\varphi_B$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A, und die entsprechenden Eigenräume.

(c) Für welche $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi(M) = \lambda M$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\varphi(B_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\varphi(B_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B_2 - B_3, \\
\varphi(B_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -B_2 + B_3, \\
\varphi(B_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$A = {}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Weil A hat zwei Nullspalten sehen wir sofort, dass $(1,0,0,0)^{\mathsf{T}}$ und $(0,0,0,1)^{\mathsf{T}}$ sind Eigenvektoren mit Eigenwert 0. Es ist auch relativ einfach zu sehen, dass

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ist $(0,1,1,0)^\intercal$ auch eine Eigenvektor von A mit Eigenwert 0. Weil A ist eine 4×4 Matrix hat es maximal ein weiterer Eigenwert, und weil $\operatorname{Sp} A = 2$ ist dieser Eigenwert 2. Wir können dann sehen (oder durch Lösen eines LGS berechnen) dass

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $(0,1,-1,0)^\intercal$ ist ein Eigenvektor mit Eigenwert 2.

Wir kommen zu dem Schluss, dass die Eigenwerte sind 0 und 2, mit entsprechende Eigenräume

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ und } \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

(c) Wir brauchen nur Teil **(b)** in der Sprache der linearen Abbildungen zu interpretieren. Das sagt, dass $\varphi(M) = \lambda M$ wann und nur wann

- $\lambda = 0$ und $M \in \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, oder
- $\lambda = 2$ und $M \in \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 45. *Diagonalisierbarkeit*

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \alpha^2+1 & 1-\alpha^2 & \alpha^2-1 \\ \alpha^2+1 & 1-\alpha^2 & \alpha^2-3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_α für alle α.

(b) Für welche α ist A_α diagonalisierbar? Geben Sie für solche α jeweils sämtliche Eigenwerte und Eigenräume von A_α an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\chi_{A_\alpha}(\lambda) &= \det\left(\frac{3}{2}\begin{pmatrix} \alpha^2+1 & 1-\alpha^2 & \alpha^2-1 \\ \alpha^2+1 & 1-\alpha^2 & \alpha^2-3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda E_3\right) \\ &= \det\left(\frac{3}{2}\begin{pmatrix} \alpha^2+1-\mu & 1-\alpha^2 & \alpha^2-1 \\ \alpha^2+1 & 1-\alpha^2-\mu & \alpha^2-3 \\ 2 & -2 & -\mu \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \det\begin{pmatrix} \alpha^2+1-\mu & 1-\alpha^2 & \alpha^2-1 \\ \alpha^2+1 & 1-\alpha^2-\mu & \alpha^2-3 \\ 2 & -2 & -\mu \end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei wir $\mu = 2/3\lambda$ gesetzt haben. Wir addieren die zweite Spalte zur ersten und dritten Spalte, anschließend ziehen wir die erste Zeile von der zweiten ab:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} \alpha^2+1-\mu & 1-\alpha^2 & \alpha^2-1 \\ \alpha^2+1 & 1-\alpha^2-\mu & \alpha^2-3 \\ 2 & -2 & -\mu \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 2-\mu & 1-\alpha^2 & 0 \\ 2-\mu & 1-\alpha^2-\mu & -2-\mu \\ 0 & -2 & -2-\mu \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 2-\mu & 1-\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\mu & -2-\mu \\ 0 & -2 & -2-\mu \end{pmatrix} \\ &= (2-\mu)\cdot\det\begin{pmatrix} -\mu & -2-\mu \\ -2 & -2-\mu \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Als letztes berechnen wir noch

$$\det\begin{pmatrix} -\mu & -2-\mu \\ -2 & -2-\mu \end{pmatrix} = \mu(2+\mu) - 2(2+\mu) = (2+\mu)(\mu-2)$$

und erhalten

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = -\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot (2-\mu)^2 \cdot (2+\mu) = -(3-\lambda)^2 \cdot (3+\lambda).$$

(b) Die Matrix A_α ist genau dann diagonalisierbar, wenn die geometrische Vielfachheit d_λ jedes Eigenwerts λ mit der algebraischen Vielfachheit e_λ übereinstimmt. Nach dem vorherigen Aufgabenteil besitzt A_α den Eigenwert -3 mit algebraischer Vielfachheit $e_{-3} = 1$ sowie den Eigenwert 3 mit algebraischer Vielfachheit $e_3 = 2$. Wegen $1 \leqq d_\lambda \leqq e_\lambda$ für jeden Eigenwert λ, gilt $e_{-3} = d_{-3}$ sowie $1 \leqq d_3 \leqq 2$. Die Matrix A_α ist also genau dann diagonalisierbar, wenn der Eigenwert 3 mit geometrischer Vielfachheit 2 auftritt. Hierzu ist die Dimension des Lösungsraums $E(3)$ des homogenen Gleichungssystems $(A - 3E_3)x = 0$ zu bestimmen. Es gilt:

$$(A - 3E_3)x = 0 \Leftrightarrow (2/3A - 2E_3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2-1 & 1-\alpha^2 & \alpha^2-1 \\ \alpha^2+1 & -1-\alpha^2 & \alpha^2-3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot x = 0.$$

Wir wenden den Gauß–Algorithmus an:

$$\begin{bmatrix} \alpha^2-1 & 1-\alpha^2 & \alpha^2-1 \\ \alpha^2+1 & -1-\alpha^2 & \alpha^2-3 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}_{\cdot 1;\, Z_1 \leftrightarrow Z_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \alpha^2-1 & 1-\alpha^2 & \alpha^2-1 \\ \alpha^2+1 & -1-\alpha^2 & \alpha^2-3 \end{bmatrix}_{-Z_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \alpha^2-1 & 1-\alpha^2 & \alpha^2-1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -(\alpha^2-1)\cdot Z_1 \\ -Z_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2(\alpha^2-1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir sehen also: A_α ist genau dann diagonalisierbar, wenn $E(3)$ zweidimensional ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $2(\alpha^2 - 1) = 0$ bzw. $\alpha = \pm 1$ gilt. Für $\alpha = \pm 1$ gilt zudem.

$$E(3) = \mathrm{L}\left((1,1,0)^\intercal, (1,0,1)^\intercal\right).$$

Für $\alpha = \pm 1$ ist noch der Eigenraum $E(-3)$ zu bestimmen. Es gilt:

$$(A_{\pm 1} + 3E_3)x = 0 \Leftrightarrow (2/3A_{\pm 1} + 2E_3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} x = 0$$

woraus unmittelbar $E(-3) = \mathrm{L}\left((0,1,1)^\intercal\right)$ folgt.

Aufgabe H 46. *Quadriken I*

Für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$\mathcal{Q}_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1 - 2x_2 + c = 0\}.$$

Bestimmen Sie für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_{c,\text{erw}}$ und entscheiden Sie anhand dieser, ob es sich bei $\mathcal{Q}_c$ um eine kegelige, parabolische oder Mittelpunktsquadrik handelt.

Lösungshinweise hierzu: Die Matrixbeschreibung der Quadrik $\mathcal{Q}_c$ ist gegeben durch

$$\mathcal{Q}_c = \{x \in \mathbb{R}^3 : x^T Ax + 2a^T x + c = 0\}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $a = (1, -1, 0)^\mathsf{T}$. Dann ist $A_{c,\text{erwt}} = \begin{pmatrix} c & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir berechnen

$$\det A_{c,\text{erwt}} \overset{Z_2+Z_3\to Z_3}{=} \det \begin{pmatrix} c & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{-cZ_2+Z_1\to Z_1}{=} \det \begin{pmatrix} 0 & 1-c & -1 & -2c \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -\det \begin{pmatrix} 1-c & -1 & -2c \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{2Z_2+Z_2\to Z_3}{=} -\det \begin{pmatrix} 1-c & -1 & -2c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(2-c).$$

Daher gilt $\operatorname{Rg} A_{c,\text{erw}} = 4$ für $c \neq 2$, in diesem Fall liegt eine parabolische Quadrik vor. Wegen

$$\det A \overset{-2Z_1+Z_3\to Z_3}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -3 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

haben wir $\operatorname{Rg} A_{c,\text{erw}} \geqq 3$, insbesondere ist $\mathcal{Q}_c$ für $c = 2$ eine Mittelpunktsquadrik.

Aufgabe H 47. *Quadriken II*

Im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, 17x_1^2 - 12x_1x_2 + 8x_2^2 = 5\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0\}$ für eine symmetrische Matrix A, einen Vektor a und eine Konstante c an. Finden Sie anschließend eine Orthonormalbasis f_1, f_2 des $\mathbb{R}^2$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

(b) Formulieren Sie die Gleichung für $\mathcal{Q}$ im Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right); f_1, f_2\right)$.

(c) Zeichnen Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ im Standardkoordinatensystem ein und skizzieren Sie in dieser Zeichnung außerdem $\mathcal{Q}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für die Matrixbeschreibung von $\mathcal{Q}$ wähle

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}, \ a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } c = -5.$$

Um eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A zu finden, bestimmen wir zunächst das charakteristische Polynom von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 17-\lambda & -6 \\ -6 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (17-\lambda)(8-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 25\lambda + 100.$$

Setze $\mu := 1/5\lambda$. Eine Nullstelle liegt genau dann vor, wenn gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 25\mu^2 - 125\mu + 100 = 0 \\ \iff \mu^2 - 5\mu + 4 = 0 \\ \iff \mu = 4 \text{ oder } \mu = 1 \\ \iff \lambda = 20 \text{ oder } \lambda = 5.\end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte von A durch 20 und 5 gegeben. Für den Eigenraum zum Eigenwert 20 betrachte die Matrix

$$A - 20E_2 = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich $E(20) = \mathrm{L}\left((2,-1)^\mathsf{T}\right)$. Da A symmetrisch ist, muss jeder Eigenvektor zum Eigenwert 20 auf den Vektoren in $E(20)$ senkrecht stehen. Weil $E(5)$ zudem eindimensional ist, erhalten wir unmittelbar $E(5) = \mathrm{L}\left((1,2)^\mathsf{T}\right)$. Alternativ löst man das homogene Gleichungssystem $(A - 5E_2)x = 0$, mit $A - 5E_2 = \left(\begin{smallmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. In jedem Fall ist durch

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ mit $f_1 \in E(20)$ und $f_2 \in E(5)$ erklärt.

(b) Wir setzen

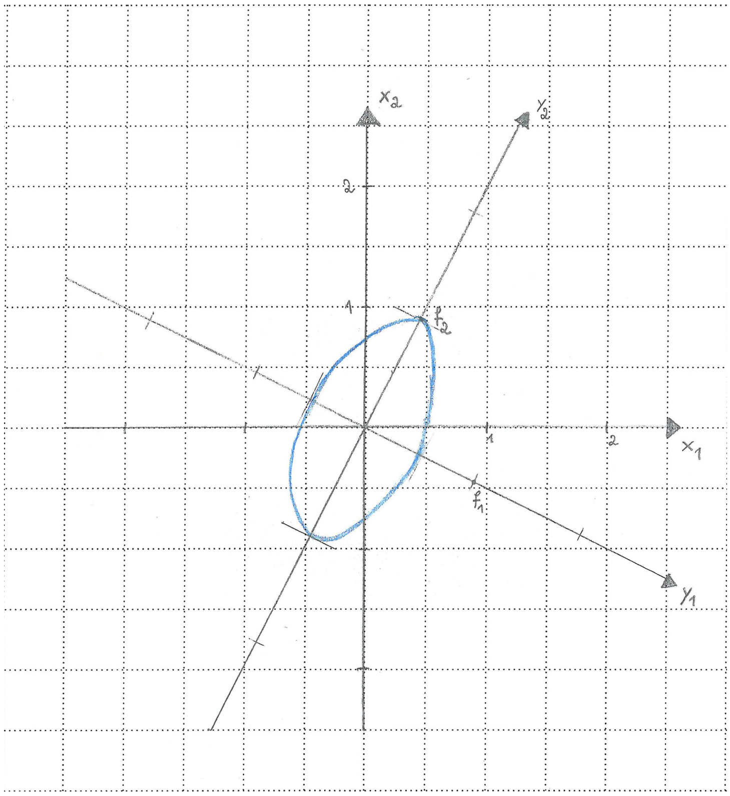
$$F := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann ${}_{\mathbb{E}}x = F \cdot {}_{\mathbb{F}}x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Schreiben wir also $y := {}_{\mathbb{F}}x$, so gilt wegen $x = {}_{\mathbb{E}}x$:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{Q} &\iff x^\mathsf{T} A x - 5 = 0 \\ &\iff (Fy)^\mathsf{T} \cdot A \cdot (Fy) - 5 = 0 \\ &\iff y^\mathsf{T} \cdot (F^\mathsf{T} A F) \cdot y - 5 = 0 \\ &\iff 20y_1^2 + 5y_2^2 - 5 = 0 \\ &\iff 4y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ wird $\mathcal{Q}$ also durch die Gleichung $4y_1^2 + y_2^2 = 1$ beschrieben.

(c) In dem Koordinatensystem $\mathbb{F}$ wird $\mathcal{Q}$ durch die Gleichung $4y_1^2 + y_2^2 = 1$ beschrieben. Dies ist eine Ellipse, welche die Koordinatenachsen des Koordinatensystems $\mathbb{F}$ in den Punkten $(\pm 1/2, 0)^\mathsf{T}$ und $(0, \pm 1)^\mathsf{T}$ schneidet. In dem Standardkoordinatensystem entsprechen diese Punkte den Punkten $\pm 1/2 f_1$ und $\pm f_2$. Wir wissen ferner, dass f_1 im Standardkoordinatensystem sowohl auf dem Einheitskreis wie auch auf der von dem Vektor $(2,-1)^\mathsf{T}$ aufgespannten Gerade liegt. Ebenso wissen wir, dass f_2 in $\mathbb{E}$ im Schnitt der von $(1,2)^\mathsf{T}$ aufgespannten Gerade und dem Einheitskreis liegt. Es ergibt sich folgendes Bild:



Aufgabe H 48. *Symmetrische Matrizen*
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Finden Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

(c) Ist A positiv definit, negativ definit oder indefinit?

Lösungshinweise hierzu:

(a) A ist symmetrisch und deshalb diagonalisierbar. Sei $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, dann ist $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$. Sei $\mu \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, wobei $v, w \in \mathbb{R}^2$. Aus $A \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5v + Cw \\ Cv + 5w \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ folgt

$$Cw = (\mu - 5)v, \ Cv = (\mu - 5)w.$$

Wegen $\det C = -25 \neq 0$ ist C invertierbar und daher $\mu \neq 5$. Es folgt $w = \frac{1}{\mu - 5} Cv$, was eingesetzt in die obige erste Gleichung $C^2 v = (\mu - 5)^2 v$ ergibt. Die Eigenvektoren von A sind dann

$$5 + \lambda_1, 5 - \lambda_1, 5 + \lambda_2, 5 - \lambda_2$$

wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte von C sind. Um leztere zu bestimmen, berechnen wir

$$\det(C - \lambda E_2) = (-4 - \lambda)(4 - \lambda) - 9 = \lambda^2 - 25.$$

Es folgt $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -5$, deshalb sind die Eigenwerten von A 10 und 0.

(b) Sei E_1, E_2 eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von C zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2. Aus **(a)** folgt, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_1 \end{pmatrix}, \; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E_1 \\ -E_1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E_2 \\ E_2 \end{pmatrix}, \; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E_2 \\ -E_2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1 + 5 = 10, 5 - \lambda_1 = 0, 5 + \lambda_2 = 0, 5 - \lambda_2 = 10$ ist. Explizit haben wir

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } E_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) A ist weder positiv definit, noch negativ definit, noch indefinit, da 0 Eigenwert von A ist.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 49. *Quadrik skizzieren*

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform der Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 12x_1 - 4x_2 + 2 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an. Zeichnen Sie in Ihre Skizze auch das Koordinatensystem ein, bezüglich dessen die Quadrik Normalform hat.

Lösungshinweise hierzu: Die Quadrikgleichung lautet in Matrixschreibweise

$$x^\intercal \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A} x + 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -2 \end{pmatrix}}_{=:a^\intercal} x + 2 = 0.$$

Die Eigenwerte von A bestimmen wir durch

$$0 \overset{!}{=} \det(A - \lambda E_2) = (3-\lambda)^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2.$$

Die zugehörigen Eigenräume sind $V(4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ und $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Mit Hilfe der Transformation $x = Fy$, wobei $F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, erhalten wir die Quadrikgleichung

$$\begin{aligned} & 4y_1^2 + 2y_2^2 + 8\sqrt{2}y_1 + 4\sqrt{2}y_2 + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4(y_1^2 + 2\sqrt{2}y_1 + 2 - 2) + 2(y_2^2 + 2\sqrt{2}y_2 + 2 - 2) + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4(y_1 + \sqrt{2})^2 + 2(y_2 + \sqrt{2})^2 = 0. \end{aligned}$$

Mit $z = y - \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$4z_1^2 + 2z_2^2 - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{5}z_1^2 - \frac{1}{5}z_1^2 + 1 = 0 \quad \text{(euklidische Normalform).}$$

Daraus gewinnen wir für die später anzufertigende Skizze die Halbachsenlängen (man setze z_1 bzw. z_2 gleich Null): $\sqrt{5} \approx 2,24$ und $\frac{1}{2}\sqrt{10} \approx 1,58$.
Um die zugehörige Koordinatentransformation zu bestimmen, betrachten wir nochmals

$$z = y - \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = F^\intercal x - \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Fz + \underbrace{F \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Damit ist das Koordinatensystem $\mathbb{G}$, bezüglich dessen Q die obige euklidische Normalform annimmt, gegeben durch

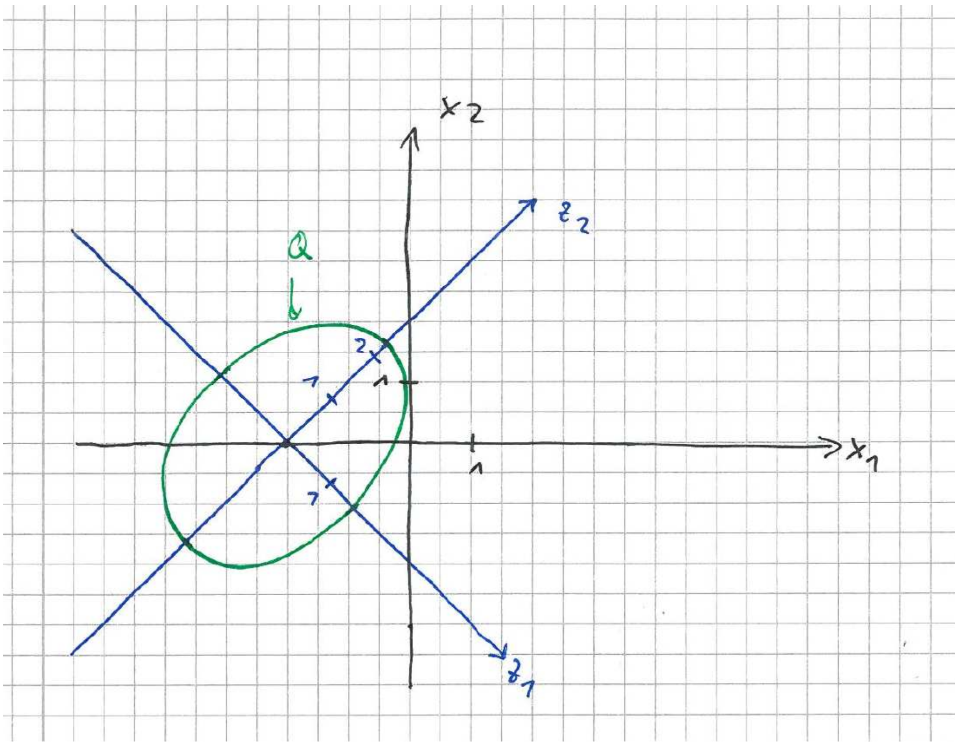
$$\mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Die gesuchte Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ ist dann gegeben durch

$$ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon {}_{\mathbb{G}}v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{E}}v + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. $$

Die zugehörige inverse Transformation (nach der allerdings nicht gefragt ist) lautet

$$ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} \colon {}_{\mathbb{E}}v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{G}}v + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}. $$



Aufgabe H 50. *Quadrik klassifizieren*

Wir betrachten die Quadrik

$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 17x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 2x_2x_3 + 8x_1x_3 + 6x_1 + 12x_2 - 12x_3 + 81 = 0 \right\}.$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung von Q an.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt von Q.

(c) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Matrixbeschreibung von Q ist

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^\mathsf{T} \begin{pmatrix} 17 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} x + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}^\mathsf{T} x + 81 = 0 \right\}.$$

(b) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 17 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ hat charakteristisches Polynom

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 39\lambda + 19 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 19).$$

Der Eigenwert 19 hat Eigenvektor $\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und der Eigenwert 1 hat den Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir brauchen noch einen Eigenvektor mit Eigenwert 1, den zu den ersten zwei Orthogonal ist, also berechnen wir

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Also ist eine orthonormale Basis von Eigenvektoren durch $\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{3\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}$ gegeben. Also setzen wir

$$F = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{17}} & -\frac{4}{3\sqrt{34}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{3\sqrt{34}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{17}{3\sqrt{34}} \end{pmatrix},$$

sodass $F^\mathsf{T} A F = \begin{pmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dann für $y = Fx$ ist Q durch die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= y^\mathsf{T} F^\mathsf{T} A F y + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} F + 81 \\ &= 19y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \frac{54}{\sqrt{17}} y_2 - \frac{72}{\sqrt{34}} y_3 + 81. \end{aligned}$$

Durch quadratische Erganzung erhalten wir

$$\begin{aligned} y_2^2 + \frac{54}{\sqrt{17}}y_2 &= \left(y_2 + \frac{27}{\sqrt{17}}\right)^2 - \frac{729}{17}, \\ y_3^2 - \frac{72}{\sqrt{34}}y_3 &= \left(y_3 - \frac{36}{\sqrt{34}}\right)^2 - \frac{648}{17} \end{aligned}$$

Also für $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 + \frac{27}{\sqrt{17}}$ und $z_3 = y_3 - \frac{36}{\sqrt{34}}$ ist Q durch die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= 19z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 81 - \frac{729}{17} - \frac{648}{17} \\ &= 19z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \end{aligned}$$

Also ist $19z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ (oder eine nicht-Null reelle Vielfachheit davon) die euklidische Normalform. Die Quadrik ist ein Punkt.

(c) Der Ursprung kommt von der Koordinatentransformation zwischen y und z, und so ist durch $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{27}{\sqrt{17}} \\ \frac{36}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}$ gegeben, und die drei normalisierte Eigenvektoren. Also ist das relevante Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{27}{\sqrt{17}} \\ \frac{36}{\sqrt{34}} \end{pmatrix}; \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{34}}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe H 51. *Modellierung mit Quadriken*

Ein Tunnel in Form eines parabolischen Zylinders überspannt eine (unendlich lange) Straße in der x_1x_2-Ebene. Die Tunnelwand ist gegeben durch den Schnitt von $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geqq 0\}$ mit

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x_1^2 + 16x_2^2 - 16x_1x_2 + 10x_3 = 30\right\}.$$

(a) In welche Richtung verläuft die Straße? (Das heißt, geben Sie einen Vektor an, der parallel zur Straße verläuft)

(b) Wie hoch ist der Tunnel?

(c) Wie breit ist der Tunnel?

Hinweis: Die Fragen lassen sich nach einem Wechsel in ein geeignetes Koordinatensystem leicht beantworten.

Lösungshinweise hierzu: Es ist $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^\intercal Ax + 2a^\intercal x = 30\right\}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 \\ -8 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wir wechseln in ein Koordinatensystem, in dem A Diagonalgestalt hat. Dazu bestimmen wir die Eigenwerte und Eigenräume von A. Es ist leicht zu sehen, dass die Matrix A nur den Rang 1 hat, da A eine Nullzeile besitzt und die zweite Zeile das (-4)-Fache der ersten Zeile ist. Damit besitzt A einen doppelten Nulleigenwert (was eine notwendige Bedingung dafür ist, dass Q ein parabolischer Zylinder ist). Es ist weiterhin $\operatorname{Spur} A = 20$, also ist 20 ebenfalls ein Eigenwert von A.

Zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind leicht zu sehen, nämlich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Diese sind schönerweise auch gleich orthogonal zueinander. Da A symmetrisch ist, sind Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander. Also ergibt sich ein Eigenvektor zum Eigenwert 20, indem wir das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden.

Bemerkung: Das obige Ergebnis kann man natürlich auch erhalten, indem man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnet und anschließend die Eigenräume mit Hilfe des Gauß-Algorithmus bestimmt.

Nach dem Wechsel ins kartesische Koordinatensystem

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

hat Q die Gleichung

$$20y_1^2 + 10y_3 = 30.$$

(a) Wir sehen, dass die Quadrikgleichung bezüglich $\mathbb{F}$ unabhängig von y_2 ist. Das bedeutet geometrisch, dass ein Schnitt des Tunnels mit der Ebene $E_\alpha\colon y_2 = \alpha$ stets die gleiche Parabel $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_3 = p(y_1) = 3 - 2y_1^2$ liefert. Das kann nur dann der Fall sein, wenn die y_2-Achse in Richtung der Straße verläuft. Also schließen wir daraus, dass die Straße parallel zu $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ist.

(b) Da die Quadrikgleichung bezüglich $\mathbb{F}$ gleichzeitig den Querschnitt p orthogonal zur Straße beschreibt, ist die Höhe des Tunnels gegeben durch den höchsten Wert, den y_3 annehmen kann. Das ist $\max_{y_1\in\mathbb{R}}(3-2y_1^2)=3$.

(c) Die Breite der Straße ist gegeben durch den Abstand der Nullstellen von p. Es ist $p(y_1) = 0$ genau dann, wenn $y_1 \in \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$. Damit ist die Breite der Straße gegeben durch $2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$.

Aufgabe H 52. *Metrische Informationen gewinnen*
Die Gestalt der Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_3 + 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$$

ist ein paralleles Ebenenpaar. Geben Sie jeweils die Hessesche Normalform der Ebenen $E_1 \neq E_2$ an, die in Q liegen. Bestimmen Sie den Abstand zwischen E_1 und E_2.

Lösungshinweise hierzu: Wir führen zunächst eine Hauptachsentransformation durch, da die gewünschten Informationen in den angepassten Koordinaten leicht zu gewinnen sind.
In Matrixschreibweise lautet die Quadrikgleichung

$$\underbrace{x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} x + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{=:a^{\mathsf{T}}} x = 0.$$

Man sieht sofort, dass A den Rang 1 hat (die zweite und die dritte Zeile sind Vielfache der ersten), daher hat A einen doppelten Eigenwert 0. Da $\operatorname{spur} A = 6$ die Summe der Eigenwerte ist, ergibt sich als weiterer (und letzter) Eigenwert $\lambda = 6$. Wir berechnen nun die zughörigen Eigenräume:

- $V(6)$: Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf das LGS $(A - 6E_3)x = 0$ an:

$$\left[\begin{array}{rrr||r} -5 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-\frac{1}{5}) \\ -\frac{2}{5}\cdot Z_1 \\ -\frac{1}{5}\cdot Z_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & \frac{12}{5} & -\frac{24}{5} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} +\frac{1}{3}\cdot Z_2 \\ \cdot(-\frac{5}{6}) \\ +2\cdot Z_2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Damit ist $V(6) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- $V(0)$: Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf das LGS $Ax = 0$ an:

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +2\cdot Z_1 \\ -Z_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Damit ist $V(0) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Die gefundenen Eigenvektoren sind allerdings noch nicht orthogonal. Eine Orthonormalbasis von $V(0)$ finden wir zum Beispiel durch das Gram-Schmidtsche Orthonormierungsverfahren:

  - Wir setzen $b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und berechnen nun

$$\widetilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Transformationsmatrix

$$F = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 2\sqrt{6} & 1 \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{6} & -2 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad F^{\mathsf{T}} a = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wird die Quadrikgleichung zu

$$6y_1^2 - 2\sqrt{6}y_1 = 0.$$

Die quadratische Ergänzung

$$6\left(y_1^2 - 2\frac{1}{6}\sqrt{6}y_1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = 6\left(y_1 - \frac{1}{6}\sqrt{6}\right)^2 - 1$$

liefert dann als Quadrikgleichung in euklidischer Normalform

$$-6z_1^2 + 1 = 0$$

bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{15}\sqrt{30} \\ \frac{1}{30}\sqrt{5} \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$.
Es handelt sich also – wie behauptet – um ein Paar paralleler Ebenen. Bezüglich $\mathbb{G}$ sind auch leicht die jeweiligen Hesseschen Normalformen zu bestimmen:

$$E_1\colon z_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad E_2\colon -z_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Der Ursprung von $\mathbb{G}$ liegt also genau in der Mitte der beiden Ebenen und hat jeweils den Abstand $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Damit müssen die beiden Ebenen den Abstand $\frac{2}{\sqrt{6}}$ zueinander haben.
Um jetzt zu den Hesseschen Normalformen in Standardkoordinaten zu gelangen, überlegen wir uns, dass $z = y - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = F^{\mathsf{T}} x - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Projiziert man diese Gleichung auf die erste Komponente, ergibt sich

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 - \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Einsetzen in die Hesseschen Normalformen bezüglich $\mathbb{G}$ ergibt dann

$$E_1\colon -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad E_2\colon -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = 0$$

bezüglich der Standarkoordinaten.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 53. *Folgen I*

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = 5^n,\ b_n = \cos(\tfrac{\pi}{3} + 2\pi n),\ c_n = (-\tfrac{1}{2})^n$$
$$d_n = \tfrac{1}{n^2-2},\ e_n = (-1)^n + \tfrac{1}{2}.$$

(a) Untersuchen Sie, ob die Folgen beschränkt sind und finden Sie gegebenenfalls eine obere und/oder untere Schranke.

(b) Prüfen Sie, ob die Folgen (streng) monoton wachsend bzw. fallend sind.

(c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen.

(d) Geben Sie für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen konvergiert.

Lösungshinweise hierzu:

- Erste Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  Da $5 > 1$, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Beispiel 1.5.8 bestimmt divergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} 5^n = +\infty$.
  Nach Beispiel 1.4.11.5 folgt aus der bestimmten Divergenz, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur den Häufungspunkt $+\infty$ besitzt und als eine mögliche Teilfolge, die gegen $+\infty$ konvergiert, können wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst wählen.
  Mit Induktion sieht man, dass $a_n = 5^n < 5^{n+1} = a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, womit die Folge streng monoton steigend ist mit unterer Schranke $a_1 = 5$. Wegen der bestimmten Divergenz gegen $+\infty$ ist die Folge nach oben unbeschränkt.

- Zweite Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n = \cos(\frac{\pi}{3} + 2\pi n) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Daher ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge.
  Insbesondere gilt also $\frac{1}{2} \leqq b_n \leqq \frac{1}{2}$, womit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Als untere und obere Schranke können wir $\frac{1}{2}$ wählen. Zudem sind konstante Folgen per Definition gleichzeitig monoton steigend und fallend.
  Ferner ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, womit $\frac{1}{2}$ der einzige Häufungspunkt ist, und wir können als konvergente Teilfolge gegen diesen Häufungspunkt die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst wählen.

- Dritte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  Mit Induktion sieht man, dass $4 \leqq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ gilt. Für $n \geqq 2$ folgt damit $|c_n| = \frac{1}{2^n} \leqq \frac{1}{4}$. Da $c_1 = -\frac{1}{2}$, erhalten wir insgesamt, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist mit unterer Schranke $-\frac{1}{2}$ und oberer Schranke $\frac{1}{4}$.
  Da die ersten Folgenglieder $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$ sind, ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder monoton steigend, noch monoton fallend.
  Da $|-\frac{1}{2}| < 1$, ist nach Beispiel 1.5.8 die Folge konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{1}{2})^n = 0$. Somit ist 0 der einzige Häufungspunkt und wir können als mögliche konvergente Teilfolge wieder die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst wählen. Eine weitere konvergent Teilfolge gegen 0 erhalten wir zum Beispiel, indem wir nur jedes zweite Folgenglied wählen, also $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $c_{2k} = (\frac{1}{4})^k$. Nach Beispiel 1.5.8 gilt wegen $\frac{1}{4} < 1$ erneut $\lim\limits_{k\to\infty} (\frac{1}{4})^k = 0$.

- Vierte Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  Mit Induktion sieht man $4 \leqq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$. Für $n \geqq 2$ folgt daraus
  $$0 < 2 \leqq n^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{n^2-2} \leqq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < d_n \leqq \frac{1}{2}.$$
  Da ferner $d_1 = -1$, ist somit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt mit unterer Schranke -1 und oberer Schranke $\frac{1}{2}$.
  Weil die ersten Folgenglieder $-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$ lauten, ist $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder monoton steigend, noch monoton fallend.
  Ferner folgt wegen $\frac{1}{n^2-2} = \frac{1/n^2}{1-2/n^2}$ mit den Grenzwertsätzen, dass $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-2} = 0$. Damit ist 0 der einzige Häufungspunkt der Folge und als mögliche konvergente Teilfolge gegen 0 können wir $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst wählen.
- Fünfte Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  Die Folge ist alternierend mit
  $$e_n = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{3}{2} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$
  Daraus erhalten wir $-\frac{1}{2} \leqq e_n \leqq \frac{3}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt mit unterer Schranke $-\frac{1}{2}$ und oberer Schranke $\frac{3}{2}$.
  Da die Folge zwischen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ alterniert, ist sie weder monton steigend, noch monoton fallend.
  Die obige Fallunterscheidung zeigt, dass jedes Folgenglied von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch ein Glied der konstanten Teilfolgen $(e_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(e_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ abgedeckt ist, wobei $\lim\limits_{k\to\infty} e_{2k-1} = -\frac{1}{2}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} e_{2k} = \frac{3}{2}$. Die Häufungspunkte von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind nach Beispiel 1.4.13 genau die Grenzwerte dieser Teilfolgen, also $-\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$.

Aufgabe H 54. *Häufungspunkte*

Wir setzen $a_0 := 0$ und definieren rekursiv für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$:
$$a_n := \begin{cases} n, & \text{falls } a_{n-1} = 0, \\ a_{n-1} - 1, & \text{falls } a_{n-1} \geqq 1. \end{cases}$$

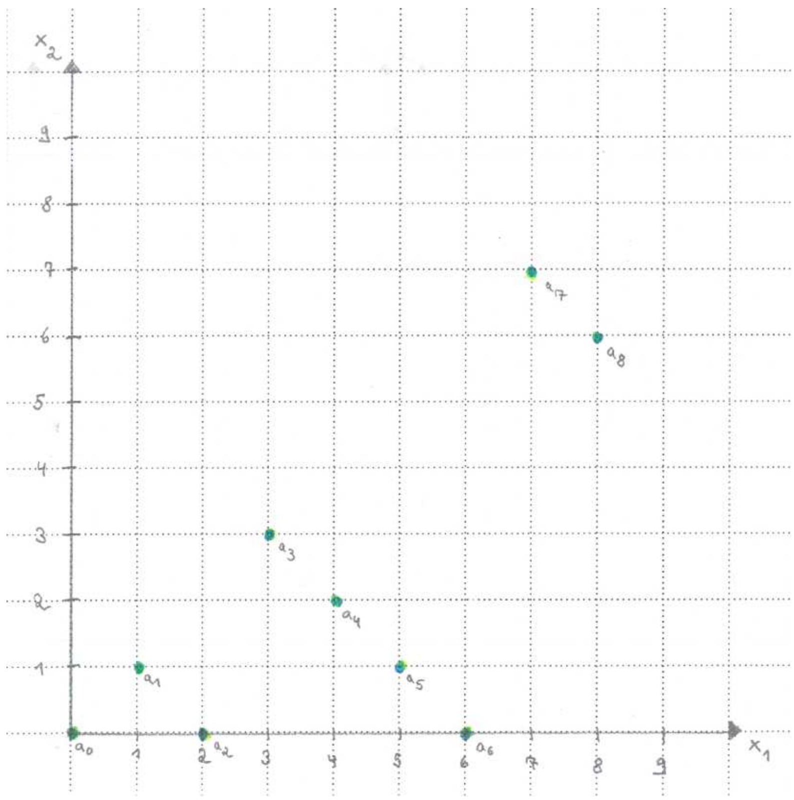
(a) Zeichnen Sie die Punkte $(n, a_n)^\intercal$ für $n \leqq 8$ im Standardkoordinatensystem ein.

(b) Finden Sie alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Bestimmen Sie $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)



(b) Wir behaupten, dass $\mathbb{N}_0$ genau die Menge der Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Hierfür sind zwei Dinge zu zeigen: Zum einen, dass jede Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ als Häufungspunkt auftritt, zum anderen, dass jeder Häufungspunkt in der Menge $\mathbb{N}_0$ liegt.

Zeigen wir zunächst, dass jede Zahl $h \in \mathbb{N}_0$ ein Häufungspunkt ist. Hierfür bemerken wir, dass $a_{m+\ell} = a_m - \ell$ für jede natürliche Zahl m und alle ganzen Zahlen ℓ mit $0 \leqq \ell \leqq a_m$ gilt; dies sieht man beispielsweise induktiv: Für $\ell = 0$ ist $a_{m+\ell} = a_m$. Ist die Aussage für ein $\ell \geqq 0$ bewiesen und ist $\ell + 1 \leqq a_m$, dann ist $\ell < a_m$ bzw. $a_m - \ell > 0$ und nach Induktionsannahme $a_{m+\ell} = a_m - \ell$. Also ist $a_{m+\ell} > 0$ und, per Definition,

$$a_{m+(\ell+1)} = a_{(m+\ell)+1} = a_{m+\ell} - 1 = a_m - \ell - 1 = a_m - (\ell + 1).$$

Nach dieser Beobachung bemerken wir:

$$\text{Für jede natürliche Zahl } m \geqq 1 \text{ gibt es } t \in \mathbb{N} \text{ mit } t > m \text{ und } a_t = h. \qquad (*)$$

Um das einzusehen, wähle $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell > m + h$ beliebig. Ist dann $a_\ell > 0$, so ist $a_{\ell+a_\ell} = a_\ell - a_\ell = 0$, wie wir soeben gezeigt haben. Indem wir gegebenenfalls von ℓ auf $\ell + a_\ell$ übergehen, dürfen wir $a_\ell = 0$ annehmen. Per Definition der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dann $a_{\ell+1} = \ell + 1$ und nach Wahl von ℓ ist $\ell > h$. Für $t := 2(\ell + 1) - h$ gilt dann $t > m$ und wegen $0 \leqq \ell + 1 - h \leqq \ell + 1 = a_{\ell+1}$ auch noch

$$a_t = a_{\ell+1+(\ell+1-h)} = a_{\ell+1} - (\ell + 1 - h) = \ell + 1 - (\ell + 1 - h) = h.$$

Damit ist $(*)$ bewiesen und wir können zeigen, dass h ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dafür müssen wir eine Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden, die gegen h konvergiert. Wir konstruieren eine solche Teilfolge rekursiv. Wähle n_1 mit $a_{n_1} = h$ beliebig; dies ist nach $(*)$ möglich. Sind dann $n_1 < \ldots < n_k$ mit $a_{n_i} = h$ gewählt, so können wir, wiederum nach $(*)$, $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_{k+1}} = h$ finden. Die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist dann eine Teilfolge (denn $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend), die gegen h konvergiert.

Wir müssen nun noch zeigen, dass jeder Häufungspunkt $h \in \mathbb{R}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich in $\mathbb{N}_0$ liegt. Das sieht man so: Weil h ein Häufungspunkt ist, gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche gegen h konvergiert. Nach dem Konvergenzkriterium von Cauchy (Satz 1.7.1), gibt es daher zu $\varepsilon = 1/2$ eine natürliche Zahl $K \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $k, \ell \geqq K$ gilt: $|a_{n_k} - a_{n_\ell}| < 1/2$. Aber für alle m ist a_m eine natürliche Zahl oder 0 und für zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{N}_0$ gilt $|r - s| < 1$ dann und nur dann, wenn $r = s$ ist. Das bedeutet: Für alle $k \geqq K$ ist $a_{n_k} = a_{n_K}$. Bis auf möglicherweise endlich viele Folgenglieder handelt es sich bei der Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ also um eine konstante Folge, daher besitzt diese den Grenzwert $a_{n_K} \in \mathbb{N}_0$. Andererseits ist auch h ein Grenzwert der Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und Grenzwerte eindeutig bestimmt. Deshalb muss $h = a_{n_K}$ gelten und h liegt in $\mathbb{N}_0$.

(c) Im vorherigen Aufgabenteil haben wir gesehen: Die Menge der Häufungspunkte ist genau $\mathbb{N}_0$. Der kleinste Häufungspunkt ist also 0 und daher $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$. Da jede natürliche Zahl als Häufungspunkt auftritt, ist die Menge aller Häufungspunkte unbeschränkt. Daher gilt $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Aufgabe H 55. *Folgen II*

Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz. Geben Sie außerdem Grenzwerte an, sofern sie existieren.

(a) $\left(\sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{3^k}{5^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\frac{6n^3 - 2n^2 + 4}{7n^3 + 4n^2 - 12n + 33}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(d)** $\left(\sum\limits_{k=0}^{2n} \sum\limits_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^k}{2^\ell}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Diese Folge ist streng monoton fallend nicht–negativ. Betrachten wir die Differenz der Folgenelemente $a_n := \sum_{k=n}^{2n} (3/5)^k$, so gilt nämlich

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{3^k}{5^k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{3^k}{5^k} \\
&= \left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{2n+2} - \left(\frac{3}{5}\right)^{n} \\
&= \frac{3^n}{5^n}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+2} - 1\right).
\end{aligned}
$$

Da die Folge $((3/5)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fällt, gilt dann auch

$$
\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+2} = \frac{3^{n+1} \cdot 5 + 3^{n+2}}{5^{n+2}} = \frac{3^{n+1} \cdot 8}{5^{n+2}} = \frac{8}{5} \cdot \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} < \frac{8}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25} < 1.
$$

Also ist $a_{n+1} - a_n < 0$ bzw. $a_{n+1} < a_n$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monton fällt und nicht–negativ ist, ist die Folge beschränkt und nach Satz 1.6.5 konvergent.

Um den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu berechnen, vergleichen wir diese mit den Partialsummen $S_m := \sum_{k=0}^{m} (3/5)^k$ der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (3/5)^k$. Da $3/5 < 1$, ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (3/5)^k$ nach 1.8.4 konvergent. Die Partialsummen

S_m sind streng monoton steigend, also gilt $S_m \leqq \sum_{k=0}^{\infty}(3/5)^k$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt damit

$$0 \leqq a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{3^n}{5^n} = S_{2n} - S_{n-1} \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{5^k} - S_{n-1}.$$

Die Folge $(\sum_{k=0}^{\infty}(3/5)^k - S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert aber gegen 0, denn $\sum_{k=0}^{\infty}(3/5)^k$ ist ja gerade der Grenzwert der Folge $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Nach dem Sandwichsatz muss dann auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren.

(b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := (\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k})^2$ ist streng monoton steigend, da nur positive Terme addiert werden. Somit ist die untere Schranke der Folge $b_1 = 1$. Die Folge ist aber nicht nach oben beschränkt, denn sonst gäbe es eine Konstante $C \geqq 0$ mit $b_n \leqq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und dann gälte auch

$$C \geqq b_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Wir wissen aber bereits aus der Vorlesung, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ unbeschränkt ist (weil sie nicht konvergiert, aber ihre Partialsummen monoton steigend sind) und deshalb ist es auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Außerdem kann die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergieren, denn sonst wäre sie nach Lemma 1.5.2 insbesondere beschränkt.

(c) Wir haben

$$c_n := \frac{6n^3 - 2n^2 + 4}{7n^3 + 4n^2 - 12n + 33} = \frac{6 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^3}}{7 + \frac{4}{n} - \frac{12}{n^2} + \frac{33}{n^3}}.$$

Gemäß den in der Vorlesung bewiesenen Rechenregeln für Summen konvergenter Folgen ist die Folge $(6 - 2/n + 4/n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert 6. Aus dem selben Grund konvergiert die Folge $(7 + 4/n - 12/n^2 + 33/n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 7. Außerdem gilt

$$7 + \frac{4}{n} - \frac{12}{n^2} + \frac{33}{n^3} = 7 + \frac{4n^2 - 12n + 33}{n^3} = 7 + \frac{4n(n-3) + 33}{n^3} > 7$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; für $n < 3$ rechnet man dies nach, für $n \geqq 3$ sieht man die Ungleichung unmittelbar an obiger Darstellung. In jedem Fall sind die Folgenglieder der Folge $(7 + 4/n - 12/n^2 + 33/n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ niemals 0, daher folgt wiederum aus den Rechenregeln für Quotienten konvergenter Folgen, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $6/7$ konvergiert. Insbesondere ist sie nach Lemma 1.5.2 beschränkt.

Verbleibt die Monotonie der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu untersuchen. Schreibe dafür

$$p_n := 6n^3 - 2n^2 + 4 \text{ und } q_n := 7n^3 + 4n^2 - 12n + 33.$$

Wir haben bereits gesehen, dass q_n/n^3 und damit auch q_n strikt positiv ist. Also gilt

$$\begin{aligned} c_n < c_{n+1} &\iff \frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \\ &\iff p_n q_{n+1} < p_{n+1} q_n \\ &\iff p_n \cdot \big(q_{n+1} - q_n\big) < \big(p_{n+1} - p_n\big) \cdot q_n \end{aligned}$$

und ferner gelten die folgenden Identitäten

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \text{ und } (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

Das gibt

$$q_{n+1} - q_n = 7(3n^2 + 3n + 1) + 4(2n + 1) - 12 = 21n^2 + 29n - 1$$

und

$$p_{n+1} - p_n = 6(3n^2 + 3n + 1) - 2(2n + 1) = 18n^2 + 14n + 4.$$

Also haben wir

$$c_n < c_{n+1} \iff p_n \cdot (21n^2 + 29n - 1) < (18n^2 + 14n + 4) \cdot q_n$$

Nun ist aber auch p_n strikt positiv, denn es gilt $6n^3 \geqq 6n^2$ und somit auch $p_n = 6n^3 - 2n^2 + 4 \geqq 4n^2 + 4 > 0$. Und wegen $29n - 1 < 30n$ folgt damit schließlich

$$\begin{aligned} p_n \cdot (21n^2 + 29n - 1) &< p_n \cdot (21n^2 + 30n) \\ &= (6n^3 - 2n^2 + 4) \cdot (21n^2 + 30n) \\ &= 6n \cdot (3n^3 - n^2 + 2) \cdot (7n + 10) \\ &= 6n \cdot (21n^4 + 23n^3 - 10n^2 + 14n + 20). \end{aligned}$$

Da $14n + 4 > 12n$ und q_n strikt positiv, folgt zudem

$$\begin{aligned} q_n \cdot (18n^2 + 14n + 4) &> q_n \cdot (18n^2 + 12n) \\ &= (7n^3 + 4n^2 - 12n + 33) \cdot (18n^2 + 12n) \\ &= 6n \cdot (7n^3 + 4n^2 - 12n + 33) \cdot (3n + 2) \\ &= 6n \cdot (21n^4 + 26n^3 - 28n^2 + 75n + 66). \end{aligned}$$

Zusammengenommen erhalten wir, unter Verwendung von $61n + 46 > 60n$, schließlich

$$\begin{aligned} (18n^2 + 14n + 4) \cdot q_n - p_n \cdot (21n^2 + 29n - 1) &> 6n(3n^3 - 18n^2 + 61n + 46) \\ &> 6n(3n^3 - 18n^2 + 60n) \\ &= 18n^2(n^2 - 6n + 20) \\ &> 0. \end{aligned}$$

In die letzte Ungleichung geht ein, dass $n^2 - 6n = n(n - 6)$ nur für $n \leqq 5$ negativ sein kann, aber $n^2 - 6n \geqq -9$ für $n \leqq 5$ erfüllt ist. Also gilt $c_n < c_{n+1}$ und die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend.

(d) Wir setzen

$$d_n := \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^k}{2^\ell}$$

und betrachten die Summanden von d_n. Für jedes $k \geqq 0$ gilt

$$\sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^k}{2^\ell} = (-1)^k \cdot \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{2^\ell} = (-1)^k \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = (-1)^k \cdot \left(2 - \frac{1}{2^k}\right),$$

wobei wir zur expliziten Berechnung der Summe $\sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{2^\ell}$ die Formeln aus 1.8.4 verwendet haben. Also folgt

$$d_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \left(2 - \frac{1}{2^k}\right) = 2 - \sum_{k=0}^{2n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1/2)^k$ ist konvergent, da es sich gerade um die Partialsummen der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1/2)^k$ handelt. Also ist auch die Teilfolge $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit demselben Grenzwert. Weil $d_n = 2 - S_{2n}$ gilt, ist deshalb auch $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 2 - \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = 2 - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Weil die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist sie nach Lemma 1.5.2 auch beschränkt. Wir untersuchen die Folge auf Monotonie. Es gilt

$$d_{n+1} - d_n = 2 - \sum_{k=0}^{2n+2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 + \sum_{k=0}^{2n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2^{2n+2}} = \frac{1}{2^{2n+2}} > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit ist die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend.

Aufgabe H 56. *ε–Kriterium*

Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ sowie $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{7}{6^k}$.

(a) Berechnen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie eine natürliche Zahl N so an, dass alle Folgenglieder a_n mit $n \geqq N$ in der $(10)^{-15}$–Umgebung von a liegen.

(b) Verfahren Sie analog für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$a_n = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}}.$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. Es ist nun $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| \overset{!}{<} 10^{-15}$ genau dann, wenn

$$\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| < 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2(2n+1)} < 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad n > \frac{1}{4}\cdot 10^{15} - \frac{1}{2} = 25\cdot 10^{13} - \frac{1}{2}.$$

Somit ist zum Beispiel $N = 25 \cdot 10^{13} \in \mathbb{N}$ eine geeignete Wahl.

(b) Es ist nach den Summenformeln aus 1.8.4 zunächst

$$b_n = 7\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^k = 7\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{6}} = 7\cdot\frac{6-\left(\frac{1}{6}\right)^{n}}{5} = \frac{42}{5} - \frac{7}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{42}{5}$. Es ist

$$\left|b_n - \frac{42}{5}\right| \overset{!}{<} 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{7}{5}\cdot 6^{-n} < 10^{-15} \quad\Leftrightarrow\quad 14\cdot 10^{14} < 6^n.$$

Wir können zum Beispiel $N = 21$ wählen, denn aus $14 < 36 = 6^2$, $10^2 = 100 < 216 = 6^3$, $10^3 = 1000 < 1296 = 6^4$ folgt $14\cdot 10^{14} = 14\cdot 10^2\cdot(10^3)^4 < 6^2\cdot 6^3\cdot 6^{16} = 6^{21}$.

Bemerkung:

Obwohl wir im letzten Schritt grobe Abschätzungen benutzt haben, liegen wir nicht weit entfernt von der kleinstmöglichen Wahl $N = 20$.