R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

1. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Vereinfachen*

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}$.

(b) $\sqrt[5]{\frac{64x^{11}y^{12}}{\frac{1}{16}x^{-4}y^2}}$.

(c) $\dfrac{(a+b)^4-((a+b)(x-y))^2-a^2+x^2-2ab-b^2+y^2-2xy}{(a+b-x+y)(a^2+2ab+b^2-1)(x+y)}$ für $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ mit $x+y\neq 0,\ x-y\neq 0,\ |a+b|\neq 1,\ a+b\neq x-y$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}=3+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{10}{3}}}=3+\frac{1}{\frac{33}{10}}=3+\frac{10}{33}=\frac{109}{10}\,.$$

(b) Es gilt:

$$\sqrt[5]{\frac{64x^{11}y^{12}}{\frac{1}{16}x^{-4}y^2}}=\sqrt[5]{\frac{2^6x^{(11-(-4))}y^{(12-2)}}{2^{-4}}}=\sqrt[5]{2^{(6+4)}x^{15}y^{10}}=\sqrt[5]{(2^2)^5(x^3)^5(y^2)^5}=4x^3y^2\,.$$

(c) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
&\frac{(a+b)^4-((a+b)(x-y))^2-a^2+x^2-2ab-b^2+y^2-2xy}{(a+b-x+y)(a^2+2ab+b^2-1)(x+y)}\\
=&\frac{(a+b)^2((a+b)^2-(x-y)^2)+(x^2-2xy+y^2)-(a^2+2ab+b^2)}{(a+b-x+y)\left((a+b)^2-1\right)(x+y)}\\
=&\frac{(a+b)^2\left((a+b)+(x-y)\right)\left((a+b)-(x-y)\right)+\left((x-y)^2-(a+b)^2\right)}{(a+b-x+y)\left((a+b)^2-1\right)(x+y)}\\
=&\frac{(a+b)^2\left((a+b)+(x-y)\right)\left((a+b)-(x-y)\right)+\left((x-y)-(a+b)\right)\left((x-y)+(a+b)\right)}{(a+b-(x-y))\left((a+b)^2-1\right)(x+y)}\\
=&\frac{(a+b)^2\left((a+b)+(x-y)\right)\left((a+b)-(x-y)\right)-\left((a+b)-(x-y)\right)\left((a+b)+(x-y)\right)}{(a+b-(x-y))\left((a+b)^2-1\right)(x+y)}\\
=&\frac{\left((a+b)^2-1\right)\left((a+b)+(x-y)\right)\left((a+b)-(x-y)\right)}{(a+b-(x-y))\left((a+b)^2-1\right)(x+y)}\\
=&\frac{a+b+x-y}{x+y}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 2. *Teleskopsummen*

Berechnen Sie

(a) $\sqrt{3}\sum_{n=0}^{7}\left(-(\sqrt{3})^n+\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^n\right).$ **(b)** $\sum_{k=2}^{10}2^k.$

(c) $\sum_{n=3}^{8}\frac{1}{n(n+1)}.$

Hinweis: Verwenden Sie die Teleskopsummenformel aus P3 (a).

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit P3 (a) gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\sum_{n=0}^{7}\left(-(\sqrt{3})^n+\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^n\right)&=\sum_{n=0}^{7}\left(-(\sqrt{3})^{n+1}+(\sqrt{3})^n\right)\\&=-\sum_{n=0}^{7}\left((\sqrt{3})^{n+1}-(\sqrt{3})^n\right)\\&=-(\sqrt{3}^8-\sqrt{3}^0)=1-3^4=-80.\end{aligned}$$

(b) Da nach P3 (a) einerseits

$$\sum_{k=2}^{10}(2^{k+1}-2^k)=2^{11}-2^2,$$

gilt und andererseits

$$\sum_{k=2}^{10}(2^{k+1}-2^k)=\sum_{k=2}^{10}2^k(2-1)=\sum_{k=2}^{10}2^k,$$

ist, gilt

$$\sum_{k=2}^{10}2^k=2^{11}-2^2=2^2(2^9-1)=4(512-1)=2044\,.$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{8}\frac{1}{n(n+1)}&=\sum_{n=3}^{8}\frac{(n+1)-(n)}{n(n+1)}\\&=\sum_{n=3}^{8}\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}\\&=\sum_{n=3}^{8}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\&=-\sum_{n=3}^{8}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\\&=-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe H 3. *Induktion*

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ die Ungleichung $(n+1)^n \geqq 2^n n!$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit 1.3.5 aus der Vorlesung, dass $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geqq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Gilt die Ungleichung aus (a) für alle $n \in \mathbb{N}_0$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zunächst halten wir fest, dass wegen 1.3.5 für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geqq 1+(n+1)\frac{1}{n+1} = 2$ gilt.

IA Wir zeigen die Aussage für $n=2$: Es ist

$$(2+1)^2 = 3^2 = 9 \geqq 8 = 2^3 = (2^2)2!.$$

IH Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ die Ungleichung

$$(n+1)^n \geqq 2^n n!.$$

gilt.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$:

$$\begin{aligned}
2^{n+1}(n+1)! &= (2^n)(2)(n+1)n! = 2(n+1)(2^n n!) \\
&\overset{\text{IH}}{\leqq} 2(n+1)(n+1)^n \leqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}(n+1)^{n+1} \\
&= \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)(n+1)\right)^{n+1} = ((n+1)+1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ bewiesen.

(b) FFür $n=1$ gilt $2^1 = 2 \leqq (2^1)\cdot 1!$, für $n=0$ gilt $1^0 = 1 \leqq 2^0 \cdot \underbrace{0!}_{=1}$. Somit gilt die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Produkten*

Analog zur Summenschreibweise führen wir das Produktsymbol ein: $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ bedeutet, dass man den Term A_i für alle i von 1 bis n auswertet und die entstandenen Zahlen ausmultipliziert.

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$ so, dass $a_n \geqq 0$.
Zeigen Sie mit Induktion, dass $1+\sum_{k=1}^{n} a_k \leqq \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ gilt.

(b) Seien $b_k \in \mathbb{N}_0$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie $P_n := \prod\limits_{k=1}^{n}(2b_k+1)$.

Zeigen Sie induktiv, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{b} = \tilde{b}(n) \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $P_n = 2\tilde{b}+1$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zur Erinnerung: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \geqq 0$ und $b \geqq 0$, so ist $ab \geqq 0$. Diese Tatsache wird im Folgenden verwendet.

IA Wir zeigen die Aussage für $k = 1$: Es ist

$$1 + \sum_{k=1}^{1} a_k = 1 + a_1 \leqq (1 + a_1) = \prod_{k=1}^{1}(1 + a_k).$$

IH Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 1$ die Ungleichung

$$1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \leqq \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k).$$

gilt.

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(1 + a_k) &= (1 + a_{n+1}) \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \\ &\overset{\text{IH}}{\geqq} (1 + a_{n+1})(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k) \\ &= 1 + a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\geqq 1 + (\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k\end{aligned}$$

wegen $a_{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_k \geqq 0$.

Folglich gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 1$.

(b) Zur Erinnerung: Wenn $a, b \in \mathbb{N}_0$, so ist $ab \in \mathbb{N}_0$.

IA Wir zeigen die Aussage für $k = 1$: Es ist

$$P_1 = \prod_{k=1}^{1}(2b_k + 1) = 2b_1 + 1, .$$

IH Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{b}(n)$ existiert mit

$$P_n = 2\tilde{b}(n) + 1 .$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$:

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \prod_{k=1}^{n+1} 2b_k + 1 \\
&= (\prod_{k=1}^{n} 2b_k + 1)(2b_{n+1} + 1) \\
&\overset{\text{IH}}{=} (2\tilde{b}(n) + 1)(2b_{n+1} + 1) \\
&= 2\tilde{b}(n) \cdot 2b_{n+1} + 2\tilde{b}(n) + 2b_{n+1} + 1 \\
&= 2\left(2\tilde{b}(n)b_{n+1} + b_{n+1} + \tilde{b}(n)\right) + 1.
\end{aligned}$$

Mit $\tilde{b}(n+1) = 2\tilde{b}(n)b_{n+1} + b_{n+1} + \tilde{b}(n) \in \mathbb{N}_0$ gilt die Behauptung somit auch für $n+1$.

Nach volllständiger Induktion existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{b}(n)$ mit

$$P_n = 2\tilde{b}(n) + 1\,.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 5. *Skizzen von Funktionsgraphen*

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

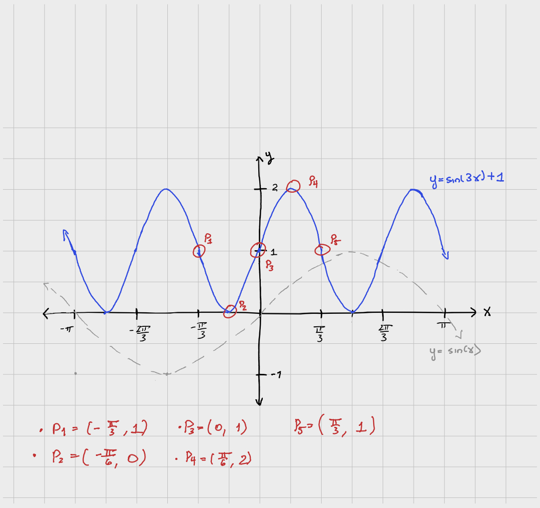
(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(3x) + 1$

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1 - (x-1)^2$

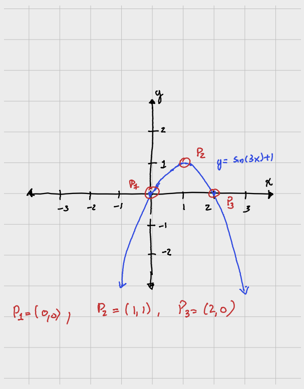
Hinweis: Eine solche Skizze beinhaltet immer eine Achsenbeschriftung mit Pfeilen und eine sinnvolle Achsenskalierung. Wir erwarten von Hand gefertigte Skizzen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch Einsetzen von Teststellen $\big(f(-\pi/6) = 0,\ f(-\pi/3) = f(0) = f(2\pi/3) = 1,\ f(\pi/6) = 2\big)$ sowie Ausnutzen der $\frac{2}{3}\pi$-Periodizität erhalten wir die folgende Skizze:



(b) Durch Einsetzen von Teststellen $\big(g(0) = 0 = g(2),\ g(1) = 1,\ g(-1) = g(3) = -3\big)$ sowie Ausnutzen von Symmetrie erhalten wir die folgende Skizze:



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 6. *Polynome, Binomischer Lehrsatz*

(a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $(x^2-1)(x+3) = 2x^2+4x-6$.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $x^4-2x^3-8x^2+18x-9$.

(c) Zeigen Sie, dass $-1-x^{100}-x^{10}-x^4+10x^2-25$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da

$$\begin{aligned}(x^2-1)(x+3)-(2x^2+4x-6) &= (x-1)(x+1)(x+3)-2(x-1)(x+3)\\ &= (x-1)(x+3)(x-1)\end{aligned}$$

ergibt,sind die Lösungen sind $x=-1$ und $x=-3$.
Die Faktorisierung $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ ergibt sich hierbei beispielsweise über die allgmeine Lösungsformel:

$$x^2+2x-3=0 \qquad \Downarrow$$

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{4-4\cdot(-3)}}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3\,.$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}x^4-2x^3-8x^2+18x-9 &= x^2\cdot(x^2-2x+1)-9\left(x^2-2x+1\right)\\ &= (x^2-9)\cdot(x-1)^2 = (x-1)^2(x-3)(x+3)\end{aligned}$$

Die Nullstellen sind folglich $x=-3$, $x=1$, und $x=-3$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}-1-x^{100}-x^{10}-x^4+10x^2-25 &= -1-(x^{100}+x^{10})-(x^4-10x^2+25)\\ &= -1-(x^{100}+x^{10})-(x^4-10x^2+25)\\ &= -1-(x^{100}+x^{10})-(x^2-5)^2\,,\end{aligned}$$

woraus mit $-(x^{100}+x^{10}) \leqq 0$ und $-(x^2-5)^2 \leqq 0$

$$-1-x^{100}-x^{10}-x^4+10x^2-25 = -1-(x^{100}+x^{10})-(x^2-5)^2 \leqq -1 < 0.$$

folgt. Wir kommen zu dem Schluss, dass $-1-x^{100}-x^{10}-x^4+10x^2-25$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Aufgabe H 7. *Ungleichungen und Betrag*

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

(a) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x-10} \geqq \dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)(x+5)}$.

(b) $|x^2+4| \leqq |x-1|+|x-3|$.

(c) $|-3\cos(2x+10)|-|-5| > 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir faktorisieren zuerst die Polynome:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= (x-1)(x+2), \\ x^2 + 3x - 10 &= (x+5)(x-2), \\ x^2 + 2x - 3 &= (x-1)(x+3). \end{aligned}$$

Wir vereinfachen den rationalen Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2+x-2}{x^2+3x-10} \geqq \frac{x^2+2x-3}{(x-2)(x+5)} \\ \iff\ & \frac{(x-1)(x+2)}{(x+5)(x-2)} - \frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+5)} \geqq 0 \\ \iff\ & \frac{(x-1)(x+2)-(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+5)} \geqq 0 \\ \iff\ & \frac{(x-1)(x+2-x-3)}{(x-2)(x+5)} \geqq 0 \\ \iff\ & \frac{(x-1)(-1)}{(x-2)(x+5)} \geqq 0 \\ \iff\ & \frac{x-1}{(x-2)(x+5)} \leqq 0. \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Zählers und des Nenners sind $x=-5$, $x=1$ und $x=2$.

- Wenn $x < -5$ ist, dann sind $x-1<0$, $x-2<0$ und $x+5<0$, also ist
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)} < 0\,.$$
- Wenn $x=-5$ ist, dann ist
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)}$$
nicht definiert.
- Wenn $-5 < x < 1$ ist, dann sind $x-1<0$, $x-2<0$ und $x+5>0$, also ist
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)} > 0\,.$$
- Wenn $x=1$ ist, dann ist
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)} = 0\,.$$
- Wenn $1 < x < 2$ ist, dann sind $x-1>0$, $x-2<0$ und $x+5>0$, also ist
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)} < 0\,.$$
- Wenn $x=2$ ist, dann
$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)}$$
nicht definiert.

- Wenn $2 < x$, dann sind $x-1>0$, $x-2>0$ und $x+5>0$, also ist

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+5)} > 0\,.$$

Die Lösungmenge ist folglich $(-\infty,-5)\cup[1,2)$.

(b) Beachten Sie, dass $x^2+4 \geqq 0$ für $x\in\mathbb{R}$, also

$$|x^2+4| \leqq |x-1|+|x-3| \iff 0 \leqq |x-1|+|x-3|-x^2-4.$$

Wir analysieren, wann $x-1$ und $x-3$ das Vorzeichen ändern.

- Wenn $x<1$ ist, sind $|x-1| = -(x-1) = 1-x$ und $|x-3| = 3-x$, folglich gilt
$$|x-1|+|x-3|-x^2-4 = 4-2x-x^2-4 = (-x)(x+2)\,.$$
Daher entspricht die Ungleichung für $x<1$ der Ungleichung $0 \leqq (-x)(x+2)$. Die Nullstellen für $(-x)(x+2)$ sind $x=-2$ und $x=0$.
  - Wenn $x<-2$ ist, dann sind $-x>0$, $(x+2)<0$ und $(-x)(x+2)<0$.
  - Wenn $x=-2$ oder $x=0$ ist, dann ist $(-x)(x+2)=0$.
  - Wenn $-2<x<0$ ist, dann sind $-x>0$, $(x+2)>0$ und $(-x)(x+2)>0$.
  - Wenn $x=0$ ist, dann ist $(-x)(x+2)=0$.
  - Wenn $0<x<1$ ist, dann sind $-x>0$, $(x-2)<0$ und $(-x)(x+2)<0$.

  Somit ist die Ungleichung für $x<1$ nur für $x\in M_1=[-2,0]$ erfüllt.
- Für $x=1$ gilt $|x^2+4|=5$ und $|x-1|+|x-3|=2$, also ist die Ungleichung nicht erfüllt.
- Wenn $1<x<3$ ist, folgen $|x-1|=x-1$ und $|x-3|=3-x$, also
$$|x-1|+|x-3|-x^2-4 = 2-x^2-4 = -(2+x^2)\,.$$
Somit entspricht die Ungleichung $0\leqq -(2+x^2)$ der Ungliechung
$$0 \geqq 2+x^2\,.$$
Aber $2+x^2 \geqq 2 > 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, die Ungleichung gilt für kein $x\in(1,3)$.
- Wenn $x=3$ ist, dann ist $|x^2+4|=13$ und $|x-1|+|x-3|=2$ also gilt die Ungleichung nicht.
- Wann $3<x$ ist, sind $|x-1|=x-1$ und $|x-3|=x-3$, es gilt
$$|x-1|+|x-3|-x^2-4 = -x^2+2x-8\,.$$
Die Ungleichung ist nun
$$0 \leqq -x^2+2x-8 = -x^2+2x-1-7 = -(x-1)^2-7 < 0\,.$$
Folglich gilt die Ungleichung für kein $x>3$.

Die Lösungsmenge ist folglich $[-2,0]$.

(c) Es gilt

$$|-3\cos(2x+10)| = |-3||\cos(2x+10)| \leqq |-3| = 3,$$

also

$$|-3\cos(2x+10)| - |-5| \leqq 3-5 = -2\,,$$

und die Ungleichung ist nie erfüllt. Die Lösungsmenge ist somit leer.

Aufgabe H 8. *Mengen*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

(a) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y, \quad y \geqq -1\}$

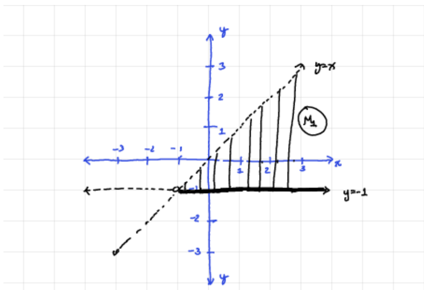
(b) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 - 1 \geqq 0\}$.

(c) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y+1)^2 \leqq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\}$.

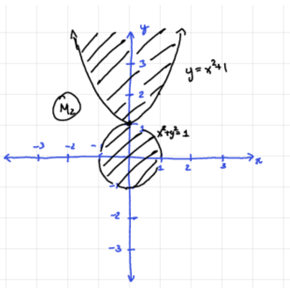
(d) $M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 1, \quad x > y^2\}$.

Lösungshinweise hierzu:

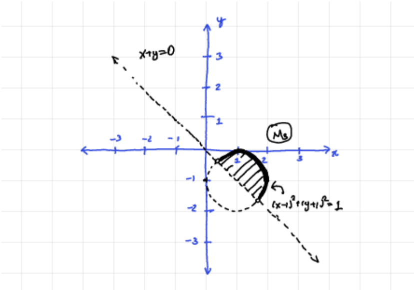
(a) Das Gebiet wird von den Graphen der Funktionen $x \mapsto y$ und $x \mapsto -1$ berandet, wobei es sich in beiden Fällen um Geraden handelt. Hierbei ist zu beachten, dass erstere nicht zur Menge gehört und entsprechend zu Markieren ist. Es ergibt sich folgende Skizze:



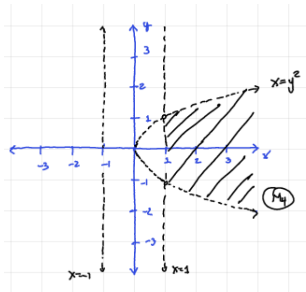
(b) Die erste Menge beschreibt eine Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt im Ursprung. Die zweite Menge besteht aus der durch $y^2 = x^2+1$ gegebenen Parabel sowie der Menge „oberhalb" von dieser. Es ergibt sich folgende Skizze:



(c) Bei der ersten Teilmenge handelt es sich um eine Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $(1,-1)$. Die zweite Menge beinhaltet alle oberhalb der durch $y = -x$ gegebenen Gerade liegenden Punkte. Da besagte Gerade nicht dazugehört, gehören insbesondere die Schnittpunkte mit dem Kreisrand ebenfalls nicht dazu. Es ergibt sich folgende Skizze:



(d) Der Rand $x = y^2$ beschreibt eine an $x = y$ gespiegelte Standardparabel, die Ungleichung $|x| > 1$ alle Punkte, die außerhalb des durch die Geraden $x = -1$ und $x = 1$ berandeten Streifens liegen, woraus sich die eingezeichnete Schnittmenge ergibt. Es ergibt sich folgende Skizze:



Aufgabe H 9. *Ungleichungen*

(a) Für welche $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt $\dfrac{x}{y} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} \geqq 3$?

Hinweis: Ungleichung **1.5.12**.

(b) Sei $a > 1$. Folgern Sie aus **1.5.10**, dass $\sqrt[n]{a} - 1 \leqq \frac{a-1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Sei $x_1 = 2$ und definiere rekursiv $2x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n}$.
Zeigen Sie induktiv mit Hilfe von **1.5.12**, $x_n^2 \geqq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \overset{1.5.12}{\geqq} 3\left(\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3,$$

die Gleichung gilt somit für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

(b) Es ist

$$\sqrt[n]{a} - 1 \leqq \frac{a-1}{n} \iff \sqrt[n]{a} \leqq \frac{a-1}{n} + 1 \iff a \leqq \left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n.$$

Es genügt daher, die dritte Ungleichung zu zeigen. Da $\frac{a-1}{n} > 0$ wegen $a > 1$ ist, ist Ungleichung **1.5.10** anwendbar:

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geqq 1 + n\left(\frac{a-1}{n}\right) = 1 + a - 1 = a.$$

(c) Wir nutzen Induktion.

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Wegen $x_1 = 2$ gilt dass $x_1^2 = 4 \geqq 2$.

IH Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n^2 \geqq 2$ gilt.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$, in dem wir x_{n+1}^2 berechnen:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)\right)^2 \\ &= \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\right)^2 \\ &= \frac{x_n^2}{4} + 1 + \frac{1}{x_n^2} \\ &= 2\left(\frac{\frac{x_n^2}{4} + \frac{1}{x_n^2}}{2}\right) + 1. \end{aligned}$$

Da aber nach Induktionshypothese $x_n^2 \geqq 2$ gilt, folgt insbesondere $\frac{x_n^2}{4} > 0$ und $\frac{1}{x_n^2} > 0$ und wir können Ungleichung **1.5.12** nutzen:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= 2\left(\frac{\frac{x_n^2}{4} + \frac{1}{x_n^2}}{2}\right) + 1 \\ &\geqq 2\left(\frac{x_n^2}{4} \cdot \frac{1}{x_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 1$ bewiesen.

Frischhaltebox

Aufgabe H 10. *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion dass

$$3\sum_{k=0}^{n-1} 5^{n-1-k}2^k = 5^n - 2^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 1$:

$$3\sum_{k=0}^{0} 5^{1-1-k}2^k = 3\sum_{k=0}^{0} 5^{-k}2^k = 3 = 5^1 - 2^1$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

IS Wir zeigen die Aussage für $n + 1$:

$$\begin{aligned}
3\sum_{k=0}^{(n+1)-1} 5^{(n+1)-1-k}2^k &= 3\sum_{k=0}^{n}(5)(5^{n-1-k})2^k \\
&= 5\left(3\sum_{k=0}^{n-1} 5^{n-1-k}2^k\right) + (5)(3)5^{n-1-n}2^n \\
&\overset{\text{IH}}{=} 5 \cdot (5^n - 2^n) + (3)2^n \\
&= 5^{n+1} - (5)2^n + (3)2^n \\
&= 5^{n+1} - (5-3)2^n \\
&= 5^{n+1} - 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 11. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon x \mapsto (\cos(5x)\,, 2\sin(x))$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \colon x \mapsto 2x^2 + 1$

(c) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \colon \; z \mapsto z(1+i) + \overline{z}(1-i)$

(d) $f_4 \colon \mathbb{C} \smallsetminus \{-2\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{1\} \colon z \mapsto \frac{z}{z+2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) f ist nicht injektiv, so gilt beispielsweise $f_1(0) = (1,0) = f_1(2\pi)$.
Weil $|\cos(x)| \leqq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, gibt keine reelle Zahl x gibt mit $f_1(x) = (-4,0)$, deshalb ist f_1 nicht surjektiv.
Eine Funktion ist genau dann bijektiv, wenn es injektiv sowohl als auch surjektiv ist. Es folgt damit, dass f_1 nicht bijektiv ist.

(b)
- Surjektivität: Der Wert $\frac{1}{2}$ liegt nicht im Bild von f_2, somit ist f_2 nicht surjektiv: Es gilt
$$2x^2 + 1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{4}\,,$$
wofür keine reellle Lösung existiert.
- Injektivität: Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$, wobei $f_2(a) = f_2(b)$ gelte. Es folgt
$$2a^2 + 1 = 2b^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \stackrel{a,b \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} a = b.$$
Somit ist f_2 injektiv.
- Bijektivität: Da f_2 nicht surjektiv ist, ist f_2 nicht bijektiv.

(c) Ist $z = a + b\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl, so gilt $z + \bar{z} = a + b\mathrm{i} + (a - b\mathrm{i}) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$. Insbesondere gilt:
$$\begin{aligned} f_3(z) &= z(1+\mathrm{i}) + \bar{z}(1-\mathrm{i}) = z(1+\mathrm{i}) + z(1\bar{-}\mathrm{i}) = 2\,\mathrm{Re}(z(1+\mathrm{i})) \\ &= 2\,\mathrm{Re}((a+b\mathrm{i})(1+\mathrm{i})) = 2\,\mathrm{Re}((a-b\mathrm{i}) + \mathrm{i}(a+b)) = 2(a-b) \end{aligned}$$

- Injektivität: Die beiden Zahlen 2 und $-2\mathrm{i}$ sind verschieden, aber es gilt
$$f_3(2) = 4 = f_3(-2\mathrm{i}).$$
Somit ist f_3 nicht injektiv.
- Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}$ ein beliebig gewählter Wert. Nun gilt beispielsweise $f_3\left(\frac{y}{2}\right) = y$. Damit ist das Bild von f_3 die gesamte Menge $\mathbb{R}$ und f_3 ist surjektiv.
- Bijektivität: Da f_3 nicht injektiv ist, ist f_3 nicht bijektiv.

(d)
- Injektivität: Seien $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ und es gelte $f_4(z) = f_4(w)$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{z}{z+2} &= \frac{w}{w+2} \\ \Leftrightarrow z(w+2) &= w(z+2) \\ \Leftrightarrow zw+2z &= zw+2w \\ \Leftrightarrow z &= w. \end{aligned}$$

  Somit ist f_4 injektiv.
- Surjektivität: Sei $w = f_4(z) \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} w &= \frac{z}{z+2} \\ \Leftrightarrow w(z+2) &= z \\ \Leftrightarrow (w-1)z+2w &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= -\frac{2w}{w-1} \end{aligned}$$

  Somit existiert zu jedem $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ein z mit $f_4(z) = w$, f_4 ist surjektiv.
- Bijektivität: Da f_4 sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist f_4 bijektiv.

Aufgabe H 12. *Komplexe Zahlen*

Bestimmen Sie jeweils Real- und Imaginärteil, Betrag und Kehrwert der folgenden komplexen Zahlen.

(a) $z_1 = \dfrac{2-\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}$

(b) $z_2 = \dfrac{3}{2}\mathrm{i} + \dfrac{1+2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}$

(c) $z_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})\right)^8$

(d) $z_4 = \dfrac{\left|1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right|^2 - \mathrm{Re}\,(-2+5\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}}{\mathrm{Im}\,(5+2\mathrm{i})}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$z_1 = \frac{2-\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} = \frac{(2-\mathrm{i})\overline{(4+3\mathrm{i})}}{(4+3\mathrm{i})\overline{(4+3\mathrm{i})}} = \frac{(2-\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})}{|4+3\mathrm{i}|^2} = \frac{8-6\mathrm{i}-4\mathrm{i}-3}{4^2+3^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}.$$

Also erhalten wir

$$\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{5} \quad , \quad \mathrm{Im}(z_1) = -\frac{2}{5}$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z_1}}{z_1\bar{z_1}} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}\right) \cdot = 1+2\mathrm{i}$$

(b) Es gilt $(1-\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$. Weiter ergibt sich

$$z_2 = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{1+2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2} = \frac{3}{2}\mathrm{i} - \frac{1+2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{(1+2\mathrm{i})\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{\mathrm{i}-2}{2} = \frac{3}{2}\mathrm{i} + \frac{1}{2}\mathrm{i} - 1 = -1+2\mathrm{i}.$$

Es folgt

$$\mathrm{Re}(z_2) = -1 \quad , \qquad \mathrm{Im}(z_2) = 2$$
$$|z_2| = \sqrt{5} \quad , \quad z_2^{-1} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{i}.$$

(c) Es ist

$$z_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})\right)^8 = \frac{1}{(2)^4}(-1+\mathrm{i})^8 = \frac{1}{16}(-1+\mathrm{i})^8.$$

Es gilt $(-1+\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$. Somit ergibt sich $(-1+\mathrm{i})^8 = (-2\mathrm{i})^4 = 16\mathrm{i}^4 = 16$. Insgesamt ist also $z_3 = 1$. Es gilt

$$\mathrm{Re}(z_3) = 1 \quad , \quad \mathrm{Im}(z_3) = 0, \qquad |z_3| = 1,\ z_3^{-1} = 1.$$

(d) Es ist

$$z_4 = \frac{\left|1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right|^2 - \mathrm{Re}\,(-2+5\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}}{\mathrm{Im}\,(5+2\mathrm{i})} = \frac{(1+3)+2\mathrm{i}}{2} = 2+\mathrm{i}\,.$$

Folglich gilt

$$\mathrm{Re}(z_4) = 2 \quad , \qquad \mathrm{Im}(z_4) = 1$$
$$|z_4| = \sqrt{5} \quad , \quad z_4^{-1} = \frac{\overline{z_4}}{|z_4|^2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}\,.$$

Aufgabe H 13. *Gleichungen im Komplexen*

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z\overline{z} - 3\mathrm{i}\overline{z} = 1 + 3\mathrm{i}$?

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $\frac{1}{2}z^2 + (1-\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i}) = 0$?
Hinweis: Verwenden Sie quadratische Ergänzung!

(c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $z^5 + z^3 - 30z = 0$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $z = x + y\mathrm{i}$. Die Gleichung ist dann $(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(x-y\mathrm{i}) = 1+3\mathrm{i}$. Ausmultiplizieren ergibt $x^2 + y^2 - 3y - 3\mathrm{i}x = 1 + 3\mathrm{i}$. Folglich sind

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3y &= 1 \\ -3x &= 3 \end{cases}$$

Hieraus folgt $x = -1$ und somit $y = 0$ oder 3. Die Lösungen der Gleichung sind $z = -1$ und $z = -1 + 3\mathrm{i}$.

(b) Es gilt:

$$\frac{1}{2}z^2 + (1-\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i}) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2(1-\mathrm{i})z + (4-2\mathrm{i}) = 0$$

wodurch sich die Gleichung umformen lässt zu

$$(z + (1-\mathrm{i}))^2 = -(4-2\mathrm{i}) + (1-\mathrm{i})^2 = -4 + 2\mathrm{i} + 1 - 2\mathrm{i} - 1 = -4$$

Mit $-4 = (\pm 2\mathrm{i})^2$ erhalten wir die Lösungen

$$z_1 = -2\mathrm{i} - (1 - \mathrm{i}) = -1 - \mathrm{i}$$
$$z_2 = 2\mathrm{i} - (1 - \mathrm{i}) = -1 + 3\mathrm{i}$$

Alternativer Lösungsweg:
Wir verwenden die Mitternachtsformel (vgl. Zusatzmaterial)

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= \frac{-(1-\mathrm{i}) \pm \sqrt{(1-\mathrm{i})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2-\mathrm{i})}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1 + \mathrm{i} \pm \sqrt{1 - 2\mathrm{i} - 1 - 4 + 2\mathrm{i}} \\ &= -1 + \mathrm{i} \pm \sqrt{-4} = -1 + \mathrm{i} \pm 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Die Gleichung hat somit die Lösungen $z_1 = -1 + 3\mathrm{i}$ und $z_2 = -1 - \mathrm{i}$.

(c) Ausklammern ergibt die Gleichung

$$z(z^4 + z^2 - 30) = 0\,,$$

welche die Lösung $z_1 = 0$ hat. Die Substition $z^2 = x$ ergibt die quadratische Gleichung $x^2 + x - 30 = 0$. Mit der Mitternachtsformel ergeben sich die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -6$. Durch die Resubstituieren ergibt sich $z_2 = \sqrt{5},\ z_3 = -\sqrt{5}$ und $z_4 = \sqrt{6}\,\mathrm{i},\ z_5 = -\sqrt{6}\,\mathrm{i}$. Die Gleichung hat also die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{6}\,\mathrm{i}, -\sqrt{6}\,\mathrm{i}\}$.

Aufgabe H 14. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(a) $A := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - 2 - \mathrm{i}| \geqq 1 \right\}$

(b) $B := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 3\,\mathrm{Re}(z)^2 = 2\,\mathrm{Im}(z)^2 - \mathrm{Re}(z^2) \right\}$

(c) $C := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) \neq 0 \ \wedge \ 1 < \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)} \leqq 2 \right\}$

Lösungshinweise hierzu:

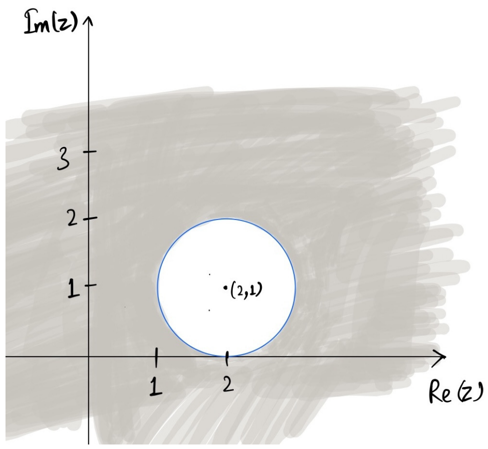
(a) Für $z = a + \mathrm{i}b$ gilt

$$|z - 2 - \mathrm{i}| = |a - 2 + \mathrm{i}(b-1)| = (a-2)^2 + (b-1)^2.$$

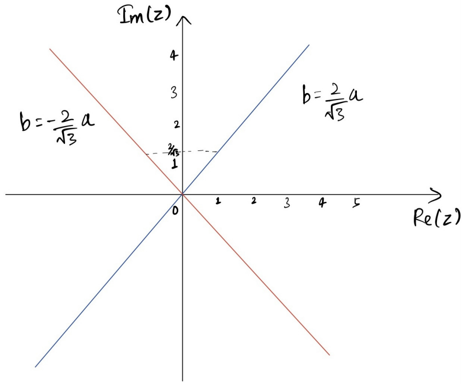
Daher folgt

$$A = \left\{ a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, (a-2)^2 + (b-1)^2 \geqq 1 \right\}.$$

Die Menge A ist eine Scheibe entfernt von einem Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $(2, 1)$.



(b) Es ist $B := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 3\,\mathrm{Re}(z)^2 = 2\,\mathrm{Im}(z)^2 - \mathrm{Re}(z^2)\right\}$. Sei $\mathrm{Re}(z) = a$ und $\mathrm{Im}(z) = b$, dann $z^2 = (a + b\mathrm{i})^2 = (a^2 - b^2) + 2ab\mathrm{i} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2) = (a^2 - b^2)$ und $\mathrm{Im}(z^2) = 2ab$.
$3a^2 = 2b^2 - a^2 + b^2 \Leftrightarrow 4a^2 - 3b^2 = 0$
Es gilt $b = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}a$. Damit ist die Menge die Geraden $b = -\frac{2}{\sqrt{3}}a$ und $b = \frac{2}{\sqrt{3}}a$.



(c) Wir können die Menge C darstellen als $C = \left\{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, b \neq 0 \;\wedge\; 1 < \frac{a}{b} \leqq 2\right\}$. Wegen $\frac{a}{b} > 1 > 0$ für $a + b\mathrm{i} \in C$ sind entweder a und b beide positiv, oder beide negativ. Es gibt also zwei Fälle:

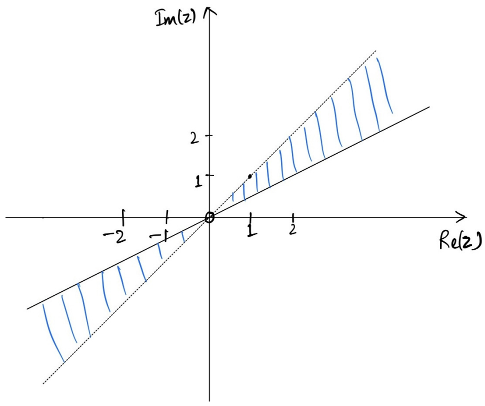
1. Fall: $a > 0$ und $b > 0$: Dann gilt $b < a \leqq 2b$.

2. Fall: $a < 0$ und $b < 0$: Dann gilt $2b \leqq a < b$.

Damit können wir C darstellen als

$$\begin{aligned} C = &\left\{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, a > 0,\; b > 0 \text{ und } b < a \leqq 2b\right\} \cup \\ &\left\{a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C} \,\middle|\, a < 0,\; b < 0 \text{ und } 2b \leqq a < b\right\}. \end{aligned}$$

Dies ergibt die folgende Fläche, wobei die gestrichelte Gerade und der Punkt 0 nicht zu C gehören.



Frischhaltebox

Aufgabe H 15. *Elementares Rechnen ohne Taschenrechner*

Vereinfachen Sie:

(a) $\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha+1}$.

(b) $\frac{\alpha^3+4\alpha^2-49\alpha-196}{\alpha^2-49} - 3(\alpha + 4)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned}\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha+1} &= \frac{2\alpha(\alpha+1)-\alpha-1}{\alpha+1} \\ &= \frac{(2\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha+1)} = 2\alpha-1.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^3+4\alpha^2-49\alpha-196}{\alpha^2-49}-3(\alpha+4) &= \frac{\alpha(\alpha^2-49+4(\alpha^2-49)}{\alpha^2-49}-3(\alpha+4) \\ &= \frac{(\alpha+4)(\alpha^2-49)}{(\alpha^2-49)}-3(\alpha+4) = -2(\alpha+4).\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 16. *Polarkoordinaten*

Es sei die komplexe Zahl $z := \dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt[4]{8}}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $|z|$ und $\arg(z)$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:

(i) Ist n durch 4 teilbar, so gilt $z^n \in \mathbb{R}$ (d.h. der Imaginärteil von z^n verschwindet).

(ii) Ist n durch 8 teilbar, so gilt $z^n \in \mathbb{R}$ und $z^n > 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$|z| = \left|\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt[4]{8}}\right| = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\,|1+\mathrm{i}| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Da $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $\operatorname{Im}(z) < 0$ sind, können wir $\arg(z)$ wie folgt berechnen:

$$\arg(z) = 2\pi - \arctan(1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

(b) Wie eben berechnet können wir z wie folgt in Polarkoordinaten schreiben:

$$z = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right).$$

Es ist

$$z^n = 2^{-\frac{n}{4}}\left(\cos\left(\frac{7n\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7n\pi}{4}\right)\right). \tag{1}$$

(i) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $n = 4k$ gilt. Damit erhalten wir

$$z^n = z^{4k} = 2^{-\frac{4k}{4}}\left(\cos\left(\frac{7\cdot 4k\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\cdot 4k\pi}{4}\right)\right) = 2^{-k}\left(\cos(7k\pi) + \mathrm{i}\sin(7k\pi)\right).$$

$z^n \in \mathbb{R}$ folgt nun daraus, dass $\sin(7k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Sei nun n durch 8 teilbar, d.h. es gibt $k \in \mathbb{N}$, so dass $n = 8k$ gilt. Wir schreiben

$$z^n = z^{8k} = z^{2\cdot 4k} = \left(z^{4k}\right)^2.$$

Wir haben aber oben gesehen, dass $z^{4k} \in \mathbb{R}$ und $z^{4k} \neq 0$. Daraus folgt direkt die Behauptung.

Bemerkung: Hierdurch lassen sich nun z^{18} und z^{15} wie folgt berechnen.

Aus (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} z^{18} &= 2^{-\frac{18}{4}}\left(\cos\left(\frac{7\cdot 18\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\cdot 18\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2^4\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{63\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{63\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

in Polarkoordinaten und

$$z^{18} = \frac{\sqrt{2}}{32}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{32}\left(0 + \mathrm{i}\cdot(-1)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{32}\mathrm{i}.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} z^{15} &= 2^{-\frac{15}{4}}\left(\cos\left(\frac{7\cdot 15\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\cdot 15\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^4}\left(\cos\left(\frac{105\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{105\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt[4]{2}}{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

in Polarkoordinaten und

$$z^{15} = \frac{\sqrt[4]{2}}{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{32}\left(1 + \mathrm{i}\right).$$

Aufgabe H 17. *Komplexe Wurzeln und Nullstellen*
Finden Sie alle komplexen Lösungen, w, der folgenden Gleichungen.

(a) $w^6 = -27\mathrm{i}$

(b) $w^3 + 32\sqrt{2}\mathrm{i} = 32\sqrt{2}$

(c) $w^2 - 2\mathrm{i}\sin(\vartheta)w - 1 = 0$, wobei $\vartheta \in \mathbb{R}$ ein Parameter sei.
Für welche ϑ ist $w \in \mathbb{R}$? Welche Werte kann w in diesem Fall annehmen?

Hinweis: Zur Berechnung komplexer Nullstellen dürfen Sie unser Zusatzmaterial verwenden.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $z = -27\mathrm{i}$, dann ist

$$|z| = \sqrt{27^2} = 27$$

und wir erhalten damit

$$z = -27\mathrm{i} = 27\left(0 + (-1)\mathrm{i}\right) = 27\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right), \quad \text{wobei} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Nach 1.8.4 sind die 6-ten komplexen Wurzeln von z dann gegeben durch

$$w_l = \sqrt[6]{27}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi l}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi l}{6}\right)\right) \quad \text{für} \quad l \in \{0,1,2,3,4,5\};$$

oder

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}\\
w_1 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\\
w_2 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)\\
w_3 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}\\
w_4 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)\\
w_5 &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)
\end{aligned}$$

(b) Sei $z = 32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}\mathrm{i}$, dann ist

$$|z| = 32\sqrt{2+2} = 64$$

und wir erhalten damit

$$z = 32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}\mathrm{i} = 64\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{i}\right) = 64\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right), \quad \text{wobei} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}.$$

Nach 1.8.4 sind die 3-ten komplexen Wurzeln von z dann gegeben durch

$$w_l = \sqrt[3]{64}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}\right)\right) \quad \text{für} \quad l \in \{0,1,2\};$$

oder

$$\begin{aligned}
w_0 &= 4\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\\
w_1 &= 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\mathrm{i}\\
w_2 &= 4\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)
\end{aligned}$$

(c) Nach der Mitternachtsformel erhalten wir

$$w_{1,2} = \frac{1}{2}\left(2\mathrm{i}\sin(\vartheta) \pm \sqrt{-4\sin^2(\vartheta) + 4}\right) = \mathrm{i}\sin(\vartheta) \pm \cos(\vartheta)$$

Wir haben reelle Lösungen ($w \in \mathbb{R}$) nur wenn $\sin(\vartheta) = 0$, d.h., nur wenn $\vartheta = \pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall ist $w = \cos(\pi k) = \pm 1$.

Aufgabe H 18. *Faktorisierung reeller Polynome, Polynomdivision*

(a) Gegeben sei das Polynom $p(X) = X^5 - 5X^4 + 15X^2 + 5X - 4$.
Schreiben Sie p als Produkt von Linearfaktoren.

(b) Zu reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Polynomfunktion $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$f_{a,b}(X) = 3X^6 + 24X^4 + aX^3 - 33X^2 + b,$$

(i) Für die Polynome $f_{a,b}(X)$ und $g(X) = X^2 + 9$ bestimmen Sie die Polynome $p_{a,b}(X)$ und $r_{a,b}(X)$ mit $f_{a,b}(X) = p_{a,b}(X)g(X) + r_{a,b}(X)$, wobei $r_{a,b}(X)$ kleineren Grad besitzt als $g(X)$.

(ii) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das in (i) bestimmte Polynom $r_{a,b}(X) = 0$?

(iii) Schreiben Sie für die in (ii) gefundenen Werte von a und b das Polynom $f_{a,b}$ als Produkt von Linearfaktoren.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch Ausprobieren finden wir eine Nullstelle bei $X = -1$. Wir führen Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{l}
X^5 - 5X^4 + 0X^3 + 15X^2 + 5X - 4 \ : \ (X+1) = X^4 - 6X^3 + 6X^2 + 9X - 4 \\
\underline{X^5 + X^4} \\
\quad -6X^4 + 0X^3 + 15X^2 + 5X - 4 \\
\quad \underline{-6X^4 - 6X^3} \\
\qquad +6X^3 + 15X^2 + 5X - 4 \\
\qquad \underline{+6X^3 + 6X^2} \\
\qquad\qquad 9X^2 + 5X - 4 \\
\qquad\qquad \underline{9X^2 + 9X} \\
\qquad\qquad\quad -4X - 4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-4X - 4} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Für $X^4 - 6X^3 + 6X^2 + 9X - 4$ finden wir erneut durch Ausprobieren die Nullstelle $X = -1$ und Polynomdivision liefert:

$$\begin{array}{l}
X^4 - 6X^3 + 6X^2 + 9X - 4 \ : \ (X+1) = X^3 - 7X^2 + 13X - 4 \\
\underline{X^4 + X^3} \\
\quad -7X^3 + 6X^2 + 9X - 4 \\
\quad \underline{-7X^3 - 7X^2} \\
\qquad +13X^2 + 9X - 4 \\
\qquad \underline{+13X^2 + 13X} \\
\qquad\qquad - 4X - 4 \\
\qquad\qquad \underline{- 4X - 4} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Für $X^3 - 7X^2 + 13X - 4$ finden wir erneut durch Ausprobieren die Nullstelle $X = 4$

und Polynomdivision liefert:

$$
\begin{array}{rrrrl}
X^3 & -7X^2 & +13X & -4 & :\ (X-4) = X^2-3X+1 \\
X^3 & -4X^2 & & & \\ \cline{1-4}
 & -3X^2 & +13X & -4 & \\
 & -3X^2 & +12X & & \\ \cline{2-4}
 & & +\ X & -4 & \\
 & & +\ X & -4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Wir finden die Nullstellen von X^2-3X+1, indem wir die Mitternachtsformel verwenden:

$$X = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{9-4}) = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nun können wir p als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$p(X) = (X+1)^2(X-4)\left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

(b) **(i)** Wir führen Polynomdivision durch:

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
3X^6 & +0X^5 & +24X^4 & +aX^3 & -33X^2 & +\ 0X & +\ \ b & :\ (X^2+9) = 3X^4-3X^2+aX-6 \\
3X^6 & +0X^5 & +27X^4 & & & & & \\ \cline{1-7}
 & & -\ 3X^4 & +aX^3 & -33X^2 & +\ 0X & +\ \ b & \\
 & & -\ 3X^4 & +0X^3 & -27X^2 & & & \\ \cline{3-7}
 & & & aX^3 & -\ 6X^2 & +\ 0X & +\ \ b & \\
 & & & aX^3 & +\ 0X^2 & +9aX & & \\ \cline{4-7}
 & & & & -\ 6X^2 & -9aX & +\ \ b & \\
 & & & & -\ 6X^2 & +\ 0X & -\ 54 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & -9aX & +b+54 &
\end{array}
$$

Daher ist $f_{a,b}(X) = p_{a,b}(X)g(X) + r_{a,b}(X)$, wobei $p_{a,b} = 3X^4 - 3X^2 + aX - 6$ und $r_{a,b}(X) = -9aX + b + 54$.

(ii) $r_{a,b}(X) = -9aX + b + 54 = 0 \Rightarrow a = 0$ und $b = -54$.

(iii) Es sind $f_{0,-54}(X) = 3X^6+24X^4-33X^2-54$ und $p_{0,-54}(X) = 3X^4-3X^2-6 = 3(X^4-X^2-2)$. Für $p_{0,54}$ liefert die Mitternachtsformel $X^2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+8}) = 2$ oder -1. Die Nullstellen von p sind daher $X = \sqrt{2}$, $X = -\sqrt{2}$, $X = \mathrm{i}$ und $X = -\mathrm{i}$.

Als Produkt von Linearfaktoren:

$$p_{0,-54}(X) = 3(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2}).$$

Außerdem ist $g(X) = X^2 + 9 = (X+3\mathrm{i})(X-3\mathrm{i})$. Zusammen haben wir

$$f_{0,-54}(X) = 3(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2})(X+3\mathrm{i})(X-3\mathrm{i}).$$

Aufgabe H 19. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen jeweils auf Monotonie und Beschränktheit. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine obere Schranke, eine untere Schranke bzw. beides.

(a) $\left(1+\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\frac{3^n}{(n-1)!}\right)_{n\geqq 3}$ **(c)** $\left(\frac{n^2+2}{2^n+(-2)^n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 1+\left(-\frac{3}{5}\right)^n$. Für $k\in\mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \begin{cases} 1-\left(\frac{3}{5}\right)^n & n=2k-1 \\ 1+\left(\frac{3}{5}\right)^n & n=2k \end{cases}$$

und $\left(\frac{3}{5}\right)^n \leqq \frac{3}{5}$ für $n\in\mathbb{N}$. Daher ist $\frac{2}{5} = 1-\frac{3}{5} \leqq a_n < 1$ für ungerade n. In ähnlicher Weise ist $1 < a_n \leqq 1+\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{34}{25}$ für gerade n. Insgesamt stellen wir fest, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist mit untere Schranke $\frac{2}{5}$ und obere Schranke $\frac{34}{25}$.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton, da sie zwischen Zahlen größer als 1 und kleiner als 1 hin und her springt. Z.B. sind die ersten Folgenglieder $\frac{2}{5}, \frac{34}{25}, \frac{98}{125}$.

(b) Wir betrachten die Folge $(b_n)_{n\geqq 3}$ mit $b_n := \frac{3^n}{(n-1)!}$. Die ersten Folgeglieder sind $\frac{27}{2}, \frac{27}{2}, \frac{81}{8}$. Zunächst bemerken wir, dass b_n immer positiv ist, daher ist 0 eine untere Schranke der Folge $(b_n)_{n\geqq 3}$. Wir untersuchen die Folge weiter, indem wir die Differenz $b_{n+1}-b_n$ betrachten:

$$b_{n+1}-b_n = \frac{3^{n+1}}{n!} - \frac{3^n}{(n-1)!} = \underbrace{\frac{3^n}{n!}}_{>0} \underbrace{(3-n)}_{\leqq 0 \text{ für } n\geqq 3} \leqq 0 \quad \text{für } n \geqq 3$$

Damit ist die Folge $(b_n)_{n\geqq 3}$ (nicht streng) monoton fallend, da $b_{n+1} \leqq b_n$ für $n\geqq 3$ gilt. Da die Folge monoton fallend ist, ist die obere Schranke gleich dem ersten Folgemitglied $b_3 = \frac{27}{2}$.

(c) Wir betrachten die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \frac{n^2+2}{2^n+(-2^n)-1}$. Für $k\in\mathbb{N}$ gilt

$$c_n = \begin{cases} -(n^2+2) & n=2k-1 \\ \frac{n^2+2}{2^{n+1}-1} & n=2k \end{cases}$$

und $2^{n+1} > 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Daher ist $c_n < 0$ für ungerade n und $c_n > 0$ für gerade n. Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton, da sie zwischen positiven und negativen Zahlen hin und her springt, z.B. sind die ersten Folgenglieder $-3, \frac{6}{7}, -11, \frac{18}{31}, -27$.
Die Teilfolge $(c_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend(*) und hat keine untere Schranke.
Die Teilfolge $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist auch streng monoton fallend(**), daher ist ihre obere Schranke gleich dem ersten Folgemitglied $c_2 = \frac{6}{7}$.
Insgesamt stellen wir fest, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist mit obere Schranke $\frac{6}{7}$.

(*) $(c_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend:
Sei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} := (c_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$. Wir untersuchen die Monotonie, indem wir die Differenz

$d_{n+1} - d_n$ betrachten:

$$d_{n+1} - d_n = -((n+1)^2 + 2) + (n^2 + 2) = -n^2 - 2n - 3 + n^2 + 2$$
$$= -2n - 1 < 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend, da $d_{n+1} < d_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(**) $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend:
Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} := (c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wir untersuchen die Monotonie, indem wir die Differenz $e_{n+1} - e_n$ betrachten:

$$\begin{aligned}
e_{n+1} - e_n &= \frac{(n+1)^2 + 2}{2^{n+2} - 1} - \frac{n^2 + 2}{2^{n+1} - 1} \\
&= \frac{(2^{n+1} - 1)(n^2 + 2n + 3) - (2^{n+2} - 1)(n^2 + 2)}{(2^{n+1} - 1)(2^{n+2} - 1)} \\
&= \frac{2^{n+1}(n^2 + 2n + 3) - n^2 - 2n - 3 - 2^{n+1}(2n^2 + 4) + n^2 + 2}{(2^{n+1} - 1)(2^{n+2} - 1)} \\
&= \frac{2^{n+1}(-n^2 + 2n - 1) - 2n - 1}{(2^{n+1} - 1)(2^{n+2} - 1)} \\
&= \frac{\overbrace{-2^{n+1}(n-1)^2 - 2n - 1}^{<0}}{\underbrace{(2^{n+1} - 1)(2^{n+2} - 1)}_{>0}} < 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend, da $e_{n+1} < e_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

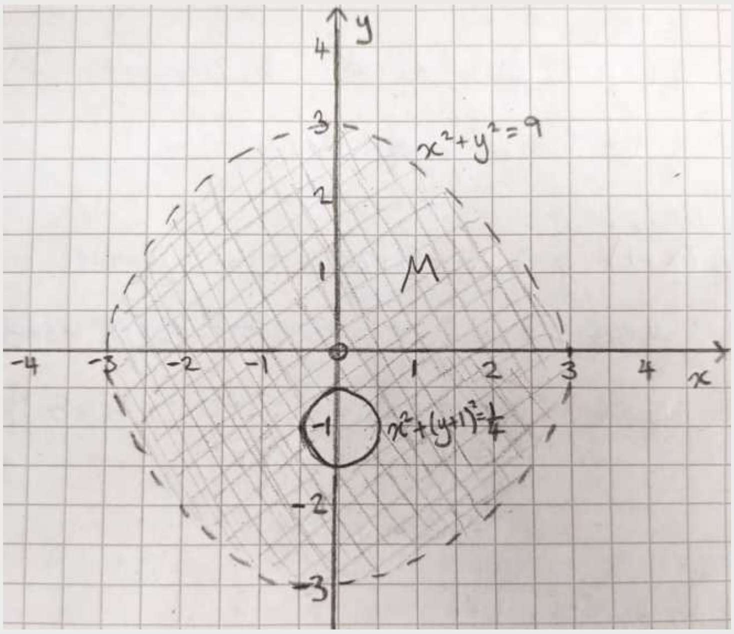
Frischhaltebox

Aufgabe H 20. *Mengen*

Skizzieren Sie die Menge

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 9\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y+1)^2 \geqq \frac{1}{4}\right\}.$$

Lösungshinweise hierzu:



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 21. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere bzw. untere Schranke an.

(a) $\left(n\left(\sin\left(\frac{(2n+3)\pi}{2}\right)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\dfrac{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(\dfrac{2n+1}{(2n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir nutzen die 2π-Periodizität $\sin(x+2\pi k)=\sin(x)$ für $k\in\mathbb{Z}$, um die Folge besser zu verstehen. Es ist

$$\sin\left(\frac{(2n+3)\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}+2\pi\right)=\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)$$
$$=\begin{cases}1 & \text{für } n= \text{ ungerade}\\ -1 & \text{für } n= \text{ gerade}\end{cases}=(-1)^n$$

Insgesamt ist

$$\left(\sin\left(\frac{(2n+3)\pi}{2}\right)\right)^n(-1)^{2n}=1$$

Also ist $(a_n)_n=(n)_n$.
Offensichtlich ist die Folge ist monoton und nach oben unbeschränkt, denn $a_k\to\infty$ für $k\to\infty$.
Eine untere Schranke ist hingegen durch 0 gegeben.

(b) Beachten Sie, dass jeder Term in der Folge positiv ist, da der Zähler $\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}>0$ und der Nenner $\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}>0$ ist.
Also erhalten wir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\mathrm{e}^{n+1}-\mathrm{e}^{-n-1}}{\mathrm{e}^{n+1}+\mathrm{e}^{-n-1}}\cdot\frac{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}=\frac{\mathrm{e}^{2n+1}+\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2n-1}}{\mathrm{e}^{2n+1}-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2n-1}}$$
$$=\frac{A+\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{A-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}},$$

mit $A=\mathrm{e}^{2n+1}-\mathrm{e}^{-2n-1}$.
Mit $a_{n+1},a_n>0$ und $A+\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}$ folgt $A-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}>0$. Hieraus ergibt sich wiederum mit $\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}>0>\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}$, dass der Zähler größer als der Nenner sein muss, und somit $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ gilt, die Folge steigt monoton.
Darüber hinaus haben wir

$$a_n=\frac{\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-2n}}{1-\mathrm{e}^{-2n}}\right).$$

Da $\mathrm{e}^{-2n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ gilt, folgt $a_n\to1$, die Folge daher konvergent und somit beschränkt.
Mit $\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n}>\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}>0$ ist eine obere Schranke durch 1 gegeben, eine untere durch $a_1=\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}$, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigt.

(c) Es ist $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{(2n)!}\right)$ und $a_{n+1} = \left(\dfrac{2n+3}{(2n+2)!}\right)$. Also,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2n+3}{(2n+2)!} - \frac{2n+1}{(2n)!} \\ &= \frac{2n+3-(2n+1)(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)!} \\ &= \frac{2n+3-8n^3-16n^2-10n-2}{(2n+2)!} \\ &= \frac{-8n^3-16n^2-8n+1}{(2n+2)!} \\ &= \frac{1-8n(n+1)^2}{(2n+2)!} < 0 \end{aligned}$$

da $8n(n+1)^2 > 1$ für $n \geqq 1$. Folglich ist die folge monoton fallend, womit eine obere Grenze durch $a_1 = \frac{3}{2}$ gegeben ist. Da ferner $\frac{2n+1}{(2n!)} > 0$ fÂ¿ür alle n gilt, ist die Folge auch beschränkt, eine untere Schranke ist beispielsweise 0.

Aufgabe H 22. *Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Häufungspunkte. Geben Sie jeweils zu jedem Häufungspunkt eine gegen diesen konvergierende oder gegebenenfalls eine bestimmt divergierende Teilfolge an.

(a) $\left(\sqrt{11(n+1)} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(\dfrac{2\mathrm{e}^n - 3\mathrm{e}^{-n}}{3\mathrm{e}^n + 4\mathrm{e}^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^n)2^{-n/2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Hier nutzen wir eine Standardumformung, wie sie auch im Skript zu finden ist, bei der wir geschickt erweitern um die dritte binomische Formel verwenden zu können.

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{11(n+1)} - \sqrt{n} &= \frac{11(n+1)-n}{\sqrt{11(n+1)}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{n\left(10+\frac{11}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{11+\frac{11}{n}}+1\right)} \\ &= \frac{\sqrt{n}\left(10+\frac{11}{n}\right)}{\left(\sqrt{11+\frac{11}{n}}+1\right)} \geqq \sqrt{n}\frac{10}{1+\sqrt{22}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{aligned}$$

Damit ist die gesamte Folge bestimmt divergent gegen $+\infty$, es liegt ein einziger, uneigentlicher Häufungspunkt in $+\infty$ vor.

(b) Hierfür gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\mathrm{e}^n - 3\mathrm{e}^{-n}}{3\mathrm{e}^n + 4\mathrm{e}^{-n}} \\ &= \frac{2-3\mathrm{e}^{-2n}}{3+4\mathrm{e}^{-2n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Damit ist gesamte Folge konvergent gegen $+\dfrac{2}{3}$, dies ist auch der einzige Häufungspunkt.

(c) Es ist $(1+\mathrm{i})^n = (\sqrt{2})^n\big(\cos(\frac{\pi}{4}n) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4}n)\big)$. Also ist $\mathrm{Re}(1+\mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}}\cos\big(\frac{\pi}{4}n\big)$. Somit ist $(a_n)_n = \big(\cos\big(\frac{\pi}{4}n\big)\big)_n$. Aufgrund der Peridoizität müssen wir nur die folgenden Teilfolgen betrachten: .

(i) $(a_{8k+1})_{k\in\mathbb{N}_0} = (\frac{\sqrt{2}}{2})_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(ii) $(a_{8k+2})_{k\in\mathbb{N}_0} = (0)_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert 0.
(iii) $(a_{8k+3})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-\frac{\sqrt{2}}{2})_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(iv) $(a_{8k+4})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-1)_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert -1.
(v) $(a_{8k+5})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-\frac{\sqrt{2}}{2})_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(vi) $(a_{8k+6})_{k\in\mathbb{N}_0} = (0)_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert 0.
(vii) $(a_{8k+7})_{k\in\mathbb{N}_0} = (\frac{\sqrt{2}}{2})_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(viii) $(a_{8k+8})_{k\in\mathbb{N}_0} = (1)_{k\in\mathbb{N}_0}$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert 1.

Somit sind alle Häufungspunkte gegeben durch -1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, es gibt kein $n\in\mathbb{N}$ für das a_n nicht zu einer der obigen Teilfolgen gehört.

Aufgabe H 23. *ε-Kriterium*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert a der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie jeweils speziell für $\varepsilon = 10^{-18}$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$.

(a) $a_n = 1000 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 999\left(\frac{1}{1000}\right)^k$ **(b)** $a_n = \dfrac{n^3-64}{27n^3}$

Hinweis: Teleskopsummen!

Lösungshinweise hierzu:

(a) Anhand der Teleskopsumme lässt sich dies leicht erkennen, es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= 1000 + \sum_{k=0}^{n}(1-1000)\left(\frac{1}{1000}\right)^k = 1000 + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1000}\right)^k - \underbrace{\left(\frac{1}{1000}\right)^{k-1}}_{=:b_k} \\ &= 1000 + \left(\frac{1}{1000}\right)^n - \left(\frac{1}{1000}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1000}\right)^n \end{aligned}$$

Damit ist – siehe 2.5.8 – $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Es ist

$$|a_n| \overset{!}{<} 10^{-18} \quad\Leftrightarrow\quad 10^{-3n} < 10^{-18} \quad\Leftrightarrow\quad 3n > 18 \Leftrightarrow \quad n > 6.$$

Also können wir zum Beispiel $n_\varepsilon = 10$ wählen.

(b) Es ist

$$a_n = \frac{n^3-64}{27n^3} = \frac{1}{27} - \frac{64}{27n^3}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{27} - \frac{64}{27}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{27} - \frac{64}{27}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{=0}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \qquad = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

Es gelte

$$\left|a_n - \frac{1}{27}\right| \overset{!}{<} 10^{-18} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{64}{27n^3} < 10^{-18} \quad \Leftrightarrow \quad n > \sqrt[3]{\frac{64}{27} \cdot 10^{18}} = \frac{4}{3} \cdot 10^6.$$

Da $\frac{4}{3} < 2$ ist, ist zum Beispiel $n_\varepsilon = 2000000$ eine geeignete Wahl.

Aufgabe H 24. *Konvergenz*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{100n^3 - 25}{20n^2 - 10\sqrt{n}}$

(b) $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{\dfrac{2n}{3^{n^2}}} + \dfrac{\sin(n)}{n}$

(c) $a_n = n^{\frac{1-n^2}{n}} \left(n^n - (n+1)^n\right)$

(d) $a_n = \dfrac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} + \dfrac{2n+1}{\pi n}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{100n^3 - 25}{20n^2 - 10\sqrt{n}} = \frac{(10n\sqrt{n} - 5)(10n\sqrt{n} + 5)}{2\sqrt{n}(10n\sqrt{n} - 5)} = \frac{10n\sqrt{n} + 5}{2\sqrt{n}} = \underbrace{5n}_{=:b_n} + \underbrace{\frac{5}{2\sqrt{n}}}_{=:c_n}.$$

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen Null: Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\frac{5}{2\sqrt{n}} \geqq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{2\varepsilon^2} \geqq n$$

es existiert also zu jedem $\varepsilon > 0$ mit $N_\varepsilon := \left\lceil \frac{5}{2\varepsilon^2} \right\rceil$ ein N_ε mit $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n > N_\varepsilon$. ($\lceil\cdot\rceil$ ist hierbei die obere Gaußklammer, welche einer reellen Zahl r die kleinste ganze Zahl k zuweist, welche größer r ist: $\lceil r \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geqq r\}$.)
Insbesondere gibt es ein N, so dass $|c_n| < \frac{1}{2}$ für alle $n > N$ und somit

$$b_n + c_n > 5n - \frac{1}{2}$$

gilt. Für jedes $s \in \mathbb{R}$ existiert ein N_s mit

$$\frac{s + \frac{1}{2}}{5} < N_s < n$$

für alle $n > N_s$ (Unbeschränktheit der natürlichen Zahlen), insbesondere gilt für alle $n > \tilde{N} := \max\{N_s, N\}$:

$$b_n + c_n > 5n - \frac{1}{2} > s$$

die Folge $(a_n)_n$ ist bestimmt divergent.
Alternativer Lösungsweg:
Alternativ lässt sich die Divergenz auch mittels der Abschätzung

$$a_n = 5n + \frac{1}{2\sqrt{n}} \geqq n$$

aus Lemma 2.5.5 und Beispiel 2.4.12(1) folgern.

(b) Wir können die Folgenglieder schreiben als

$$a_n = (-1)^n \sqrt[n]{\frac{2n}{3^{n^2}}} + \frac{\sin(n)}{n} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} + \frac{\sin(n)}{n} = b_n + c_n$$

mit $b_n := \left(-\frac{1}{3}\right)^n \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$ und $c_n := \frac{\sin(n)}{n}$. Wir untersuchen nun separat die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.
Da $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, folgt mit Beispiel 2.5.8.1, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Mit Beispiel 2.5.7 erhalten wir zudem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ und aus Beispiel 2.5.10 schließlich $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Mit den Grenzwertsätzen 2.5.3 folgt somit insgesamt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Betrachten wir nun $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir erhalten wegen $-1 \leqq \sin(n) \leqq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\sin(n)}{n} \leqq \frac{1}{n}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, folgt mit dem Sandwichsatz 2.5.6, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.
Mit den Grenzwertsätzen 2.5.3 folgt damit schließlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n = 0 + 0 = 0.$$

Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(c) Hier $a_n = n^{\frac{1-n^2}{n}} (n^n - (n+1)^n) = n^{1/n}\left(1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) := b_n c_n$,

wobei $b_n = n^{1/n}$ und $c_n = \left(1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wir haben $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = 1 - \mathrm{e}$, dabei haben wir die Tatsache ausgenutzt, dass

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

gelten. Damit folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 - \mathrm{e}$.

(d) Wir schreiben die Folgenglieder als

$$a_n = \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} + \frac{2n+1}{\pi n} = b_n + c_n$$

mit $b_n = \dfrac{\sin(n^2+1)}{n^2+1}$ und $c_n = \frac{2n+1}{\pi n}$. Wir untersuchen nun separat die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

Betrachten wir nun $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir erhalten wegen $-1 \leqq \sin(n^2+1) \leqq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$-\frac{1}{n^2+1} \leqq \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} \leqq \frac{1}{n^2+1}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$, folgt mit dem Sandwichsatz, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1} = 0$.

Für c_n gilt $c_n = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{1}{\pi n} \to \dfrac{2}{\pi}$ für $n \to \infty$. Mit Satz 2.5.3 folgt damit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n + \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{2}{\pi}$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 25. *Teleskopsummen*

(a) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{(k+2)^2} - \frac{1}{(k+3)^2}\right)$.

(b) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\right)$.

Wir erwarten nicht nur das Ergebnis sondern auch einen nachvollziehbaren Rechenweg, der die Teleskopsummenformel mit einbezieht.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir haben

$$\sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{(k+2)^2} - \frac{1}{(k+3)^2}\right) = \frac{1}{(1+2)^2} - \frac{1}{((15+1)+2)^2} = \frac{1}{9} - \frac{1}{324} = \frac{35}{324}.$$

(b) Wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\right) &= \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{99} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = (\sqrt{99+1}-\sqrt{1}) \\
&= 10 - 1 = 9.
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 26. *Sandwichsatz*

Bestimmen Sie mit Hilfe des Sandwichsatzes die Grenzwerte der folgenden Folgen:

(a) $\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}^n + \pi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\left(1 - \frac{1}{n^2 - 4n - 5.1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\frac{n^2 + 5\sin(n)}{3n^2 - 4\cos(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3(n+1)^2 + 4k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Hinweis zu (b): Nutzen Sie für die untere Abschätzung Bernoulli.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gelten $2 < \mathrm{e} < 3 < \pi$ und somit

$$\sqrt[n]{\mathrm{e}^n + \pi^n} \geqq \sqrt[n]{\pi^n} = \pi \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{\mathrm{e}^n + \pi^n} \leqq \sqrt[n]{2 \cdot \pi^n} = \sqrt[n]{2}\pi \to \pi \quad \text{für } n \to \infty.$$

Mit dem Sandwichsatz folgt daher $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{e}^n + \pi^n} = \pi$.

(b) Wegen $n^2 - 4n - 5.1 = (n-2)^2 - 9.1 \geqq 16 - 9.1 > 1 > 0$ für $n > 5$ folgt direkt

$$\left(1 - \frac{1}{n^2 - 4n - 5.1}\right)^n \leqq 1^n = 1.$$

für $n > 5$. Weiter gilt $x = -\frac{1}{n^2-4n-5.1} = -\frac{1}{(n-2)^2-9.1} \geqq -\frac{10}{91} > -1$ und daher folgt aus der Bernoullischen Ungleichung

$$\left(1 - \frac{1}{n^2 - 4n - 5.1}\right)^n = (1+x)^n \geqq 1 + nx = 1 - \frac{n}{n^2 - 4n - 5.1} = 1 - \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{4}{n} - \frac{51}{10n^2}} \to 1$$

für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichsatz ist daher $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2-4n-5.1}\right)^n = 1$.

(c) Es gelten

$$\frac{n^2 + 5\sin(n)}{3n^2 - 4\cos(n)} \geqq \frac{n^2 - 5}{3n^2 + 4} = \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}} \to \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \frac{n^2 + 5\sin(n)}{3n^2 - 4\cos(n)} \leqq \frac{n^2 + 5}{3n^2 - 4} = \frac{1 + \frac{5}{n^2}}{3 - \frac{4}{n^2}} \to \frac{1}{3}$$

für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichsatz ist daher $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+5\sin(n)}{3n^2-4\cos(n)} = \frac{1}{3}$.

(d) Wegen $3(n+1)^2 + 4k \geqq 3(n+1)^2$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3(n+1)^2 + 4k} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3(n+1)^2} = \frac{1}{3(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3(n+1)^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6} \frac{n}{n+1} \to \frac{1}{6}$$

für $n \to \infty$. Weiter gilt für $k \leqq n$

$$3(n+1)^2 + 4k \leqq 3(n+1)^2 + 4n = 3n^2 + 10n + 3$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3(n+1)^2+4k} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3n^2+10n+3} = \frac{1}{3n^2+10n+3} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{3n^2+10n+3} \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n^2+n}{6n^2+20n+6} = \frac{1+\frac{1}{n}}{6+\frac{20}{n}+\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{6}$$

für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichsatz ist daher $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3(n+1)^2+4k} = \frac{1}{6}$.

Aufgabe H 27. *Teleskopreihen*

Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte:

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+2)\sqrt{k}+k\sqrt{k+2}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}$

Hinweis: Schreiben Sie die Folge der Partialsummen als Folge (ggf. mehrererer) Teleskopsummen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k+2)\sqrt{k}+k\sqrt{k+2}} &= \frac{1}{(k+2)\sqrt{k}+k\sqrt{k+2}} \cdot \frac{(k+2)\sqrt{k}-k\sqrt{k+2}}{(k+2)\sqrt{k}-k\sqrt{k+2}} \\
&= \frac{(k+2)\sqrt{k}-k\sqrt{k+2}}{(k+2)^2k-k^2(k+2)} \\
&= \frac{(k+2)\sqrt{k}-k\sqrt{k+2}}{2k(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+2}}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+2)\sqrt{k}+k\sqrt{k+2}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+2} = \frac{1}{k(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+2)} - \frac{1}{2}\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)
\end{aligned}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{1+1} \right) = \frac{1}{4},$$

und daher

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)} &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &\to \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Aufgabe H 28. *Geometrische Reihe*

Sei $x \in (1, \infty)$. Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte:

(a) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^k$ **(b)** $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{k+1}{4}}$ **(c)** $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x-2} \right)^k$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^k = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{k+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{k+1}{4}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{k+4}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}} \right)^k = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4^{1/4}}} = \frac{1}{4 - 4^{3/4}} \\ &= \frac{4 + 4^{\frac{3}{4}}}{16 - 4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} + 2^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^5}. \end{aligned}$$

(c) Wegen $x > 1$ gilt $(3x-2) - (2x-1) = x - 1 > 0$ und somit $\left| \frac{2x-1}{3x-2} \right| < 1$. Daher folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x-2} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{2x-1}{3x-2}} = \frac{3x-2}{3x-2-(2x-1)} = \frac{3x-2}{x-1}.$$

Aufgabe H 29. *Folgen komplexer Zahlen*

Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn sowohl $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ als auch $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$ gilt.Gibt es kein solches $z \in \mathbb{C}$, dann nennt man die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Sie können dabei ohne Beweis nutzen, dass 2.5.3, 2.5.4 und 2.5.8.1 auch für komplexe Zahlenfolgen gelten.

(a) $a_n = \left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}\right)^n$

(b) $b_n = \frac{n\mathrm{i}+2n^2}{(7n^2)\mathrm{i}-3}$

(c) $c_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right)^k$

(d) $d_n = \min\left\{\operatorname{Im} w \;\middle|\; w^n = 3+3\sqrt{3}\mathrm{i}\right\}$

Hinweis zu (d): Begründen Sie zunächst, dass für jedes n und jedes $\alpha_0 \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right)$ ein $j \in \{0,1,2,...n-1\}$ mit $\alpha_0 + j\frac{2\pi}{n} \in \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}, \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}\right)$ existiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6})$ und daher infolge der Periodizität

$$\operatorname{Re}(a_{12k+j}) = \cos\left(\frac{\pi j}{6}\right) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } j \in \{1,2,3,\ldots,12\}.$$

Wegen $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \neq -1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)$ hat die Folge $\left(\operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens 2 verschiedene Häufungspunkte und kann damit nicht konvergieren. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert also.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{n\mathrm{i}+2n^2}{-(7n^2)\mathrm{i}-3} &= \frac{(n\mathrm{i}+2n^2)((7n^2)\mathrm{i}+3)}{49n^4+9} = \frac{(14n^4+7n^3+3n)\mathrm{i}-7n^3+6n^2}{49n^4+9}\\ &= \underbrace{\frac{-\frac{7}{n}+\frac{6}{n^2}}{\frac{9}{n^4}+49}}_{\to 0} + \mathrm{i}\underbrace{\frac{\frac{3}{n^3}+\frac{7}{n}+14}{\frac{9}{n^4}+49}}_{\to -\frac{14}{49}} \to -\frac{14}{49}\mathrm{i} = -\frac{2}{7}\mathrm{i}\end{aligned}$$

für $n \to \infty$.

(c) Mit $q := \frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$ gilt, wie für reelle Zahlen, analog zu Beispiel 2.8.5

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q}q^n$$

und es genügt die Folge mit Folgengliedern $\tilde{c}_n := q^n = \left(\frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right)^n$ auf Konvergenz zu untersuchen. Dazu berechnen wir

$$|q| = \left|\frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right| = \frac{3}{|3+\mathrm{i}|} = \frac{3}{\sqrt{9+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}} < \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

und wegen 2.5.8.1 folgt daraus $\lim_{n\to\infty} \tilde{c}_n = 0$. Insbesondere folgt damit

$$\sum_{k=2}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k+2} = q^2\frac{1}{1-q} - q^2\frac{q}{1-q}\underbrace{\tilde{c}_n}_{\to 0} \to \frac{1}{1-q} = \frac{\left(\frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right)^2}{1-\frac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}} = -\frac{99}{130} - \frac{27}{130}\mathrm{i}.$$

(d) Wir zeigen zunächst: Für alle n existiert ein $j \in \{0,...,n-1\}$ mit

$$\alpha_0 + \frac{2\pi j}{n} \in \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}, \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}\right).$$

Ist $n = 1$, kommt nur $j = 0$ in Frage und die Behauptung folgt wegen

$$\alpha_0 \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right) \subseteqq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi\right)$$

Für $n > 1$ nehmen wir an, die Behauptung sei falsch, das heißt, kein $\alpha_j = \alpha_0 + \frac{2\pi j}{n}$ liegt in dem Intervall $\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}, \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}\right)$. Wegen

$$\alpha_0 + \frac{2\pi(n-1)}{n} \leqq \frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \alpha_0 < \frac{3}{2}\pi - 2\pi < 0$$

folgt einerseits $\alpha_{n-1} \geqq \frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}$, andererseits gilt

$$\alpha_0 < \frac{2\pi}{n} \leqq \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}.$$

Damit existiert ein kleinstes j mit $\alpha_j \leqq \frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}$, für welches insbesondere $j < n - 1$ gilt. Nach der Annahme gilt $\alpha_{j+1} \geqq \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}$ und somit:

$$\frac{2\pi}{n} = \alpha_{j+1} - \alpha_j \geqq \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n} - \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{4\pi}{n}$$

Dies ist ein Widerspruch, mindestens ein α_j muss im Intevall $\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}, \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}\right)$ liegen.

Es gilt $|3 + 3\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$ und damit

$$3 + 3\sqrt{3}\mathrm{i} = 6\left(\frac{\sqrt{1}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Die n-ten Wurzeln $w_0, \ldots, w_{n-1}$ von $3 + 3\sqrt{3}\mathrm{i}$ sind daher gegeben durch

$$w_j = \sqrt[n]{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3n} + j\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3n} + j\frac{2\pi}{n}\right)\right).$$

Der Imaginärteil einer solchen Wurzel ist

$$\operatorname{Im} w_j = \sqrt[n]{6}\sin\left(\frac{\pi}{3n} + j\frac{2\pi}{n}\right).$$

Damit können wir d_n darstellen als

$$d_n = \sqrt[n]{6}\min\left\{\sin\left(\frac{\pi}{3n} + j\frac{2\pi}{n}\right) \,\middle|\, j \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}.$$

Insbesondere haben bekommen wir für $n > 1$ infolge der Monotonie der Sinusfunktion auf $\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{2\pi}{n}, \frac{3}{2}\pi\right]$ und $\left[\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi + \frac{2\pi}{n}\right)$ mit unserer Hilfsaussage

$$\begin{aligned} d_n &\leqq \sqrt[n]{6}\max\left\{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}\right)\right\} \\ &= \underbrace{\sqrt[n]{6}}_{\to 1}\max\left\{\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \underbrace{\frac{2\pi}{n}}_{\to 0}\right)}_{\to -1}, \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \underbrace{\frac{2\pi}{n}}_{\to 0}\right)}_{\to -1}\right\} \to -1, \end{aligned}$$

für $n \to \infty$ und wegen $\cos(x) \geqq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$-1 \leqq d_n \leqq \sqrt[n]{6} \to -1 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Mit dem Sandwichsatz folgt daher $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = -1$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 30. *Komplexe Zahlen, Polarkoordinaten*

Ordnen Sie die Zahlen $\{6-5\mathrm{i},\ -8+5\mathrm{i},\ 3.1+4\mathrm{i}$ und $-8-3\mathrm{i}\}$ jeweils ihren näherungsweise angegebenen Argumenten und Beträgen zu:

$$\arg(z) \in \{0.290\pi\,,\ 0.822\pi\,,\ 1.114\pi\,,\ 1.779\pi\}$$
$$|z| \in \{5.06\,,\ 7.81\,, 8.54\,,\ 9.43\}$$

Lösungshinweise hierzu: Es ist

$$\begin{aligned}
|6-5\mathrm{i}| &= \sqrt{6^2+5^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{51} \Rightarrow 7 < |6-5\mathrm{i}| < 8\\
|-8+5\mathrm{i}| &= \sqrt{8^2+5^2} = \sqrt{64+25} = \sqrt{90} \Rightarrow 9 < |-8+5\mathrm{i}| < 10\\
|3.1+4\mathrm{i}| &= \sqrt{3.1^2+4^2} = \sqrt{9.61+16} = \sqrt{25.61} \Rightarrow 5 < |3.1+4\mathrm{i}| < 6\\
|-8-3\mathrm{i}| &= \sqrt{8^2+3^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73} \Rightarrow 8 < |-8-3\mathrm{i}| < 9
\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen mit positiven Real- und Imaginärteil liegen im 1. Quadranten der komplexen Ebene, das Argument der komplexen Zahl liegt also zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Somit ist $0 < \arg(3.1+4\mathrm{i}) \approx 0.290\pi < \frac{\pi}{2}$. Analog folgen $\arg(6-5\mathrm{i}) \approx 1.779\pi$ (4. Quadrant), $\arg(-8+5\mathrm{i}) \approx 0.822\pi$ (2. Quadrant) und $\arg(-8-3\mathrm{i}) \approx 1.114\pi$ (3. Quadrant).
Somit haben die komplexen Zahlen näherungsweise die folgenden Polarkoordinatendarstellungen:

$$\begin{aligned}
6-5\mathrm{i} &\approx 7.81\,(\cos(1.779\pi) + \mathrm{i}\sin(1.779\pi))\\
-8+5\mathrm{i} &\approx 9.43\,(\cos(0.822\pi) + \mathrm{i}\sin(0.822\pi))\\
3.1+4\mathrm{i} &\approx 5.06\,(\cos(0.290\pi) + \mathrm{i}\sin(0.290\pi))\\
-8-3\mathrm{i} &\approx 8.54\,(\cos(1.114\pi) + \mathrm{i}\sin(1.114\pi))
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 31. *Untervektorräume*

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $U_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x < 2, y \leqq 0\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(b) $U_2 := \left\{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten.

(c) $U_3 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \langle x \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, z\rangle = 0\right\}$ für festen Vektoren $y, z \in \mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

(d) $U_4 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) = 0\}$ ist ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)
- **(i)** Seien $(x_1, y_1) = (1, 0) \in U_1$ und $(x_2, y_2) = (1, 0) \in U_1$, dann ist $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2, 0) \notin U_1$, da $2 < 2$ gilt nicht.
- **(ii)** Seien $(x, y) = (1, 0) \in U_1$ und $s = -1 \in \mathbb{R}$, dann ist $s(x, y) = (-1, 0) \notin U_1$.
- **(iii)** Es gilt $(0, 0) \in U_1$.

Kriteria (i) und (ii) sind nicht erfüllt. Daher ist U_1 kein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b)
- **(i)** Seien $f(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \in U_2$ und $g(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \in U_2$, dann ist $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (a_1+a_2)x^3+(b_1+b_2)x^2+(c_1+c_2)x+(d_1+d_2) \in U_2$.
- **(ii)** Seien $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in U_2$ und $s \in \mathbb{R}$, dann ist $(sf)(x) = sf(x) = sax^3 + sbx^2 + scx + sd \in U_2$.
- **(iii)** Das Nullpolynom, also der Nullvektor des Vektorraums $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$, besitzt Grad $-\infty < 3$ (Definition 1.8.11), daher liegt der Nullvektor von $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$ in U_2.

Alle Kriteria sind erfüllt. Daher ist U_2 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c)
- **(i)** Seien $x_1 \in U_3$ und $x_2 \in U_3$, dann ist $x_1 + x_2 \in U_3$, da $\langle x_1 + x_2 \,|\, y\rangle = \langle x_1 \,|\, y\rangle + \langle x_2 \,|\, y\rangle = 0 + 0 = 0$ und $\langle x_1 + x_2 \,|\, z\rangle = \langle x_1 \,|\, z\rangle + \langle x_2 \,|\, z\rangle = 0$ gelten.
- **(ii)** Seien $x \in U_3$ und $s \in \mathbb{R}$, dann ist $sx \in U_3$, da $\langle sx \,|\, y\rangle = s\,\langle x \,|\, y\rangle = s \cdot 0 = 0$ und $\langle sx \,|\, z\rangle = s\,\langle x \,|\, z\rangle = 0$ gelten.
- **(iii)** Es gilt $(0, 0, \ldots, 0) \in U_3$, da $\langle (0, 0, \ldots, 0) \,|\, y\rangle = \langle (0, 0, \ldots, 0) \,|\, z\rangle = 0$.

Alle Kriteria sind erfüllt. Daher ist U_3 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(d)
- **(i)** Für $z = x + y\mathrm{i}, w = u + v\mathrm{i} \in U_4$ gilt $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = x + y = 0$ bzw. $\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = u + v = 0$. Da $z + w = (x + u) + (y + v)\mathrm{i}$ ist, gilt $\operatorname{Re}(z + w) + \operatorname{Im}(z + w) = x + u + y + v = 0$ und folglich $z + w \in U_4$.
- **(ii)** Für $z = x + y\mathrm{i} \in U_4$ und $s = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ gilt $sz = ax - by + (bx + ay)\mathrm{i}$ und damit $\operatorname{Re}(sz) + \operatorname{Im}(sz) = ax - by + bx + ay$. Da $z := 1 - \mathrm{i} \in U_4$ und $i \in \mathbb{C}$ gilt, aber $\mathrm{i}z = 1 + \mathrm{i} \notin U_4$ ist (, weil $\operatorname{Re}(\mathrm{i}z) + \operatorname{Im}(\mathrm{i}z) = 1 + 1 = 2 \neq 0$), kann U_4 kein $\mathbb{C}$-Vektorraum sein.
- **(iii)** Es gilt $\operatorname{Re}(0) + \operatorname{Im}(0) = 0 + 0 = 0$ und folglich $0 \in U_4$.

Kriterium (ii) ist nicht erfüllt. Daher ist U_4 kein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Aufgabe H 32. *Skalarprodukt*

Sei $\mathrm{Pol}_4 \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{4} \alpha_j x^j \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$. Betrachten Sie das folgende Skalarprodukt auf $\mathrm{Pol}_4 \mathbb{R}$:
$\langle p \,|\, q \rangle = \displaystyle\int_0^\beta p(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x$ für $p, q \in \mathrm{Pol}_4 \mathbb{R}$ und $\beta > 0$.
Gegeben seien die folgende Polynome: $p_1(x) = x^2 - x - 1, \quad p_2(x) = 2x - 1$.

(a) Bestimmen Sie $|p_1|^2$, $|p_2|^2$ und $\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle$.

(b) Für welche β ist $\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle = 0$?

(c) Sei nun $\beta = 1$. Bestimmen Sie $c_1 \in \mathbb{R}$ und $c_0 \neq 0$ so, dass das Polynom $q(x) = 3x^2 + c_1 x + c_0$ die Gleichung $|q - p_2|^2 = |q|^2 + |p_2|^2$ erfüllt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mittels Integration folgt

$$\begin{aligned}
|p_1|^2 = \langle p_1 \,|\, p_1 \rangle &= \int_0^\beta (x^2 - x - 1)^2 \,\mathrm{d}\,x = \int_0^\beta x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{1}{5}\beta^5 - \frac{1}{2}\beta^4 - \frac{1}{3}\beta^3 - \beta^2 + \beta. \\
|p_2|^2 = \langle p_2 \,|\, p_2 \rangle &= \int_0^\beta (2x-1)^2 \,\mathrm{d}\,x = \int_0^\beta 4x^2 - 4x + 1 \,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{3}\beta^3 - 2\beta^2 + \beta. \\
\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle &= \int_0^\beta (x^2 - x - 1)(2x - 1) \,\mathrm{d}\,x = \int_0^\beta 2x^3 - 3x^2 - x + 1 \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\beta^4 - \beta^3 - \frac{1}{2}\beta^2 + \beta.
\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle = \frac{1}{2}\beta^4 - \beta^3 - \frac{1}{2}\beta^2 + \beta &= \frac{\beta}{2}\left(\beta^3 - 2\beta^2 - \beta + 2\right) \\
&= \frac{\beta}{2}(\beta - 1)\left(\beta^2 - \beta - 2\right) \\
&= \frac{\beta}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)(\beta + 1)
\end{aligned}$$

Da das Skalarprodukt nur für $\beta > 0$ definiert ist, ist $\langle p_1 \,|\, p_2 \rangle = 0$ nur wenn $\beta = 1$ oder $\beta = 2$.

(c) Zuerst bemerken wir, dass $|q - p|^2 = |q|^2 + |p|^2 - 2\,\langle q \,|\, p \rangle$ und damit $|q - p|^2 = |q|^2 + |p|^2 \Leftrightarrow \langle q \,|\, p \rangle = 0$. Daher suchen wir nach ein Polynom $q(x) = 3x^2 + c_1 x + c_0$, das $\langle q \,|\, p_2 \rangle = 0$ erfüllt. Es ist

$$\begin{aligned}
\langle q \,|\, p_2 \rangle &= \int_0^1 (3x^2 + c_1 x + c_0)(2x - 1) \,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^1 6x^3 + (2c_1 - 3)x^2 + (2c_0 - c_1)x - c_0 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{3}{2} + \frac{2c_1 - 3}{3} + \frac{2c_0 - c_1}{2} - c_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}c_1.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $\langle q \,|\, p_2 \rangle = 0$ genau dann gilt, wenn $c_1 = -3$. Die Konstante c_0 darf eine beliebige reelle Zahl sein. Daher ist z.B. $3x^2 - 3x + 1$ ein Polynom q, das $|p - q|^2 =$

$|p|^2 + |q|^2$ und $c_0 \neq 0$ erfüllt.

Alternativ:

Es ist

$$\begin{aligned}
|q - p_2|^2 &= \langle q - p_2 \,|\, q - p_2 \rangle \\
&= \int_0^1 (3x^2 + (c_1 - 2)x + c_0 + 1)^2 \,\mathrm{d}\, x \\
&= \int_0^1 9x^4 + 6(c_1 - 2)x^3 + (6c_0 + 6 + (c_1 - 2)^2)x^2 + 2(c_1 - 2)(c_0 + 1)x + (c_0 + 1)^2 \,\mathrm{d}\, x \\
&= \frac{9}{5} + \frac{3}{2}(c_1 - 2) + 2c_0 + 2 + \frac{c_1^2 - 4c_1 + 4}{3} + c_1 c_0 + c_1 - 2c_0 - 2 + c_0^2 + 2c_0 + 1 \\
&= \frac{9}{5} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{7}{6}c_1 + 2c_0 + \frac{c_1^2}{3} + c_0 c_1 + c_0^2, \\
|q|^2 &= \langle q \,|\, q \rangle \\
&= \int_0^1 (3x^2 + c_1 x + c_0)^2 \,\mathrm{d}\, x \\
&= \int_0^1 9x^4 + 6c_1 x^3 + (6c_0 + c_1^2)x^2 + 2c_0 c_1 x + c_0^2 \,\mathrm{d}\, x \\
&= \frac{9}{5} + \frac{3c_1}{2} + 2c_0 + \frac{c_1^2}{3} + c_0 c_1 + c_0^2 \\
&= \frac{9}{5} + \frac{3}{2}c_1 + 2c_0 + \frac{c_1^2}{3} + c_0 c_1 + c_0^2, \\
|p_2|^2 &= \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Wir wollen $|q - p|^2 = |q|^2 + |p|^2$, also

$$\begin{aligned}
\frac{9}{5} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{7}{6}c_1 + 2c_0 + \frac{c_1^2}{3} + c_0 c_1 + c_0^2 &= \frac{9}{5} + \frac{3}{2}c_1 + 2c_0 + \frac{c_1^2}{3} + c_0 c_1 + c_0^2 + \frac{1}{3} \\
\Rightarrow -1 + \frac{7}{6}c_1 &= \frac{3}{2}c_1 \\
\Rightarrow -1 &= \frac{2}{6}c_1 \Rightarrow c_1 = -3, \; c_0 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Daher ist z.B. $3x^2 - 3x + 2$ ein Polynom q, das $|p - q|^2 = |p|^2 + |q|^2$ und $c_0 \neq 0$ erfüllt.

Aufgabe H 33. *Ebenen und Geraden*

(a) Gegeben seien $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$

- **(i)** An welchem Punkt schneiden sich die Geraden? Bei welchem γ ist dies der Fall?
- **(ii)** Bestimmen Sie die Ebene , die die Geraden g und h_γ enthält.

(b) Gegeben seien die Punkte $A = (5, 3, 1),\; B = (7, 10, 2),\; C = (9, 6, 4)$. Berechnen Sie

- **(i)** den Umfang des Dreiecks ABC.
- **(ii)** den Kosinus jedes der Innenwinkel des Dreiecks.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** Die Geraden g und h schneiden sich wenn es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -\gamma \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus den ersten und dritten Zeilen erhalten wir $4\lambda - 2\mu - 2 - 6\lambda + 2\mu + 4 = 0 \Rightarrow -2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$. Setzen wir dies in die dritte Zeile ein, so ergibt sich $\mu = 1$. Schließlich setzen wir $\lambda = \mu = 1$ in die zweite Zeile ein, so ergibt sich $\gamma = 7$. Also schneiden sich die beiden Geraden genau dann im Punkt $(5, 3, 1)^\intercal$, wenn $\gamma = 7$.

(ii) Da eine Ebene, die sowohl g als auch h enthält, insbesondere g enthalten und zu h parallel sein muss, ist der einzige Kandidat die Ebene

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn nun irgendein Punkt von h in E liegt, so liegt ganz h in E. Die Geraden g und h sind nicht parallel, da die Richtungsvektoren linear unabhängig sind. Daher liegen g und h genau dann in einer Ebene, wenn sie sich schneiden, d.h. nur wenn $\gamma = 7$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) **(i)** Die Kantenlängen sind gerade die Längen der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6},$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{34},$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| == \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Der Umfang des Dreiecks ist daher $\sqrt{34} + 5\sqrt{6}$.

(ii) Wir bezeichnen den Winkel bei A mit α, den Winkel bei B mit β und den Winkel bei C mit γ. Dann ist

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AC} \rangle}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{34}} = \frac{32}{3 \cdot 2\sqrt{3}\sqrt{17}} = \frac{16}{3\sqrt{51}},$$

$$\cos(\beta) = \frac{\langle \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{BA} \rangle}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6}} = \frac{22}{6 \cdot 6} = \frac{11}{18},$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle \overrightarrow{CB} | \overrightarrow{CA} \rangle}{|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{34}} = \frac{2}{2 \cdot 2\sqrt{3}\sqrt{17}} = \frac{1}{2\sqrt{51}}.$$

Aufgabe H 34. *Lineare Unabhängigkeit und lineare Hülle*

(a) Sei $w_1 = (3, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ und $w_2 = (-10, 3, 6) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Sind w_1 und w_2 linear unabhängig?

(ii) Zeigen Sie, dass $u = (-8, 2, 20) \in L(w_1, w_2)$ gilt, aber $v = (24, -8, 3) \in L(w_1, w_2)$ gilt nicht.

(b) Gegeben seien $v_1 = (1, \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i})$, $v_2 = (1 + 3\mathrm{i}, 4 + 2\mathrm{i}, 5\mathrm{i})$, $v_3 = (2 - \mathrm{i}, -\mathrm{i}, 3) \in \mathbb{C}^3$. Sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, wenn man $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet?

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** Die Vektoren w_1 und w_2 sind linear unabhängig, wenn $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = 0$ nur gilt, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Es ist

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \begin{pmatrix} 3\alpha_1 - 10\alpha_2 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 12\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

Daher sind w_1 und w_2 linear unabhängig.

(ii) Es gilt

$$4w_1 + 2w_2 = \begin{pmatrix} 12 - 20 \\ -4 + 6 \\ 8 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $u \in L(w_1, w_2)$.
Angenommen $v \in L(w_1, w_2)$ dann gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 3\alpha_1 - 10\alpha_2 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aus den ersten und zweiten Zeilen erhalten wir $3\alpha_1 - 10\alpha_2 - 3\alpha_1 + 3 \cdot 3\alpha_2 = 24 - 8 \cdot 3 \Rightarrow -\alpha_2 = 0$. Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein so folgt $\alpha_1 = \frac{3}{2}$. Setzen wir $\alpha_2 = 0$ jedoch in die zweite Gleichung ein so folgt $\alpha_1 = 8 \neq \frac{3}{2}$. Damit ist gezeigt, dass unsere Annahme $v \in L(w_1, w_2)$ nicht gilt.

(b) Um zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3 linear (un)abhängig sind, betrachten wir $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ mit $c_2, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + (1+3\mathrm{i})c_2 + (2-\mathrm{i})c_3 &= 0 \\ \mathrm{i}c_1 + (4+2\mathrm{i})c_2 - \mathrm{i}c_3 &= 0 \\ (1+\mathrm{i})c_1 + 5\mathrm{i}c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung gewinnen wir $c_1 = c_3 - (-\mathrm{i})(4+2\mathrm{i})c_2 = c_3 + (-2+4\mathrm{i})c_2$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} c_3 + (-2+4\mathrm{i})c_2 + (1+3\mathrm{i})c_2 + (2-\mathrm{i})c_3 = 0 &\Rightarrow (-1+7\mathrm{i})c_2 + (3-\mathrm{i})c_3 = 0 \\ &\Rightarrow c_3 = \frac{1-7\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = (1-2\mathrm{i})c_2. \end{aligned}$$

Dies ergibt dann $c_1 = (1-2\mathrm{i})c_2 + (-2+4\mathrm{i})c_2 = (-1+2\mathrm{i})c_2$. Einsetzen in die dritte Gleichung liefert schließlich

$$(1+\mathrm{i})(-1+2\mathrm{i})c_2 + 5\mathrm{i}c_2 + 3(1-2\mathrm{i})c_2 = 0 \Rightarrow (-3+\mathrm{i})c_2 + (3-\mathrm{i})c_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Das bedeutet $(-1+2\mathrm{i})c_2v_1 + c_2v_2 + (1-2\mathrm{i})c_2v_3 = 0 \ \forall c_2 \in \mathbb{C}$. Damit sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig. Insbesondere kann man $c_1 = -1+2\mathrm{i}, c_2 = 1, c_3 = 1-2\mathrm{i}$ oder $c_1 = 5, c_2 = 1+2\mathrm{i}, c_3 = -5$ wählen.

Frischhaltebox

Aufgabe H 35. *Summen*

Vereinfachen Sie soweit wie möglich: $\displaystyle \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{j=2}^{n+2}\frac{n!\cdot 2^{2-n-j}}{(j-2)!(n-j+2)!}\right).$

Lösungshinweise hierzu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{j=2}^{n+2}\frac{n!\cdot 2^{2-n-j}}{(j-2)!(n-j+2)!}\right) &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}2^{-(n+k)}\right) \qquad (k=j-2) \\ &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}\right) \\ &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\right) \\ \text{(1.3.5 Binomischer Lehrsatz)} \quad &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^{n} \\ &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \\ \text{(2.8.4 Geometrische Reihe Beweis)} \quad &= \frac{1}{8}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{16}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{16}\right). \end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 36. *Vektorraum der Polynome*

Es sei $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Polynome p mit Grad kleiner oder gleich 2.

(a) Verifizieren Sie, dass $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\operatorname{Pol} \mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_1(X) = 3X^2 + 2X + 6$, $p_2(X) = X - 1$ und $p_3(X) = X^2 + X + 2$ linear unabhängig sind.

(c) Stellen Sie das Polynom $q(X) = X$ als Linearkombination von p_1, p_2 und p_3 dar.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir müssen folgende grundlegenden Bedingungen für einen Untervektorraum prüfen:

(i) Das Nullpolynom, das durch $p(X) = 0$ beschrieben wird, hat den symbolischen Grad $-\infty$ und ist somit ein Polynom vom Grad $\leqq 2$.

(ii) Seien $P_1(X), P_2(X) \in \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$. Dann können wir diese Polynome schreiben als $P_1(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$, und $p_2(X) = b_2X^2 + b_1X + b_0$ mit $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Die Summe

$$p_1(X) + p_2(X) = (a_2 + b_2)X^2 + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0),$$

ist wieder ein Polynom vom Grad höchstens 2. Daher ist die Menge $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ unter er Addition abgeschlossen.

(iii) Sei $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ ein Polynom in $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Das Produkt

$$c \cdot p(X) = c \cdot a_2X^2 + c \cdot a_1X + c \cdot a_0,$$

ist ebenfalls Polynom vom Grad höchstens 2. Daher ist $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ auch unter Skalarmultiplikation abgeschlossen.

(b) Um zu zeigen, dass die Polynome $p_1(X) = 3X^2 + 2X + 6$, $p_2(X) = X - 1$ und $p_3(X) = X^2 + X + 2$ linear unabhängig sind, müssen wir zeigen, dass die Gleichung $c_1p_1(X) + c_2p_2(X) + c_3p_3(X) = 0$ nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ hat. Wir schreiben die Linearkombination der drei Polynome:

$$\begin{aligned} 0 &= c_1(3X^2 + 2X + 6) + c_2(X - 1) + c_3(X^2 + X + 2) \\ &= 3c_1X^2 + 2c_1X + 6c_1 + c_2X - c_2 + c_3X^2 + c_3X + 2c_3\,. \end{aligned}$$

Nun ordnen wir die Terme nach den Potenzen von X, Die Gleichung lautet also

$$(3c_1 + c_3)X^2 + (2c_1 + c_2 + c_3)X + (6c_1 - c_2 + 2c_3) = 0$$

Damit die Gleichung für alle X gilt, müssen die Koeffizienten jeder Potenz von X gleich Null sein:

(i) Aus $3c_1 + c_3 = 0$ folgt $c_3 = -3c_1$.

(ii) In $2c_1 + c_2 + c_3 = 0$ setzen wir $c_3 = -3c_1$ ein. Dann erhalten wir $2c_1 + c_2 - 3c_1 = -c_1 + c_2 = 0$ und somit $c_1 = c_2$.

(iii) Wir setzen $c_2 = c_1$ und $c_3 = -3c_1$ in den dritten Term $6c_1 - c_2 + 2c_3$ ein und erhalten $6c_1 - c_1 - 6c_1 = 0$.

Hieraus folgt dann $c_1 = 0$ und somit $c_3 = -3(0) = 0$ und $c_2 = -(0) = 0$. Die einzige Lösung des Gleichungssystems ist also $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Daher sind die drei Polynome linear unabhängig.

(c) Wir suchen nach Zahlen α_1, α_2 und α_3, so dass

$$q(X) = \alpha_1 p_1(X) + \alpha_2 p_2(X) + \alpha_3 p_3(X)$$

Wir setzen die Ausdrücke für $p_1(X), p_2(X)$ und $p_3(X)$ in die Gleichung ein.

$$\begin{aligned} X &= 3\alpha_1 X^2 + 2\alpha_1 X + 6\alpha_1 + \alpha_2 X - \alpha_2 + \alpha_3 X^2 + \alpha_3 X + 2\alpha_1 \\ &= (3\alpha_1 + \alpha_3)X^2 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X + (6\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) \end{aligned}$$

Nun vergleichen wir die Koeffizienten der gleichen Potenzen von X auf beiden Seiten der Gleichung. Auf der linken Seite haben wir nur X, also sind die Koeffizienten der X^2 und konstanten Terme gleich null, d.h:

(i) Der Koeffizient von X^2 ist $3\alpha_1 + \alpha_3 = 0$

(ii) Der Koeffizient von X ist $2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$

(iii) Der konstante Term ist $6\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$

Aus der ersten Gleichung folgt $\alpha_3 = -3\alpha_1$, was wir in die zweite Gleichung einsetzen:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_1 = 1, \quad \text{dann gilt } \alpha_2 = \alpha_1 + 1.$$

Setzen wir nun $\alpha_3 = -3\alpha_1$ und $\alpha_2 = \alpha_1 + 1$ in die dritte Gleichung ein, erhalten wir

$$6\alpha_1 - (1 + \alpha_1) - 6\alpha_1 = 0\,,$$

mithin also $\alpha_1 = -1$. Deshalb ist $\alpha_2 = 1 - 1 = 0$ und $\alpha_3 = -3(-1) = 3$. Die Linearkombination von $p_1(X), p_2(X)$ und $p_3(X)$ lautet also

$$q(X) = -1 \cdot p_1(X) + 0 \cdot p_2(X) + 3p_3(X)$$

Aufgabe H 37. *Orthonormalsysteme*

Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: u_1, u_2 ist ein Orthonormalsystem.

(b) Konstruieren Sie den Vektor $u_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass $-u_1, u_2, u_3$ ein Rechtssystem ist.

(c) Sei $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Hesse Normalform der Ebene, welche die Punkte P, Q sowie die Gerade $\left\{P + \lambda u_3 \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ enthält.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\langle u_1|u_1\rangle &= \frac{1}{3}\cdot 3 = 1\\ \langle u_2|u_2\rangle &= \frac{1}{6}\cdot 6 = 1\\ \langle u_1|u_2\rangle &= \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Foglich ist u_1, u_2 ein Orthonormalsystem.

(b) Wir berechnen

$$u_3 := u_1 \times u_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt offenbar $|u_1 \times u_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+1} = 1$, also ist $-u_1, u_2, u_1 \times u_2$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Wir wissen jedoch zunächst nicht, ob es sich auch um ein Rechtssystem handelt. Wir berechnen also

$$(u_1 \times u_2) \times -u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = -u_2.$$

Es ist also $-u_1, u_1 \times u_2, u_2$ tatsächlich ein Rechtssystem und

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

ist der gewünschte Vektor.

(c) Wir benötigen zwei Vektoren, die in der Ebene liegen:

(i) Der Vektor $PQ = Q - P = \left(\begin{smallmatrix}-2\\2\\2\end{smallmatrix}\right)$

(ii) Der Richtungsvektor der Geraden $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$

Wir suchen den Normalenvektor η der Ebene: η ist orthogonal zu beiden Vektoren PQ und u_3:

$$n^* = PQ \times u_3 = \sqrt{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right).$$

mit $|n^*| = \sqrt{2}\sqrt{6}$ erhalten wir also den Normalenvektor $\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right) = u_2$. Für den Abstand berechnen wir

$$\langle P\,|\,\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Die Hesse Normalform ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}&\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \middle| x \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\\ =&\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\end{aligned}$$

Aufgabe H 38. *Vektorprodukt*

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Rechenregeln für beliebige Vektoren $u, v, w, \xi \in \mathbb{R}^3$ korrekt sind.

(a) $\langle v \,|\, w \rangle \, u - \langle v \,|\, u \rangle \, w = v \times (u \times w)$

(b) $-\langle v \,|\, w \times w \rangle = \langle v \times u \,|\, w \rangle - \langle v \,|\, u \times w \rangle$

(c) $v \times (u \times w) = u \times (w \times v)$

(d) $\langle v \times u \,|\, w \times \xi \rangle + \langle u \,|\, w \rangle \langle v \,|\, \xi \rangle = \langle v \,|\, w \rangle \langle u \,|\, \xi \rangle + \langle v \,|\, v \times \xi \rangle$

Lösungshinweise hierzu: Wir stellen u, v, w, ξ als $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ dar.

(a) Die Aussage ist korrekt:

$$\begin{aligned}
v \times (u \times w) &= (v_1, v_2, v_3) \times (u_2w_3 - u_3w_2, u_3w_1 - u_1w_3, u_1w_2 - u_2w_1) \\
&= (v_2(u_1w_2 - u_2w_1) - v_3(u_3w_1 - u_1w_3),\ v_3(u_2w_3 - u_3w_2) - v_1(u_1w_2 - u_2w_1), \\
&\quad v_1(u_3w_1 - u_1w_3) - v_2(u_2w_3 - u_3w_2)) \\
&\quad \text{nach } u_i, w_i \text{ sortieren :} \\
&= (u_1(v_2w_2 + v_3w_3) - w_1(v_2u_2 + v_3u_3), u_2(v_1w_1 + v_3w_3) - w_2(v_1u_1 + v_3u_3)\ , \\
&\quad u_3(v_1w_1 + v_2w_2) - w_3(v_1u_1 + v_2u_2))
\end{aligned}$$

Wir addieren $(0,0,0) = (u_1(v_1w_1) - w_1(v_1u_1), u_2(v_2w_2) - w_2(v_2u_2), u_3(v_3w_3) - w_3(v_3u_3))$ zur Gleichung und bekommen:

$$\begin{aligned}
v \times (u \times w) &= (u_1 \langle v \,|\, w \rangle - w_1 \langle v \,|\, u \rangle, u_2 \langle v \,|\, w \rangle - w_2 \langle v \,|\, u \rangle, u_3 \langle v \,|\, w \rangle - w_3 \langle v \,|\, u \rangle) \\
&= \langle v \,|\, w \rangle \, u - \langle v \,|\, u \rangle \, w.
\end{aligned}$$

(b) Die Aussage ist korrekt: Da $\langle v \,|\, w \times w \rangle = \langle v \,|\, 0 \rangle = 0$ ist, bleibt nur noch

$$\langle v \times u \,|\, w \rangle = \langle v \,|\, u \times w \rangle$$

zu zeigen. Es ist:

$$\begin{aligned}
\langle v \,|\, u \times w \rangle &= \langle v \,|\, (u_2w_3 - u_3w_2, u_3w_1 - u_1w_3, u_1w_2 - u_2w_1) \rangle \\
&= v_1(u_2w_3 - u_3w_2) + v_2(u_3w_1 - u_1w_3) + v_3(u_1w_2 - u_2w_1) \\
&\quad \text{nach } w_i \text{ sortieren} \\
&= w_1(v_2u_3 - v_3u_2) + w_2(v_3u_1 - v_1u_3) + w_3(v_1u_2 - v_2u_1) \\
&= \langle v \times u \,|\, w \rangle .
\end{aligned}$$

(c) Die Aussage ist falsch, ein entsprechendes Gegenbeispiel ist durch $u = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $w = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ gegeben: Es gelten

$$v \times (u \times w) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

und

$$u \times (w \times v) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(d) Die Aussage ist korrekt: Da $\langle v \,|\, v \times \xi \rangle = 0$ ist, bleibt zu zeigen, dass :

$$\langle v \times u \,|\, w \times \xi \rangle + \langle u \,|\, w \rangle \langle v \,|\, \xi \rangle = \langle v \,|\, w \rangle \langle u \,|\, \xi \rangle$$

In der zweiten Teilaufgabe haben wir ferner gezeigt, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle x \times y \,|\, z \rangle = \langle x \,|\, y \times z \rangle$$

gilt. Mit $x = v, y = u, z = (w \times \xi)$ folgt

$$\langle v \times u \,|\, w \times \xi \rangle = \langle v \,|\, u \times (w \times \xi) \rangle .$$

In der ersten Teilaufgabe haben wir gezeigt, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$:

$$x \times (y \times z) = \langle x \,|\, z \rangle y - \langle x \,|\, y \rangle z$$

gilt. Mit $x = u, y = w, z = \xi$ fogt

$$u \times (w \times \xi) = \langle u \,|\, \xi \rangle w - \langle u \,|\, w \rangle \xi.$$

Zusammengefasst gilt also:

$$\begin{aligned} \langle v \times u \,|\, w \times \xi \rangle &= \langle v \,|\, u \times (w \times \xi) \rangle \\ &= \langle v \,|\, \langle u \,|\, \xi \rangle w - \langle u \,|\, w \rangle \xi \rangle \\ &= \langle v \,|\, w \rangle \langle u \,|\, \xi \rangle - \langle u \,|\, w \rangle \langle v \,|\, \xi \rangle . \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\langle v \times u \,|\, w \times \xi \rangle + \langle u \,|\, w \rangle \langle v \,|\, \xi \rangle = \langle v \,|\, w \rangle \langle u \,|\, \xi \rangle .$$

Aufgabe H 39. *Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5\sqrt{3} \\ 0 & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ für alle $n \geqq 1$.

(b) Bestimmen Sie B^8.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

IA $n = 1$: Es gilt:

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^1 - 1) \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix} .$$

IH Es gelte $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ für ein $n \geqq 1$.

IS $n \to n+1$:

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} = A^n \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{IH}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 5 + 3 \cdot \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) \\ 0 & 3^n \cdot 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^{n+1} - 1) \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

wegen $5 + 3 \cdot \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) = 5 + \frac{5}{2} 3^{n+1} - \frac{15}{2} = \frac{5}{2} \cdot 3^{n+1} - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)$.

Mit vollständiger Induktion folgt $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2}(3^n - 1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ für alle $n \geqq 1$.

(b) Es gilt $B = \sqrt{3} A$ und somit $B^8 = \left(\sqrt{3} A\right)^8 = \left(\sqrt{3}\right)^8 A^8$. Mit (a) folgt also

$$
B^8 = \left(\sqrt{3}\right)^8 \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2}(3^8 - 1) \\ 0 & 3^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & \frac{5}{2}\left(3^{12} - 81\right) \\ 0 & 3^{12} \end{pmatrix}
$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 40. *Geometrische Reihe*

Stellen Sie sich vor, Sie befinden sich in der Mitte eines offenen Feldes. Sie gehen 16 Meter nach vorne, drehen sich nach rechts und gehen 8 Meter, drehen sich wieder nach rechts und gehen weitere 4 Meter, und so weiter. Dies geht unendlich weiter. Wenn Sie schließlich unendlich viele Wendungen gemacht haben, wie weit sind Sie dann vom ursprünglichen Ausgangspunkt entfernt?

Hinweis: Betrachten Sie die Wege in einem kartesischen Koordinatensystem und trennen Sie zunächst nach horizontaler und vertikaler Laufrichtung.

Lösungshinweise hierzu: Wir starten im Ursprungspunkt $(0,0)$ und führen eine Reihe von Bewegungen aus, wobei sich bei jeder Wendung die Richtung um 90 Grad ändert und die zurückgelegte Strecke in jedem Schritt halbiert wird. Nun verfolgen wir, wie weit Sie sich in den x und y Richtungen bewegen:

Die Bewegungen in der y-Richtung sind: 16 Meter (nach Norden), -4 Meter (nach Süden), 1 Meter, -0.25 Meter und so weiter. Diese bilden eine geometrische Reihe mit dem ersten Term $a_1 = 16$ und dem Verhältnis $q = -\frac{1}{4}$. Die Summe dieser Reihe ist:

$$
S_y = \sum_{j=0}^{\infty} 16 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^j = 16 \cdot \frac{1}{1 - \frac{-1}{4}} = 16 \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{5}.
$$

Die Bewegungen in der x-Richtung sind: 8 Meter (nach Osten), -2 Meter (nach Westen), $+0,5$ Meter, $-0,125$ und so weiter. Auch diese Bewegungen bilden eine geometrische Reihe mit dem ersten Term $a_1 = 8$ und dem Verhältnis $q = \frac{-1}{4}$. Die Summe dieser Reihe ist:

$$
S_x = \sum_{j=0}^{\infty} 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^j = \frac{8}{1 - \frac{-1}{4}} = 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5}.
$$

Der Abstand vom Ursprung $(0,0)$ zum Endpunkt (S_x, S_y) ist nach dem Satz des Pythagoras:

$$\text{Enfernung} = \sqrt{(S_x)^2 + (S_y)^2)} = \sqrt{\frac{(2^6)^2 + (2^5)^2}{25}} = \sqrt{\frac{2^{10} \cdot (4+1)}{25}} = \frac{2^5}{\sqrt{5}} = \frac{32}{\sqrt{5}},$$

die Entfernung zum Ausgangspunkt ist also $\frac{32}{\sqrt{5}}$ Meter.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 41. *Neujahrspartygerichte*

Für eine Neujahrsparty möchten Sie verschiedene Gerichte zubereiten, die hauptsächlich die folgenden Zutaten benötigen:

- Gericht 1 (35 Port.): 1 kg Hähnchen, 120 g Mehl, 150 g Butter
- Gericht 2 (25 Port.): 2 kg Rindfleisch, 250 g Mehl, 125 g Butter, 125 g frische Kräuter
- Gericht 3 (30 Port.): 2 kg Hähnchen, 100 g Mehl, 100 g Butter

Ihre Vorräte zum 1. Januar 2025 sind 10 kg Hähnchen, 250 g frische Kräuter, 1250 g Butter, 1350 g Mehl, sowie reichlich von allen übrigen Zutaten. Wieviele ganzzahlige Portionen jedes Gerichts können Sie damit maximal zubereiten, wenn Sie Ihre gesamten Hähnchen- und Mehlvorräte aufbrauchen wollen?
Hinweis: Stellen Sie zuerst mit den Informationen über die Hähnchen und das Mehl ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses. Eliminieren Sie anschließend alle nicht realisierbaren Lösungen.

Lösungshinweise hierzu: Im folgenden sei X die Anzahl der Gericht 1, Y die Anzahl der Gericht 2 und Z die Anzahl der Gericht 3. Da wir das Hänchen komplett verbrauchen wollen, ergibt sich aus den Rezepten die Gleichung

$$\frac{1}{35}X + 0Y + \frac{2}{30}Z = 10.$$

Genauso liefert der Bedarf an Mehl in den Rezepten die Gleichung

$$\frac{120}{35}X + \frac{250}{25}Y + \frac{100}{30}Z = 1350.$$

Die übrigen Zutaten wollen wir nicht exakt verbrauchen, aber wir können natürlich nicht mehr benutzen als wir tatsächlich haben. Damit ergeben sich folgende Ungleichungen:

- Butter: $\frac{150}{35}X + \frac{125}{25}Y + \frac{100}{30}Z \leqq 1250$
- frische Kräuter: $\frac{125}{25}Y \leqq 250$.

Wir ignorieren jetzt zuerst die Ungleichungen und basteln ein Gleichungssystem aus den Gleichungen. Dieses hat die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$[A\|b] = \left[\begin{array}{ccc||c} \frac{1}{35} & 0 & \frac{2}{30} & 10 \\ \frac{120}{35} & \frac{250}{25} & \frac{100}{30} & 1350 \end{array}\right].$$

Zur Lösung verwenden wir nun Gauß:

$$
\begin{aligned}
[A\|b] = &\left[\begin{array}{ccc||c} \frac{1}{35} & 0 & \frac{2}{30} & 10 \\ \frac{120}{35} & \frac{250}{25} & \frac{100}{30} & 1350 \end{array}\right] \\
Z_2 - Z_1 120 : &\left[\begin{array}{ccc||c} \frac{1}{35} & 0 & \frac{2}{30} & 10 \\ 0 & \frac{250}{25} & -\frac{140}{30} & 150 \end{array}\right] \\
\begin{array}{r} 35Z_1 : \\ Z_2\frac{1}{10} : \end{array} &\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & \frac{7}{3} & 350 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{15} & 15 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Alle Lösungen sind also gegeben durch

$$
\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{7}{15} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad s \in \mathbb{R}.
$$

Da wir nur ganze Portionen und auch keine negative Anzahl an Portionen haben können, ergeben für uns nur folgende Lösungen Sinn:

$$
\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -35 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in \{0, \ldots, 10\}.
$$

Jetzt betrachten wir noch die Ungleichungen. Wegen der frische Kräuter ergibt sich

$$
250 \geqq \frac{125}{25} V = 5(15 + t7) = 75 + t35 \iff t \leqq \frac{175}{35} = 5.
$$

Für die Butter ergibt sich

$$
\begin{aligned}
1250 &\geqq \frac{150}{35} X + \frac{125}{25} Y + \frac{100}{30} Z \\
&= \frac{150}{35}(350 - t35) + \frac{125}{25}(15 + t7) + \frac{100}{30} t15 \\
&= 1500 - 150t + 75 + 35t + 50t = 1575 - 65t,
\end{aligned}
$$

also

$$
t \geqq \frac{3150 - 2500}{130} = 5.
$$

Damit erhalten wir also $t = 5$. Insgesamt haben wir folglich 175 Portionen von Gericht 1, 50 von Gericht 2 und 75 von Gericht 3.

Aufgabe H 42. *Gauß -Algorithmus I*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Systems $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösungshinweise hierzu: Wendet man den Gauß-Algorithmus an, so erhält man die folgenden Zwischenschritte:

$$
\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & -4 & -9 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 8 & 18 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{r} \\ Z_2 + 2\,Z_1 : \\ \\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r} Z_1 + 2\,Z_2 : \\ \\ Z_3 - 4\,Z_2 : \\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{r} \\ \\ -\frac{1}{2} \cdot Z_3 : \\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r} Z_1 + 2\,Z_3 : \\ Z_2 + Z_3 : \\ \\ Z_4 - Z_3 : \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{r} \\ \\ \\ -\frac{2}{3} \cdot Z_4 : \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r} Z_1 + Z_4 : \\ Z_2 + \frac{1}{2}\,Z_4 : \\ Z_3 + \frac{1}{2}\,Z_4 : \\ \\ Z_5 - Z_4 : \end{array}
\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

Aus dem letzten Ergebnis kann man die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ ablesen (vgl. 4.7.6). Man erhält

$$
\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.
$$

Aufgabe H 43. *Gauß -Algorithmus II*

Gibt es $\beta \in \mathbb{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \beta + 1 & \beta + 2 & 3 + 2\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

(a) genau eine Lösung **(b)** keine Lösung **(c)** mehrere Lösungen

besitzt? Geben Sie bei positiver Antwort auf (a) oder (c) ferner die Lösungsmenge(n) an.

Lösungshinweise hierzu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & \beta \\ \beta+1 & \beta+2 & 2\beta+3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_1: \\ Z_2-(\beta+1)Z_1: \\ Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & \beta \\ 0 & -\beta & 1 & -(\beta+1)\beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\begin{array}{r} Z_1-2Z_3: \\ Z_3: \\ Z_2+\beta Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta+1 & -(\beta+1)\beta \end{array}\right] \to \begin{array}{r} Z_1: \\ Z_2-Z_3/(\beta+1): \\ Z_3/(\beta+1): \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \end{array}\right]$$

Die letzte Umformung ist nur für $\beta \neq -1$ nötig und möglich.
Somit

(a) gibt es für $\beta \neq -1$ die eindeutige Lösung $\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$.

(b) ist für $\beta = -1$ die Lösungsmenge gegeben durch

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) gibt es kein $\beta \in \mathbb{R}$, für welches das das LGS keine Lösung besitzt.

Aufgabe H 44. *Lineare Abbildung*

Gegeben sei die Basis $B: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie die Standardbasis $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$. Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren von E unter der Abbildung f.

(b) Geben Sie die Abbildungsmatrizen ${}_E f_E$ und ${}_E f_B$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man erkennt, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also (da f linear ist)

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) - 2f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Spalten der Matrizen ${}_Ef_E$ bzw. ${}_Ef_B$ sind gegeben durch die Bilder der Basisvektoren von E bzw. B dargestellt in der Basis E. Aus (a) folgt also

$$ {}_Ef_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} $$

und

$$ {}_Ef_B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 4 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} $$

Frischhaltebox

Aufgabe H 45. *Skalarprodukt*

Seien u, v zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^n$. Rechnen Sie nach:

(a) $\langle u \,|\, v \rangle = \frac{1}{4}|u+v|^2 - \frac{1}{4}|u-v|^2$.

(b) Gilt $\langle u \,|\, u \rangle = \langle v \,|\, v \rangle$, so sind $u+v$ orthogonal zu $u-v$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt:

$$ \begin{aligned} \frac{1}{4}|u+v|^2 - \frac{1}{4}|u-v|^2 &= \frac{1}{4}\langle u+v \,|\, u+v \rangle - \frac{1}{4}\langle u-v \,|\, u-v \rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle u \,|\, u+v \rangle + \frac{1}{4}\langle v \,|\, u+v \rangle - \left(\frac{1}{4}\langle u \,|\, u-v \rangle - \frac{1}{4}\langle v \,|\, u-v \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4}\langle u \,|\, u \rangle + \frac{1}{4}\langle u \,|\, v \rangle + \frac{1}{4}\langle v \,|\, u \rangle + \frac{1}{4}\langle v \,|\, v \rangle \\ &\quad - \frac{1}{4}\langle u \,|\, u \rangle + \frac{1}{4}\langle u \,|\, v \rangle + \frac{1}{4}\langle v \,|\, u \rangle - \frac{1}{4}\langle v \,|\, v \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle u \,|\, v \rangle + \frac{1}{2}\langle v \,|\, u \rangle = \langle u \,|\, v \rangle \end{aligned} $$

wegen $\langle u \,|\, v \rangle = \langle v \,|\, u \rangle$ in $\mathbb{R}^n$.

(b) Es gilt:

$$ \begin{aligned} \langle u+v \,|\, u-v \rangle &= \langle u \,|\, u-v \rangle + \langle v \,|\, u-v \rangle \\ &= \langle u \,|\, u \rangle \underbrace{- \langle u \,|\, v \rangle + \langle v \,|\, u \rangle}_{=0 \text{ in } \mathbb{R}^n} - \langle v \,|\, v \rangle \\ &= \langle u \,|\, u \rangle - \langle v \,|\, v \rangle = 0 \end{aligned} $$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 46. *Linearität*

Entscheiden Sie jeweils, welche der nachfolgenden Abbildungen $\mathbb{K}$-linear sind.

(a) $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c-a \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \mathrm{i}\bar{z}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(c) $\gamma : \operatorname{Pol}_n \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p'(0) + 2p(1)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\varphi : \operatorname{Pol}_n \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p(0) - 2$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Lösungshinweise hierzu:

Wir prüfen alle Abbildungen $\vartheta : V \to W$ auf Additivität – d.h. $\vartheta(v+w) = \vartheta(v) + \vartheta(w)$ für alle $v, w \in V$ – sowie Homogenität - -also $\vartheta(kv) = k\vartheta(v)$ für alle $v \in V, k \in \mathbb{K}$. (Dies kann auch in einem Schritt gemacht werden, d. h. man zeigt $\vartheta(v + kw) = \vartheta(v) + k\vartheta(w)$ für alle $k \in \mathbb{K}, v, w \in V$).

(a) Sei $v := (a_1, b_1, c_1)^\intercal, w := (a_2, b_2, c_2)^\intercal$ für $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha(v+w) &= \alpha((a_1, b_1, c_1)^\intercal + (a_2, b_2, c_2)^\intercal) \\
&= \alpha((a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)^\intercal) \\
&= (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, b_1 + b_2 + c_1 + c_2, c_1 + c_2 - a_1 - a_2)^\intercal \\
&= (a_1 + b_1, b_1 + c_1, c_1 - a_1)^\intercal + (a_2 + b_2, b_1 + c_2, c_2 - a_2)^\intercal \\
&= \alpha((a_1, b_1, c_1)^\intercal) + \alpha((a_2, b_2, c_2)^\intercal) = \alpha(v) + \alpha(w).
\end{aligned}$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}
\alpha(kv) = \alpha(k(a_1, b_1, c_1)^\intercal) &= \alpha((ka_1, kb_1, kc_1)^\intercal) \\
&= (ka_1 + kb_1, kb_1 + kc_1, kc_1 - ka_1)^\intercal \\
&= k(a_1 + b_1, b_1 + c_1, c_1 - a_1)^\intercal \\
&= k\alpha((a_1, b_1, c_1)^\intercal) = k\alpha(v).
\end{aligned}$$

Somit ist α $\mathbb{R}$-linear.

(b) Sei $v := z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\beta(\mathrm{i}(a + \mathrm{i}b)) = \beta(-b + \mathrm{i}a)) = i(-b - \mathrm{i}a) = a - b\mathrm{i}$$

aber $\mathrm{i}\beta(a+\mathrm{i}b) = \mathrm{i}^2(a-\mathrm{i}b) = -a+b\mathrm{i}$. Somit ist $\mathrm{i}\beta(v) \neq \beta(\mathrm{i}v)$ für $v \neq 0$, die Abbildung also nicht $\mathbb{C}$-linear.

(c) Seien $p, q \in \operatorname{Pol}_n(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$. Laut Vorlesung ist formales Ableiten von Polynomen linear. Des Weiteren gilt gemäß Definition für das Einsetzen von Werten in Polynome $(p+q)(r) = p(r) + q(r)$ sowie $(kp)(r) = kp(r)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\gamma(p + kq) &= (p + kq)'(0) + 2(p + kq)(1) = (p' + kq')(0) + 2p(1) + 2kq(1) \\
&= p'(0) + kq'(0) + 2p(1) + 2kq(1) = p'(0) + 2p(1) + kq'(0) + 2kq(1) \\
&= p'(0) + 2p(1) + k(q'(0) + 2q(1)) = \gamma(p) + k\gamma(q).
\end{aligned}$$

Somit ist die Abbildung γ $\mathbb{R}$-linear.

(d) Wir wählen $p \in \mathrm{Pol}_n\mathbb{R}$ mit $p(X) = 1$. Dan gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ einerseits

$$2\varphi(p) = 2(p(0) - 2) = 2(1 - 2) = -2\,,$$

aber andererseits $\varphi(2p) = (2p)(0) - 2 = 2 - 2 = 0 \neq -2$. Somit ist die Abbildung φ nicht $\mathbb{R}$-linear.

Aufgabe H 47. *Links und Rechtsinverse*

Bestimmen Sie den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

sowie ferner eine Links- oder Rechtsinverse der Matrizen, falls diese existieren.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir wissen, dass nicht-quadratische Matrizen mit vollem Rang unendlich viele Rechts oder Linksinverse haben (aber nicht beide auf einmal). Wir für die Bestimmung einer Rechtsinversen die selben Schritte wie zur Rangbestimmung durchführen müssen (zumindest anfangs), fangen wir gleich mit letzterem an. (Sollte keine Rechtsinverse existieren, würde dies früher oder später auf eine unlösbare Zeile führen.):

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}Z_2} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-\frac{1}{2}Z_1} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+\frac{3}{2}Z_2} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{3}Z_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Wir sehen, die Matrix hat Rang 3, wir fahren mit der Bestimmung einer Rechtsinversen – deren Existenz nun garantiert ist – fort.

$$\xrightarrow{Z_1-Z_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 0 & \frac{53}{15} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-3Z_2} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{62}{15} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}Z_1} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{15} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Wir können die rechte Seite zu einer Rechtsinversen von A erweitern:

$$A_r := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wir erhalten alle weiteren Inversen, indem wir zusätzlich die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ bestimmen. Diese ist durch

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\frac{31}{15} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{15} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Menge aller Rechtsinversen ist nun gegeben durch:

$$\left\{ A_r + \begin{pmatrix} -\frac{31}{15} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{15} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Für B bestimmen wir den Rang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -3 & -10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2-2Z_1, Z_4+3Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -10 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3-Z_2, Z_4+2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen hier bereits dass der Rang 2 ist (wir könnten auch noch die 2. Zeile mit $\frac{1}{5}$ normieren, um die Standardform zu erhalten). Damit hat die Matrix keine Inverse, da Sie weder vollen Zeilen- noch vollen Spaltenrang hat.

(c) Wir bestimmen den Rang von C direkt in der erweiterten Form:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2-5Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & -9 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{13}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3-4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & -13 & -5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+13Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-\frac{9}{13}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{52} & \frac{5}{52} & -\frac{9}{52} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1-2Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{7}{52} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{52} & \frac{5}{52} & -\frac{9}{52} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-3Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{52} & \frac{11}{52} & \frac{1}{52} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{52} & \frac{5}{52} & -\frac{9}{52} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Somit hat C vollen Rang, die Inverse ist

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{52} & \frac{11}{52} & \frac{1}{52} \\ \frac{11}{52} & \frac{5}{52} & -\frac{9}{52} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(d) Die 1. und 3. Zeile von D sind linear unabhängig (da keine vielfachen von einander), die Matrix hat also Rang 2. Wir bestimmen nun die Inverses dieser Teilmatrix und erweitern dieses zu einem Linksinversen von D:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Um eine Linksinverse zu erhalten, füllen wir nun die fehlenden Spalten mit Nullen auf:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 48. *Invertierbarkeit, Kern, Bild*

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 7 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha-4 \\ 1 & \alpha & 2\alpha+6 & -\alpha+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = -1$ das Inverse von A.

(c) Bestimmen Sie für $\alpha = -2$ jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes der Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon x \mapsto Ax$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bestimmen direkt die Inverse von A und müssen lediglich jene α ausschliessen, bei welchen wir durch 0 teilen bzw. das 0-fache einer Zeile addieren würden.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha-4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 2\alpha+6 & -\alpha+2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-4Z_1, Z_3-2Z_1, Z_4-Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & \alpha & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 2\alpha+4 & 4-\alpha & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-2Z_2, Z_4+(\alpha-1)Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+5 & 4-\alpha & -4\alpha+3 & \alpha-1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4+(\alpha+5)Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha+2)^2 & 33+2\alpha & -11-\alpha & 5+\alpha & 1 \end{array}\right)$$

Die Nullstellen von $(\alpha+2)^2$ sind $\alpha = -2$. Somit hat A genau für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ vollen Rang, und ist genau dann invertierbar.

(b) Für $\alpha = -1$ fahren wir mit dem Gauss-Algorithmus fort:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+Z_4, Z_1+2Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 63 & -20 & 8 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 37 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-Z_3, Z_1+2Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 137 & -44 & 18 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -41 & 13 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 37 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1+Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 96 & -31 & 13 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -41 & 13 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 37 & -12 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-Z_2, -Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 96 & -31 & 13 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 41 & -13 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -37 & 12 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 31 & -10 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Somit ist das Inverse von A für $\alpha = -1$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 96 & -31 & 13 & 3 \\ 41 & -13 & 5 & 1 \\ -37 & 12 & -5 & -1 \\ 31 & -10 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Für $\alpha = -2$ ist der Kern von A gleich dem Kern von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

was durch Zeilenausräumen zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

umgeformt werden kann. Der Kern dieser Matrix ist durch $\langle (4, 2, -2, 1)^\mathsf{T} \rangle$ gegeben.

Da die ersten 3 Spalten von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 7 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, und nach Dimensionformel **(4.8.17)** das Bild Dimension $4-1=3$ hat, ist eine Basis des Bildes durch $(1,4,2,1)^\intercal, (1,3,0,-2)^\intercal, (2,7,1,4)^\intercal$ gegeben.

Aufgabe H 49. *Lineare Abbildung, beschreibende Matrix, Komposition*

Gegeben seien die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \\ 2x-y \end{pmatrix}$ sowie die Basen $B\colon b_1 := \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), b_2 := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^2$ und $C\colon c_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), c_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), c_3 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^3$.
Ferner seien E_2 und E_3 die jeweiligen Standardbasen.
Bestimmen Sie ${}_{E_3}\alpha_{E_2}$, ${}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B$, ${}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3}$ und ${}_C\alpha_B$.

Lösungshinweise hierzu: Die ersten beiden Matrizen lassen sich direkt aus der Aufgabenstellung ablesen:

$${}_{E_3}\alpha_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, {}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Für die dritte Matrix müssen wir die Einheitsvektoren in E_3 als Linearkombinationen der Basisvektoren von C schreiben:

$$\begin{aligned} (1,0,0)^\intercal &= \frac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3), \\ (0,1,0)^\intercal &= \frac{1}{2}(-c_1 + c_2 + c_3), \\ (0,0,1)^\intercal &= \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - c_3) \end{aligned}$$

Demnach ist die Matrix gegeben durch

$${}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die letzte gesuchte Matrix ergibt sich als Produkt

$$\begin{aligned} {}_C\alpha_B &= {}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3\,E_3}\alpha_{E_2\,E_2}(\mathrm{id}_2)_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 50. *Kreuzprodukt*

Es seien $v := \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $v \times w$ in Abhängigkeit von α.

Wie muss α gewählt werden, damit $\sin \sphericalangle(v, w) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ gilt?

Lösungshinweise hierzu: Das Kreuzprodukt ist gegeben durch

$$v \times w = \begin{pmatrix} \alpha \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \\ -((-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot 1) \\ (-1) \cdot 2 - \alpha \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 2 \\ -2 \\ -2 - \alpha \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$(\sin \sphericalangle(v, w))^2 = \left(\frac{|v \times w|}{|v||w|} \right)^2 = \frac{2\alpha^2 + 12}{6\alpha^2 + 12} = \frac{\alpha^2 + 6}{3\alpha^2 + 6}$$

Die Gleichung $\frac{\alpha^2+6}{3\alpha^2+6} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$ nach α auflösen ergibt $\alpha^2 = 2$ und somit $\alpha \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 51. *Determinante und Rang*

Wir betrachten die Abbildungen $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & t \\ t & 4 & 4 & 4 \\ 4 & t & 4 & 4 \\ 4 & 4 & t & 4 \end{pmatrix}$,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \det(A(x))$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N} : x \mapsto \operatorname{Rg}(A(x))$.

(a) Ist die Abbildung f linear?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0$?

(c) Bestimmen Sie das Bild $\left\{g(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$ von g.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen zunächst $\det(A(x))$: Indem wir von jeder Zeile ab der zweiten die erste abziehen (elementare Zeilenoperationen), überführen wir die Matrix $A(x)$ in die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & x \\ x-4 & 0 & 0 & 4-x \\ 0 & x-4 & 0 & 4-x \\ 0 & 0 & x-4 & 4-x \end{pmatrix}$$

welche nach 4.12.1 die selbe Determinante hat. Durch Addieren der ersten drei Spalten zur letzten erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 12+x \\ x-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-4 & 0 \end{pmatrix} =: B(x)$$

wobei nach 4.12.1 und 4.12.2 ebenfalls die Determinante nicht verändert wird. Wir erhalten letztendlich mit dem Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} \det(A(x)) = \det(B(x)) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 12+x \\ x-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+4} \cdot (12+x) \cdot \det \begin{pmatrix} x-4 & 0 & 0 \\ 0 & x-4 & 0 \\ 0 & 0 & x-4 \end{pmatrix} \\ &= -(x+12)(x-4)^3 \end{aligned}$$

(a) Für eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ gilt aufgrund der Homogenität stets $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. (Hierbei ist $\mathbf{0}$ der jeweilige Nullvektor, $0 \in \mathbb{K}$ ein Skalar.) Wegen $f(0) = -12 \cdot (-4)^3 = 3 \cdot 256 = 768$ kann f nicht linear sein.

(b) $f(x) = 0$ gilt nur für $x = 4$ und $x = -12$.

(c) Für $x \notin \{-12, 4\}$ ist $\det(A(x)) \neq 0$, die Matrix $A(x)$ ist also regulär und hat somit Rang 4. Für die anderen beiden Fälle nutzen wir, dass neben der Determinante auch der Rang unter den verwendeten Zeilen- und Spaltenoperationen erhalten bleibt und setzen direkt in $B(x)$ ein:

- $x = -12$: Die Matrix
$$B(-12) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$
hat Rang 3, wie man anhand der Nullspalte und der der linearen Unabhängigkeit der letzten drei Zeilen abliest.
- $x = 4$: Die Matrix
$$B(4) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
hat offensichtlich Rang 1.

Wir erhalten:
$$\{g(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{1, 3, 4\}$$

Aufgabe H 52. *Entwicklungssatz*

Seien $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(2AB)$, ohne den Gauß-Algorithmus zu verwenden.

Lösungshinweise hierzu:

A: Wir entwickeln zunächst nach der 4. Zeile, anschließend nach der 1. Spalte und nutzen danach Sarrus:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{4+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 6 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix} \\
&= -2 \cdot \left((-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 12 & 7 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \right) \\
&= -6 \cdot ((-16 + 240 + 84 - 112) - 2\,(120 + 42 - 48)) \\
&= -6 \cdot (196 - 228) = 6 \cdot 32 = 192
\end{aligned}$$

B: Für B nutzen wir die Blocksdreiecksgestalt:

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 7 \cdot (1 + 18 + 12 - 9 - 6 - 4) = 84$$

Wir erhalten aus 4.12.1 (mZ) und 4.12.3

$$\det(2AB) = 2^5 \cdot \det(A) \cdot (B) = 2^5 \cdot 3 \cdot \underbrace{64}_{=2^6} \cdot (3 \cdot 7 \cdot 2^2) = \underbrace{1024}_{=2^{10}} \cdot \underbrace{(8 \cdot 63)}_{504}$$
$$= 504000 + 10080 + 2016 = 516096\,.$$

Aufgabe H 53. *Volumenberechnung*

Gegeben seien die Matrix A und die Vektoren v_1, v_2 und v_3 durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen V_1 des von v_1, v_2 und v_3 aufgespannten Spats.

(b) Berechnen Sie das Volumen V_2 des von Av_1, Av_2 und Av_3 aufgespannten Spats.

(c) Berechnen Sie die Determinante von A.

(d) Sei α die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$. Wie hängen die Determinante von A und die Änderung des orientierten Volumens eines Spats unter der Abbildung α zusammen?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei V die Matrix mit den Spalten v_1, v_2 und v_3 (in dieser Reihenfolge). Das Volumen berechnet sich als

$$V_1 = |\det(V)| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right|$$
$$= |0 + 0 - 4 - 0 - 1 - 0| = 5$$

(b)+(c) Wir berechnen zunächst

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 + 8 + 9 + 8 = 27$$

Hieraus erhalten wir

$$V_2 = |\det(Av_1, Av_2, Av_3)| = |\det(AV)| = |\det(A)| \cdot |\det(V)| = 5 \cdot 27 = 135$$

(d) Die Determinante der Matrix A ist der Faktor, um den sich das orientierte Volumen des aufgespannten Spats unter der Abbildung α ändert. (Der Betrag der Determinante gibt entsprechend den Änderungsfaktor des Volumens an.)

Aufgabe H 54. *Determinanten*

Gegeben sei $x \in \mathbb{R}^+$ sowie die Matrix $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ mit Parameter $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie:

(a) $\det(A_t)$, $\det({A_t}^6)$ und $\det(\sqrt{x}\,A_t)$.

(b) Alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t invertierbar ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$\det(A_t)$: Zur Berechnung nutzen wir die Blockdiagonalgestalt: Nach 4.12.4 gilt:

$$\begin{aligned}\det(A_t) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} t & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \\ &= -3 \cdot (t - 42) \cdot (120 - 121) = 3t - 126\end{aligned}$$

$\det({A_t}^6)$: Wir erhalten aus 4.12.3 (1)

$$\det({A_t}^6) = (\det(A_t))^6 = (3t - 126)^6$$

$\det(\sqrt{x}\,A_t)$: Wir erhalten aus 4.12.1 (VZ)

$$\det(\sqrt{x}\,A_t) = \sqrt{x}^6\,(\det(A_t)) = x^3(3t - 126)$$

(b) A_t ist genau dann invertierbar, wenn

$$0 \neq \det(A_t) \overset{\text{(a)}}{=} 3(t - 42)$$

also ist A_t nur für $t \in \mathbb{R} \setminus \{42\}$ invertierbar.

Frischhaltebox

Aufgabe H 55. *Märchenzahlen*

Zeigen Sie induktiv: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $k = k(n) \in \mathbb{N}$ mit $10^{2n+1} + 1 = 11k$.

Lösungshinweise hierzu:

IA Sei $n = 1$. Es gilt:

$$10^{2\cdot 1+1} + 1 = 1001 = 990 + 11 = 90 \cdot 11 + 11 = 91 \cdot 11$$

folglich gilt die Aussage für $n = 1$ mit $k = k(1) = 91$.

IH Für $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $10^{2n+1} + 1 = 11k$.

IS $n \to n + 1$

$$\begin{aligned} 10^{2(n+1)+1} + 1 &= 100 \cdot 10^{2n+1} + 1 = 99 \cdot 10^{2n+1} + \left(10^{2n+1} + 1\right) \\ &\overset{\text{IH}}{=} 9 \cdot 10^{2n+1} \cdot 11 + k(n) \cdot 11 = 11 \cdot \left(9 \cdot 10^{2n+1} + k(n)\right) \end{aligned}$$

Da 9, 10^{2n+1} und $k(n)$ natürliche Zahlen sind, trifft dies auch auf

$$k := 9 \cdot 10^{2n+1} + k(n)$$

zu.

Nach vollständiger Induktion folgt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $k = k(n) \in \mathbb{N}$ mit

$$10^{2n+1} + 1 = 11k\,.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 56. *Koordinatentransformation*
Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ affine Koordinatensysteme. Sei ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} v + \begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$ für das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$, sowie

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathbb{E}}P = (\,1 \;\; 0 \;\; -1\,)^{\intercal}, \quad {}_{\mathbb{E}}Q = (\,-3 \;\; 4 \;\; -2\,)^{\intercal}, \quad {}_{\mathbb{E}}R = (\,-7 \;\; 2 \;\; -1\,)^{\intercal}, \quad {}_{\mathbb{E}}S = (\,-5 \;\; 4 \;\; -1\,)^{\intercal}\\
&{}_{\mathbb{G}}P = (\,0 \;\; 0 \;\; 0\,)^{\intercal}, \quad {}_{\mathbb{G}}Q = (\,1 \;\; 0 \;\; 1\,)^{\intercal}, \quad {}_{\mathbb{G}}R = (\,2 \;\; 0 \;\; 0\,)^{\intercal}, \quad {}_{\mathbb{G}}S = (\,1 \;\; -1 \;\; 1\,)^{\intercal}.
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

Lösungshinweise hierzu: Wir bestimmen zu allererst ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ gemäß 5.7.6: Dazu wenden wir zunächst Gauß auf ${}_{\mathbb{F}}\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ an, um $F = {}_{\mathbb{E}}\mathrm{id}_{\mathbb{F}}$ zu bestimmen:

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 2Z_3:\\ Z_2 - 3Z_1:\\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 6 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - 6Z_3:\\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sei Q der Ursprung von $\mathbb{F}$. Dann folgt aus ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(0) = F^{-1}(-Q)$ insbesondere

$$Q = -\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ aus den angegebenen Koordinaten der Punkte P, Q, R und S. Dazu machen wir den Ansatz

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = Gv + t \qquad \text{mit} \quad G \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ t \in \mathbb{R}^3.$$

Die Bedingung ${}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}P)$ liefert sofort $t = {}_{\mathbb{E}}P = (\,1 \;\; 0 \;\; -1\,)^{\intercal}$. Somit bleibt noch G zu bestimmen. Bezeichnen wir mit g_1, g_2, g_3 die unbekannten Spalten von G so, dass $G = (\,g_1 \;\; g_2 \;\; g_3\,)$, dann kann die Bedingung ${}_{\mathbb{E}}R = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}R)$ geschrieben werden als

$${}_{\mathbb{E}}R = (\,g_1 \;\; g_2 \;\; g_3\,)\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + t \quad\Longleftrightarrow\quad {}_{\mathbb{E}}R = 2g_1 + t \quad\Longleftrightarrow\quad g_1 = \frac{1}{2}({}_{\mathbb{E}}R - t) = \begin{pmatrix}-4\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Somit ist g_1 bestimmt. Die Bedingung ${}_{\mathbb{E}}Q = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}Q)$ liefert weiter

$$ {}_{\mathbb{E}}Q = (\, g_1 \;\; g_2 \;\; g_3 \,) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \iff {}_{\mathbb{E}}Q = g_1 + g_3 + t \iff g_3 = {}_{\mathbb{E}}Q - g_1 - t = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, $$

womit die dritte Spalte g_3 von G bestimmt ist. Weiter ergibt ${}_{\mathbb{E}}S = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}S)$ schließlich

$$ \begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}S = (\, g_1 \;\; g_2 \;\; g_3 \,) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t &\iff {}_{\mathbb{E}}S = g_1 - g_2 + g_3 + t \\ &\iff g_2 = -{}_{\mathbb{E}}S + g_1 + g_3 + t = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

Damit ist auch die zweite Spalte g_2 von G bestimmt und wir erhalten

$$ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} $$

.

(a) Wir erhalten aus ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Fv + Q$

$$ \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right). $$

Analog erhalten wir

$$ \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right). $$

(b) Wir bestimmen zunächst die Inverse von G:

$$ \left[\begin{array}{ccc||ccc} -4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] $$

$$ \begin{array}{r} Z_2 : \\ -Z_3 : \\ Z_1 + 4Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] $$

$$ \begin{array}{r} Z_1 + 3/5Z_2 - 3/10Z_3 : \\ 3Z_2 - Z_3 : \\ 1/10Z_3 - 1/5Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & -3/10 & -1/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & -9 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/10 & 2/5 & 1/5 \end{array} \right] $$

$$ \begin{array}{r} \\ Z_2 + 9Z_3 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & -3/10 & -1/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 & -2/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/10 & 2/5 & 1/5 \end{array} \right] $$

Also ist

$$G^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -1 & -4 & -12 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= G^{-1}(v-P) \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -1 & -4 & -12 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} v + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ferner ist nach 5.7.8 – man beachte die vertauschten Rollen von $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$ sowie P und Q –

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) &= \left({}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}\right)(v) \\ &= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(Gv+P) = F^{-1}\left(Gv+P-Q\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -11 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe H 57. *Orthonormierung im Polynomraum*

Wir betrachten den Raum $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich 2, versehen mit der Basis $B\colon\ b_1, b_2, b_3$ mit $b_1(X) = 1$, $b_2(X) = X - 1$ und $b_3(X) = X^2$. Ferner definieren wir ein Skalarprodukt $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_H$ und eine Norm $\|\cdot\|_H$ für stetig diffenzierbare Funktionen $f, g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ mittels

$$\langle f\,|\,g\rangle_H := \int_{-1}^{1} f(x)g(x) + f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad\qquad \|f\|_H := \sqrt{\langle f\,|\,f\rangle_H}$$

(a) Gewinnen Sie aus B eine Orthonormalbasis $U\colon\ u_1, u_2, u_3$ von $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ mit: $\mathrm{L}(u_1) = \mathrm{Pol}_0\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{L}(u_1, u_2) = \mathrm{Pol}_1\,\mathbb{R}$.

(b) Geben Sie ${}_B\mathrm{id}_U$ und ${}_U\mathrm{id}_B$ an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir stellen zuerst fest, dass $\mathrm{Pol}_0\,\mathbb{R} = \mathrm{L}\,(b_1)$ und $\mathrm{Pol}_1\,\mathbb{R} = \mathrm{L}\,(b_1, b_2)$ gelten. Folglich müssen wir nur das Orthonormierungsverfahren (5.5.10 in der Vorlesung) anwenden:

$$
\begin{aligned}
\|b_1\|_H^2 &= \int_{-1}^{1} (b_1(x))^2 + (b_1'(x))^2 \,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} 1^2 + 0^2 \,\mathrm{d}\,x = 2 \\
\Rightarrow u_1(X) &:= \frac{b_1(X)}{\|b_1\|_H} = \frac{1}{\sqrt{2}} b_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\tilde{u}_2 &:= b_2 - \langle b_2 \,|\, u_1 \rangle_H \, u_1 = b_2 - \int_{-1}^{1} \underbrace{(b_2(x)u_1(x))}_{=(x-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} + \underbrace{(b_2'(x)u_1'(x))}_{=1\cdot 0} \,\mathrm{d}\,x \cdot u_1 \\
&= b_2 - \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right]_{-1}^{1} u_1 \\
&= b_2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - (\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\right) u_1 = b_2 + \sqrt{2}u_1 \\
\Rightarrow \|\tilde{u}_2\|_H^2 &= \int_{-1}^{1} (x-1+1)(x-1+1) + (1-0+0)(1-0+0) \,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 + 1 \,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} \\
\Rightarrow u_2(X) &= \frac{\tilde{u}_2(X)}{\|\tilde{u}_2\|_H} = \sqrt{\frac{3}{8}} \left(b_2 + \sqrt{2}u_1\right)(X) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} X \\
\tilde{u}_3 &:= b_3 - \langle b_3 \,|\, u_1 \rangle_H \, u_1 - \langle b_3 \,|\, u_2 \rangle_H \, u_2 \\
&= b_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 + 0 \,\mathrm{d}\,x \cdot u_1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x + 2x \cdot 1 \,\mathrm{d}\,x \cdot u_2 \\
&= b_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} u_1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_{-1}^{1} u_2 \\
&= b_3 - \frac{\sqrt{2}}{3} u_1 \\
\Rightarrow \|\tilde{u}_3\|_H^2 &= \langle \tilde{u}_3 \,|\, \tilde{u}_3 \rangle_H = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 + (2x)^2 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} + 4x^3 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x + \frac{4}{3}x^2\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{18 - 10 + 8 \cdot 15}{45} = \frac{128}{45}$$

$$\Rightarrow u_3(X) = \frac{\tilde{u}_3(X)}{\|\tilde{u}_3\|_H} = \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \cdot \left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$$

Bemerkung: Um zu überprüfen, ob man richtig gerechnet haben, lässt sich neben einen erneuten Nachrechnen häufig auch ein Probe in umgekehrter Richtung machen. Für diese Aufgabe sähe eine solche wie folgt aus:

- Mit $u_1 \in \mathrm{Pol}_0 \mathbb{R}$, $u_2 \in \mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} \setminus \mathrm{Pol}_0 (\mathbb{R})$ und $u_3 \in \mathrm{Pol}_3 \mathbb{R} \setminus \mathrm{Pol}_2 \mathbb{R}$ (ersteres hat Grad 0, zweiteres Grad 1, letzteres Grad 2) ist die Bedingung $\mathrm{Pol}_0 \mathbb{R} = \mathrm{L}(u_1)$, $\mathrm{Pol}_1 \mathbb{R} = \mathrm{L}(u_1, u_2)$ und $\mathrm{Pol}_3 \mathbb{R} = \mathrm{L}(u_1, u_2, u_3)$ erfüllt.
- Wir überprüfen nun Orthogonalität und Normierung:

$$\|u_1\|_H^2 = \langle u_1 \mid u_1 \rangle_H = \int_{-1}^{1} (u_1(x))^2 + (u_1'(x))^2 \,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} + 0 \,\mathrm{d}\,x = 1$$

$$\|u_2\|_H^2 = \langle u_2 \mid u_2 \rangle_H = \int_{-1}^{1} \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{8} \,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\begin{aligned}
\|u_3\|_H^2 = \langle u_3 \mid u_3 \rangle_H &= \frac{45}{128} \int_{-1}^{1} \underbrace{x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}}_{=\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2} + \underbrace{4x^2}_{=2x^2} \,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{9}{128}x^5 - \frac{5}{64}x^3 + \frac{5}{128}x + \frac{15}{32}x^3\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(\frac{9}{128} - \frac{5}{64} + \frac{5}{128} + \frac{15}{32}\right) - \left(-\frac{9}{128} + \frac{5}{64} - \frac{5}{128} - \frac{15}{32}\right) \\
&= \frac{18 - 20 + 10 + 120}{128} = 1
\end{aligned}$$

$$\langle u_1 \mid u_2 \rangle_H = \int_{-1}^{1} u_1(x)u_2(x) + u_1'(x)u_2'(x) \,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{4}x + 0 \,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\langle u_1 \mid u_3 \rangle_H = \frac{3\sqrt{5}}{16} \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + 0 \,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{5}}{16} \left[x^3 - x\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle u_2 \mid u_3 \rangle_H = \frac{3\sqrt{15}}{64} \int_{-1}^{1} (x^3 - x) + 2x \,\mathrm{d}\,x = 0$$

wobei $\langle u_1 \mid u_2 \rangle_H$ und $\langle u_3 \mid u_2 \rangle_H$ aus Symmetriegründen folgen (Integration einer ungeraden Funktion über ein Intervall der Form $[-a, a]$). Somit bilden u_1, u_2 und u_3 tatsächlich eine Orthonormalbasis.

(b) Aus dem Algorithmus lesen wir ab:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_1 \qquad \Rightarrow {}_B(u_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; {}_U(b_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} b_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{u_1}_{=\frac{1}{\sqrt{2}} b_1} \qquad \Rightarrow {}_B(u_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \; {}_U(b_2) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} b_3 - \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} b_1 \qquad \Rightarrow {}_B(u_3) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; {}_U(b_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten entsprechend:

$${}_B\operatorname{id}_U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

und

$${}_U\operatorname{id}_B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 58. *Spiegelung*

Eine Spiegelung an einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av$. Ist $\alpha \circ \alpha$ eine eigentliche / uneigentliche Isometrie?

(b) Sei E die Ebene durch die Punkte $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $Q = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Bildebene $E' := \alpha(E) = \left\{\alpha(x) \,\middle|\, x \in E\right\}$ von E unter α in Hesse-Normalform.

(c) Seien $r_1 := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^\intercal$ und $r_2 := \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}^\intercal$. Für welche $j \in \{1, 2\}$ ist die Abbildung $\beta_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + r_j$ eine Ebenenspiegelung? Geben Sie in diesen Fällen die Spiegelebene in Hesse-Normalform an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt mit $A = A^\intercal$

$$A^2 = A^\intercal A = \mathrm{E}_3$$

also ist $\alpha \circ \alpha = \mathrm{id}$ und somit eine eigentliche Isometrie $(\det(\mathrm{E}_n) = 1)$.

(b) Zur Bestimmung der Spiegelebene betrachten wir die Fixpunktgleichung $Av = v$. Dies führt auf das homogene LGS $(A - E_3)v = 0$. Wir erhalten

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} (-3)\cdot Z_1 : \\ Z_2 + 2Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

womit der Lösungsraum

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

ist. Der Lösungsraum beschreibt somit die gesuchte Spiegelebene Ebene S, welche den Ursprung $(0,0,0)$ enthält und die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}^\intercal$ und $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\intercal$ hat. Wir berechnen den Normalenvektor n mittels

$$n = \frac{1}{|\hat{n}|}\hat{n}, \quad \text{wobei} \quad \hat{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\hat{n}| = \sqrt{6}.$$

Somit ist $n = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}^\intercal$. Da $(0,0,0)$ ein Punkt der Ebene ist, erhalten wir nach Bemerkung 2.9.7.1 zwei mögliche Darstellung für die Hesse-Normalform:

$$S\colon\ \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad S\colon\ -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = 0.$$

(c) Die Matrix A ist uneigentlich orthogonal, da $A^\intercal A = E_3$ und

$$\det A = \frac{1}{27}(-4-4-4+1-8-8) = -1$$

nach der Regel von Sarrus (3.11.5) gilt. Insbesondere gilt $A^{-1} = A^\intercal = A$ weil A orthogonal und symmetrisch ist. Somit ist $(A^{-1})^2 = A^2$ und daher $\alpha\circ\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto A^2v$. Zudem ist mit Lemma 3.10.5

$$(A^2)^\intercal(A^2) = (AA)^\intercal(AA) = A^\intercal \underbrace{A^\intercal A}_{=E_3} A = A^\intercal A = E_3$$

und wegen 3.12.3.1 gilt $\det(A^2) = \det(A)^2 = 1$. Damit ist A^2 eine eigentlich orthogonale Matrix und $\alpha\circ\alpha$ ist eine eigentliche Isometrie und keine uneigentliche Isometrie.

(d) Damit β_j eine Spiegelung ist, muss der Translationsanteil r_j orthogonal zu der Spiegelebene aus **(a)** sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn r_j ein Vielfaches des Normalenvektors n aus **(a)** ist. Wir erkennen sofort, dass $r_1 \neq tn$ für alle $t\in\mathbb{R}$ und $r_2 = -2\sqrt{6}\,n$. Somit ist nur β_2 eine Ebenenspiegelung. Dies kann jeweils auch rechnerisch durch Lösen eines inhomogenen LGS gesehen werden.
Für r_1 führt die Fixpunktgleichung $\beta_1(v) = v \iff (A-E_3)v = -r_1$ auf das LGS

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2\\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} (-3)\cdot Z_1:\\ Z_2+2Z_1:\\ Z_3-Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Die 2. Zeile liefert einen Widerspruch. Somit kann es keine Lösung geben und β_1 ist keine Spiegelung.
Für r_2 führt die Fixpunktgleichung $\beta_2(v) = v \iff (A-E_3)v = -r_2$ auf das LGS

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2\\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -4\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{r} (-3)\cdot Z_1:\\ Z_2+2Z_1:\\ Z_3-Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Der Lösungsraum ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s,\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

und beschreibt damit eine Spiegelebene T, welche den Punkt $(-6, 0, 0)$ enthält und dieselben Richtungsvektoren $(\,2\;\;1\;\;0\,)^\intercal$ und $(\,-1\;\;0\;\;1\,)^\intercal$ wie S aus Teilaufgabe **(a)** hat. Damit ist n aus **(a)** auch ein Normalenvektor von T und die Hesse-Normalform von T ist gegeben durch

$$T\colon\;\; -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 = \sqrt{6}.$$

Der Translationsanteil r_2 führt somit erneut zu einer Spiegelung mit einer Spiegelebene T, welche als die um $\sqrt{6}$ Längeneinheiten verschobene Spiegelebene S identifiziert werden kann.

Aufgabe H 59. *Spiegelung*

Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Ebene, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$-3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0.$$

Finden Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Ebene beschrieben wird durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$.

Lösungshinweise hierzu:

Um die Spiegelung an der Ebene zu beschreiben, bilden wir zu jedem Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ den Spiegelpunkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^\intercal$. Der Vektor $n = (-3, 3, 1)^\intercal$ steht orthogonal auf der Ebene (Satz 2.9.5), folglich ist die folgende Gerade orthogonal zur Ebene und geht durch den Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$.

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um den Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene zu erhalten setzen wir die Punkte von h in die Ebenengleichung ein:

$$-3\tilde{x}_1 + 9t + 3\tilde{x}_2 + 9t + \tilde{x}_3 + t = 0,$$

daher liegt der Schnittpunkt mit der Ebene bei

$$t_0 = \frac{3\tilde{x}_1 - 3\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3}{19}.$$

Der Spiegelpunkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ liegt also bei

$$2t_0 = \frac{6\tilde{x}_1 - 6\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3}{19},$$

und ist durch die folgenden Koordinaten gegeben:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= \tilde{x}_1 + 2t_0(-3) = \frac{1}{19}\left(\tilde{x}_1 + 18\tilde{x}_2 + 6\tilde{x}_3\right), \\
\hat{x}_2 &= \tilde{x}_2 + 2t_0(3) = \frac{1}{19}\left(18\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - 6\tilde{x}_3\right), \\
\hat{x}_3 &= \tilde{x}_3 + 2t_0 = \frac{1}{19}\left(6\tilde{x}_1 - 6\tilde{x}_2 + 17\tilde{x}_3\right).
\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 18 & 1 & 6 \\ -6 & 6 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}.$$

Matrix A und Vektor t sind durch

$$A = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 18 & 1 & -6 \\ 6 & -6 & 17 \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Alternativer Lösungsweg:

Die Spiegelebene $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\right\}$ ist die Fixpunktmenge der Ebenenspiegelung, das heißt

$$\tilde{x} = A\tilde{x} + t$$

für alle $\tilde{x} \in S$. Da die Spiegelebene den Nullvektor enthält, folgt hieraus insbesondere $t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Ursprungsgerade $G := \left\{\lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ ist ferner orthogonal zur Spiegelebene. Dies bedeutet insbesondere dass für den Schnittpunkt P mit der Spiegelebene S – welcher in diesem Falle der Ursprung ist – sowie für alle $\hat{x} \in G$ gilt:

$$\begin{aligned}
A\hat{x} + t = A(\hat{x} - P + P) + t &= A(\hat{x} - P) + \underbrace{AP + t}_{=P} \\
&= A(\hat{x} - P) = P - \hat{x}
\end{aligned}$$

Der Vektor von P nach $\hat{x}$ – welcher Orthogonal zur Spiegelebene ist – ändert durch die Spiegelung lediglich seine Orientierung. Setzen wir $b_1 := \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, so erhalten wir wegen $\hat{x} \in G = \mathrm{L}\left(b_1\right)$ folglich

$$\lambda A b_1 = -\lambda b_1$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir wählen nun einen zu b_1 orthogonalen, normierten Vektor, beispielsweise $b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieses Orthogonalsystem ergänzen wir nun mit 3.9.3.5 zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$:

$$b_3 := b_1 \times b_2 = \frac{1}{\sqrt{38}}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Sowohl b_2 als auch b_3 sind in der Spiegelebene enthalten, erfüllen also

$$\begin{aligned} b_2 &= Ab_2 \\ b_3 &= Ab_3 \end{aligned}$$

Somit hat die Spiegelung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$ bezüglich der Basis $B\colon\ b_1, b_2, b_3$ die Darstellungsmatrix

$$_B\varphi_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ist nun $\mathcal{E}\colon\ \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, so ist die Basiswechselmatrix $_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_B$ gegeben durch

$$_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_B = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & \sqrt{19} & -1 \\ 3\sqrt{2} & \sqrt{19} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

die Inverse – da auch $\mathcal{E}$ eine ONB ist – hingegen durch

$$_B\mathrm{id}_{\mathcal{E}} = \left(_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_B\right)^\intercal = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{19} & \sqrt{19} & 0 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} A &= {_{\mathcal{E}}\mathrm{id}_B}\,{_B\varphi_B}\,{_B\mathrm{id}_{\mathcal{E}}} \\ &= \frac{1}{38} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & \sqrt{19} & -1 \\ 3\sqrt{2} & \sqrt{19} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{19} & \sqrt{19} & 0 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{19} & -1 \\ -3\sqrt{2} & \sqrt{19} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{19} & \sqrt{19} & 0 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 2 & 36 & 12 \\ 36 & 2 & -12 \\ 12 & -12 & 34 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 18 & 1 & -6 \\ 6 & -6 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 60. *Nullstellen von Polynomen*

Schreiben Sie die folgenden Polynome als Produkte von Linearfaktoren:

(a) $p(X) = X^2 + \mathrm{i}\,X + 6$ **(b)** $q(X) = X^3 + X - 10$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir nutzen zur Bestimmung der Nullstellen x_1 und x_2 die Mitternachtsformel* und erhalten :

$$x_{1/2} = \frac{-\mathrm{i} \pm \sqrt{\mathrm{i}^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-\mathrm{i} \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{-\mathrm{i} \pm 5\mathrm{i}}{2}$$

Entsprechend ist

$$p(X) = (X + 3\mathrm{i})(X - 2\mathrm{i})$$

(b) Die erste Nullstelle finden wir durch geschicktes Raten: $q(2) = 0$. Wir spalten den entsprechenden Linearfaktor mittels Polynomdivision ab:

$$\begin{array}{l}
(X^3 + 0X^2 + X - 10) \; : \; (X - 2) \; = \; X^2 + 2X + 5 \\
\underline{-(X^3 - 2X^2)} \\
\qquad 2X^2 + X \\
\qquad \underline{-(2X^2 - 4X)} \\
\qquad\qquad 5X - 10 \\
\qquad\qquad \underline{-(5X - 10)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Anwendung der Mitternachtsformel liefert

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 4\mathrm{i}}{2}$$

und somit

$$q(X) = (X - 2)(X + 1 - 2\mathrm{i})(X + 1 + 2\mathrm{i})\,.$$

*Falls Sie Skrupel haben: sehen Sie sich das Zusatzmaterial an in https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/Mitternachtsformel-komplex/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 61. *Eigenwerte*

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine komplexe Matrix.

(a) Sei λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass λ^k ein Eigenwert von A^k für $k \in \mathbb{N}$ ist.

(b) Sei A eine Matrix mit der Eigenschaft $A^m = 0$ für $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von A ist.

(c) Sei $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass A nicht invertierbar ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir erhalten mit vollständiger Induktion:

IA $k = 1$: $A^1 v = \lambda^1 v \quad \Leftrightarrow \quad Av = \lambda v$.

IH Für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt $A^k v = \lambda^k v$.

IS $k \to k+1$:

$$A^{k+1}v = A\left(A^k v\right) \overset{\text{IH}}{=} A\left(\lambda^k v\right) = \lambda^k (Av) = \lambda^k \lambda v = \lambda^{k+1} v.$$

(b) Wenn wir einen anderen EW $\lambda \neq 0$ von A hätten, dann wäre $\lambda^m \neq 0$ ein EW der Matrix A^m (siehe Teil **(a)**). Wir wissen aber, dass die Nullmatrix nur den Eigenwert 0 hat. Deshalb kann es keinen EW $\lambda \neq 0$ von A geben.

(c) Sei $\lambda = 0$ ein EW der Matrix A. Dann ist das Produkt der EW auch gleich 0. Dieses Produkt ist aber gleich $\det(A)$. Deshalb ist A nicht invertierbar.

Aufgabe H 62. *Parameterabhängige Matrix*

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte der Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 1 \\ -1 & t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen das charakteristische Polynom durch Entwicklung nach der letzten Zeile und erhalten

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \det(A_t - \lambda E_4) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -t & 0 & 1 \\ -1 & t-\lambda & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & t \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$= (-1)^{4+4} \cdot (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -t & 0 \\ -1 & t-\lambda & t \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Nochmal entwickeln nach der untersten Zeile liefert

$$\begin{aligned}\chi_{A_t}(\lambda) = (1-\lambda)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -t \\ -1 & t-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)^2((1-\lambda)(t-\lambda)-t) \\ &= (1-\lambda)^2\lambda(\lambda-(1+t)).\end{aligned}$$

Es sind also drei interessante Fälle zu unterscheiden:

- Ist $t = 0$, so gibt es die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ mit algebraischen Vielfachheiten $e_{\lambda_1} = 1$ und $e_{\lambda_2} = 3$. Wegen $1 \leqq d_{\lambda_1} \leqq e_{\lambda_1} = 1$ (siehe Lemma 5.3.4 im Skript) folgt $d_{\lambda_1} = 1$. Für d_{λ_2} berechnen wir den Rang der Matrix $(A_0 - \mathrm{E}_4)$: Es ist

$$\mathrm{Rg}\,(A_0 - \mathrm{E}_4) = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

  und daher $d_{\lambda_2} = 4 - 2 = 2$.

- Ist $t = -1$, so gibt es die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ mit algebraischen Vielfachheiten $e_{\lambda_1} = 2$ und $e_{\lambda_2} = 2$. Für d_{λ_1} berechnen wir den Rang der Matrix A_{-1}:

$$\begin{aligned}\mathrm{Rg}\,(A_{-1}) = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\end{aligned}$$

  und daher $d_{\lambda_1} = 4-3 = 1$. Für d_{λ_2} berechnen wir den Rang der Matrix $\mathrm{Rg}\,(A_{-1} - \mathrm{E}_4)$:

$$\mathrm{Rg}\,(A_{-1} - \mathrm{E}_4) = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

  und daher $d_{\lambda_2} = 4 - 3 = 1$.

- Ist $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0, -1\}$ so gibt es die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 1 + t$ mit algebraischen Vielfachheiten $e_{\lambda_1} = 1$, $e_{\lambda_2} = 2$ und $e_{\lambda_3} = 1$. Wie im ersten Fall folgen $d_{\lambda_1} = 1$ und $d_{\lambda_3} = 1$. Für d_{λ_2} berechnen wir den Rang der Matrix $\mathrm{Rg}\,(A_t - \mathrm{E}_4)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Rg}\,(A_t - \mathrm{E}_4) = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & -t & 0 & 1 \\ -1 & t-1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ -1 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\end{aligned}$$

  und daher $d_{\lambda_2} = 4 - 3 = 1$.

Aufgabe H 63. *Koordinatensysteme*

Wir verwenden das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^3$ und betrachten die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Q_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(a) Überprüfen Sie, ob $\mathbb{F} = (P; \overrightarrow{PQ_1}, \overrightarrow{PQ_2}, \overrightarrow{PQ_3})$ ein affines Koordinatensystem ist.

(b) Berechnen Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(c) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die affine Abbildung mit ${}_{\mathbb{E}}(\alpha(x)) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Matrix B und den Vektor v so, dass ${}_{\mathbb{F}}(\alpha(x)) = B \cdot {}_{\mathbb{F}}x + v$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\overrightarrow{PQ_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{PQ_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{PQ_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir müssen nun prüfen, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x - z &= 0, \\ y - z &= 0. \end{aligned}$$

Das gibt $x = y = z$ und $2x = 0$, also ist $x = y = z = 0$ und die drei Vektoren sind linear unabhängig.

(b) Weil $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem ist, haben wir

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ müssen wir $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$ berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

also ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = w$ dann und nur dann, wenn

$$v = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also ist

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \left(v - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} v - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten deswegen

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon v \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir haben

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbb{F}}\alpha(x) &= {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}\alpha(x)) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}\alpha(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ferner gilt ${}_{\mathbb{E}}x = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also ist

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbb{F}}\alpha(x) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{F}}x + \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten folglich $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 3 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe H 64. *Diagonalisierung und Matrixpotenzen*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristischen Polynome $\chi_A(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

(c) Geben Sie eine invertierbare Matrix S so an, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist und bestimmen Sie $(S^{-1}AS)^4$ sowie A^4.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Allgemein gilt $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \mathrm{E}_n)$ für jede $n \times n$ Matrix M, also

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$$
$$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = -(\lambda - 1)(\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i})\,.$$

(b) Damit sind die Eigenwerte von A gegeben durch $1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}$. Wir berechnen die Eigenräume. Für $\lambda = 1$ erhalten wir:

$$A - \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} Z_3: \\ -Z_1: \\ Z_2: \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow Z_2 - Z_1: \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Eigenraum zum EW 1 ist also

$$V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Für die Eigenräume zu $-\mathrm{i}$ und i genügt es, einen Eigenvektor v zu $-\mathrm{i}$ zu berechnen, ein entsprechender Eigenvektor zu i ist dann durch $\bar{v}$ gegeben. Es gilt

$$A + \mathrm{i}\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 & -1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} Z_3: \\ 1/2(1-\mathrm{i})Z_2: \\ \mathrm{i}Z_1 + Z_3: \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hieraus erhalten wir die Eigenräume

$$V(-\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(\mathrm{i}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(c) Aus der letzten Teilaufgabe erhalten wir

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Damit ist $(S^{-1}AS)^4 = \mathrm{E}_3$ und $A^4 = S(S^{-1}A^4S)S^{-1} = S(S^{-1}AS)^4S^{-1} = S\mathrm{E}_3S^{-1} = \mathrm{E}_3$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 65. *Komplexe Zahlen und Summe*

Es seien $z_1 = \frac{\mathrm{i}}{3}$ und $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

Bestimmen Sie: **(a)** $\sum_{k=0}^{5} z_1^k$. **(b)** $\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\sqrt{k}}{z_2^2 + 2k} - \frac{\sqrt{k+1}}{2 + z_2^2 + 2k} \right)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Allgemein gilt:

$$(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^k - z^{k+1} = 1 - z^{n+1},$$

daher

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{5} z_1^k &= \frac{1-z_1^6}{1-z_1} = \frac{3^{-6}}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3^6 - \mathrm{i}^6}{3-\mathrm{i}} = \frac{1}{3^5} \cdot \frac{\overbrace{3^6+1}^{=729+1}}{3-\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{3^5} \cdot \frac{3 \cdot 730 + 730\mathrm{i}}{10} = \frac{73}{81} + \frac{73}{243}\mathrm{i}\end{aligned}$$

(b) Teleskopsumme:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\sqrt{k}}{z_2^2 + 2k} - \frac{\sqrt{k+1}}{z_2^2 + 2k + 2} \right) &= \frac{\sqrt{1}}{z_2^2 + 2} - \frac{\sqrt{3+1}}{z_2^2 + 2(3+1)} \\ &= \frac{1}{2-2\mathrm{i}} - \frac{2}{8-2\mathrm{i}} = \frac{2+2\mathrm{i}}{8} + \frac{4+\mathrm{i}}{17} \\ &= \frac{17+17\mathrm{i}}{68} - \frac{16+4\mathrm{i}}{68} = \frac{1}{68} + \frac{13}{68}\mathrm{i}\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 66. *Grobeinteilung von Quadriken*

Geben Sie zu den folgenden Quadriken jeweils die erweiterte Matrix an und bestimmen Sie ihren Typ (kegelige Quadrik, Mittelpunktsquadrik oder parabolische Quadrik):

(a) $Q_\alpha := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0\right\}$,

(b) $Q_\beta := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 + 2 = 0\right\}$,

(c) $Q_\gamma := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 2x_1 + 6x_2 + 1 = 0\right\}$,

(d) $Q_\delta := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x_1^2 + 12x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 6x_3 + 1 = 0\right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei $\operatorname{Rg} A = 2$ gilt. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

erhalten wir wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = 3.$$

Damit ist die gegebene Quadrik eine Mittelpunktsquadrik.

(b) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

schreiben. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

erhalten wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = 3.$$

Damit ist wegen $\operatorname{Rg} A = 1$ die gegebene Quadrik eine parabolische Quadrik.

(c) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{Rg} A = 1$ schreiben. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

erhalten wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1.$$

Damit ist die gegebene Quadrik eine kegelige Quadrik.

(d) Die Quadrik lässt sich in der Form $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{Rg} A = 3$ (wegen $\det A = -40$) schreiben. Für den Rang der erweiterten Matrix

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

erhalten wir

$$\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = 3.$$

Damit ist die gegebene Quadrik eine kegelige Quadrik.

Aufgabe H 67. *Eigenwerte, Definitheit*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte in Abhängigkeit von α.

(c) Für welche Werte des Parameters α ist $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A?

(d) Ist die quadratische Form $q_{A_3} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^\intercal A_3 x$ positiv definit, negativ definit oder indefinit? Geben Sie (in den letzten beiden Fällen) einen Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ an mit $q_{A_3}(y) < 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Eigenwerte von Matrix A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned}\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ \alpha & -\lambda\end{pmatrix} &= -\lambda(2-\lambda) - 3\alpha. \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3\alpha\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1+3\alpha},\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{1+3\alpha}.$$

(b) Für $\alpha \neq -\frac{1}{3}$ ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und die algebraische und damit einhergehend die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte gleich 1.

Für $\alpha = -\frac{1}{3}$ gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Die algebraische Vielfachheit ist also 2. Der Eigenraum ist gleich dem Lösungsraum des homogenen LGS

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{array}\right).$$

Wir addieren $\frac{1}{3}$ mal die erste Zeile zur zweiten Zeile $(Z_2 + \frac{1}{3}Z_1)$:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der Eigenraum ist also gleich

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Die geometrische Vielfachheit ist in diesem Fall also 1.

(c) v ist ein Eigenvektor von der Matrix A, wenn gilt:

$$Av = \lambda v.$$

Weil

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3\alpha \end{pmatrix}$$

ist, ist $\lambda = 3$ der einzige mögliche Eigenwert. 3α ist also gleich 3. Somit ist v ein Eigenvektor von der Matrix A genau für $\alpha = 1$.

(d) Die Eigenwerte von A_3 sind gleich $1 + \sqrt{10} > 0$ und $1 - \sqrt{10} < 0$. Die Quadrik ist also indefinit. Für $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt

$$q_{A_3}(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4.$$

Aufgabe H 68. *Hauptachsentransformation*
Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2\sqrt{2}\,x_1 + 2\sqrt{2}\,x_3 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem, bezüglich dem Q euklidische Normalform besitzt und geben Sie die zugehörige euklidische Normalform an.

Lösungshinweise hierzu: Zunächst formulieren wir die Quadrikgleichung in Matrixschreibweise $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad c = 0.$$

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von A. Es ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(4-\lambda) + 2 + 2 - 4(4-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) + 4 + 4\lambda - 16 - 2 + 2\lambda \\ &= -10 - 3\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 \\ &= (-1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte von A gegeben durch

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 5.$$

Wir bestimmen die zugehörigen Eigenräume:

- $V(-1)$: Es ist

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{Z3-Z1;\, Z1-2\cdot Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc||c} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{Z2+\frac{5}{9}Z1;\, -\frac{1}{9}\cdot Z1;\, Z2\leftrightarrow Z1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Damit ist $V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- $V(2)$: Es ist

$$\left[\begin{array}{ccc||c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{Z1+Z2;\, Z3-2\cdot Z2;\, Z2\leftrightarrow Z1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{Z2+Z3;\, Z1-\frac{2}{3}\cdot Z2,\, \frac{1}{3}\cdot Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Damit ist $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- $V(5)$: Es ist

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{Z1+4\cdot Z2;\, Z3-2\cdot Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{Z3+Z1;\, -\frac{1}{3}Z1;\, Z1\leftrightarrow Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{Z1+Z2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Damit ist $V(5) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren ist damit zum Beispiel gegeben durch

$$B\colon \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir nun $x = Ty$ mit $T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$, so lautet die Quadrikgleichung bezüglich y

$$\begin{aligned} & -y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2 + 2\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}y_2 + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}y_3 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -y_1^2 + 2\left(y_2^2 + 2\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{8}{3}\right) - 2\cdot\frac{8}{3} + 5\left(y_3^2 + 2\cdot\frac{2}{5\sqrt{3}}y_3 + \frac{4}{75}\right) - 5\cdot\frac{4}{75} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -y_1^2 + 2\left(y_2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2 + 5\left(y_3 + \frac{2}{5\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{28}{5} = 0. \end{aligned}$$

Mit $z = y + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{5\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ gilt dann

$$-z_1^2 + 2z_2^2 + 5z_3^2 - \frac{28}{5} = 0,$$

woraus sich die euklidische Normalform

$$\frac{5}{28}z_1^2 - \frac{5}{14}z_2^2 - \frac{25}{28}z_3^2 + 1 = 0$$

ergibt. Da $x = Ty = T\left(z - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{5\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right) = Tz - \frac{\sqrt{2}}{15}\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}$, ist das zugehörige kartesische Koordinatensystem gegeben durch

$$\mathbb{F} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{15}\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe H 69. *Euklidische Normalform*

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_3 + 1 = 0\}\,.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung dieser Quadrikgleichung an.

(b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Matrixbeschreibung von Q ist:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\} \text{ mit}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad c = 1.$$

(b) Zuerst diagonalisieren wir A. Hierzu bestimmen wir die Eigenwerte und Eigenräume von A.

$$\chi_A = \det(A - \lambda E_3) = (-1-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$$
$$= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

Die Eigenwerte sind $-1, 2, 4$, jeweils mit algebraischer und somit auch geometrischer Vielfachheit 1. Berechnung der zugehörigen Eigenräume ergibt:

$$(A+E_3)x = 0: \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]. \to \quad \begin{array}{r} \\ \\ 4Z_3 + Z_3: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{array}\right].$$

Also gilt $V(-1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$$(A-2E_3)x = 0: \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]. \to \quad \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Also gilt $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$$(A-4E_3)x = 0: \quad \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]. \to \quad \begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_1: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Also gilt $V(4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Normieren wir die erhaltenen Eigenvektoren, um die folgende Orthonormalbasis zu bekommen: $f_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Entsprechend gilt für $F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$:

$$\tilde{A} = F^\intercal A F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a} = F^\intercal a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im Koordinatensystem $\mathbb{F} = (0; f_1, f_2, f_3)$ hat die Quadrik Q die Gleichung

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y^\intercal \tilde{A} y + 2\tilde{a}^\intercal y + c = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid -y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_2 + 1 = 0\}.$$

Nun verschieben wir gegen die linearen Terme:

$$\begin{aligned} 0 &= -y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_2 + 1 = \\ &= -y_1^2 + 2(y_2^2 + 2y_2 + 1 - 1) + 4y_3^2 + 1 \\ &= -y_1^2 + 2(y_2 + 1)^2 + 4y_3^2 - 1 \\ &z_1 := y_1, z_2 := y_2 - (-1), z_3 := y_3 \\ &= -z_1^2 + 2z_2^2 + 4z_3^2 - 1 \end{aligned}$$

Der neue Ursprung P hat also die $\mathbb{F}$-Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, seine Standardkoordinaten erhält man als ${}_{\mathbb{E}}P = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

In dem Koordinatensystem $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ hat ist Quadrik Q durch die Gleichung $z_1^2 - 2z_2^2 - 4z_3^2 + 1 = 0$ gegeben. Das ist ein einschaliges Hyperboloid.

Frischhaltebox

Aufgabe H 70. *Hessesche Normalform*

Sei E die Ebene durch die Punkte $P_1 = (0, 0, 3)$, $P_2 = (0, 3, 0)$, $P_3 = (1, 1, 0)$.
Berechnen Sie die Hessesche Normalform von E.

Lösungshinweise hierzu: Die Ebene kann beschrieben werden als

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Vektor $n = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ steht orthogonal auf E (er ist das Vektorprodukt der Richtungsvektoren; ein orthogonaler Vektor kann aber auch durch das Lösen eines LGS bestimmt werden). Wir erhalten somit durch Normierung

$$\eta = -\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die Hessesche Normalform von E lautet wegen $\langle P_1 \,|\, \eta \rangle = -\frac{3}{\sqrt{6}}$ folglich

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}.$$