Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1.

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} j! + \pi a^j}{a^j \cdot j!}$$

gegeben.

(a) Untersuchen Sie die Reihe in Abhängigkeit von dem Parameter a auf Konvergenz und Divergenz.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} j! + \pi a^j}{a^j \cdot j!} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} j!}{a^j \cdot j!} + \frac{\pi a^j}{a^j \cdot j!} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \left(\frac{1}{a}\right)^j + \pi \frac{1}{j!} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} -\left(-\frac{1}{a}\right)^j + \pi \frac{1}{j!} \,.
\end{aligned}$$

Die Glieder der zu untersuchenden Reihe sind also Summe von Gliedern einer geometrischen Reihe und einer Exponentialreihe.

Falls $|a| > 1$, so ist $\left|-\frac{1}{a}\right| < 1$ und die geometrische Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} -(-\frac{1}{a})^j$ konvergiert, ebenso die Exponentialreihe $\sum_{j=1}^{\infty} \pi \frac{1}{j!}$. Nach Satz 1.9.3 aus der Vorlesung über Grenzwerte von Reihen gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} -\left(-\frac{1}{a}\right)^j + \pi \frac{1}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} -\left(-\frac{1}{a}\right)^j + \sum_{j=1}^{\infty} \pi \frac{1}{j!}$$

und die zu untersuchende Reihe ist insbesondere konvergent.

Gilt hingegen $|a| < 1$ so bleibt der Term $-(-\frac{1}{a})^j$ betragsmäßig „groß", hingegen strebt $\pi \frac{1}{j!}$ für $j \to \infty$ gegen 0. Die Folge $\left(-(-\frac{1}{a})^j + \pi \frac{1}{j!}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ sollte also keine Nullfolge sein, womit man mit Lemma 1.9.1 der Vorlesung schließen könnte, dass die zu untersuchende Reihe nicht konvergiert.

Diese Vermutung ist jetzt zu beweisen.

Untersuchen wir zunächst den Fall $0 < a \leqq 1$. Für gerade j gilt:

$$(-1)^{j+1} \left(\frac{1}{a}\right)^j + \pi \frac{1}{j!} = -\left(\frac{1}{a}\right)^j + \pi \frac{1}{j!} < -\left(\frac{1}{a}\right)^j \leqq -1 \,,$$

das heißt, die Folge der Glieder der zu untersuchenden Reihe konvergiert nicht gegen 0, da sie eine Teilfolge besitzt, die nicht gegen 0 konvergiert. Die Reihe ist also nach Lemma 1.9.1 der Vorlesung nicht konvergent.

Sei nun $-1 \leqq a < 0$. Dann ist $a = -|a|$, weiter $0 < |a| \leqq 1$ sowie $\frac{1}{|a|} \geqq 1$. Damit gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} -\left(-\frac{1}{a}\right)^j + \pi\frac{1}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} -\left(\frac{1}{|a|}\right)^j + \pi\frac{1}{j!}\,.$$

Die Folge $\left(\pi\frac{1}{j!}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, das heißt es gilt zum Beispiel für $\frac{1}{2}$:

$$\exists\, j_0 \quad \forall\, j \geqq j_0\colon \pi\frac{1}{j!} < \frac{1}{2}$$

und damit

$$\forall\, j \geqq j_0\colon\ -\left(\frac{1}{|a|}\right)^j + \pi\frac{1}{j!} < -\left(\frac{1}{|a|}\right)^j + \frac{1}{2} \leqq -\left(1^j\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Die Folge der Glieder der zu untersuchenden Reihe ist also keine Nullfolge, die Reihe ist demnach wegen Lemma 1.9.1 der Vorlesung nicht konvergent.

(b) Berechnen Sie im Fall, dass die Reihe konvergiert, auch den Wert der Reihe.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt im Konvergenzfall mit Hilfe der Grenzwersätze 1.9.3 und dem Wissen über geometrische Reihen 1.8.4:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} -\left(-\frac{1}{a}\right)^j &= -\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{a}\right)^j = -\left(-\sum_{j=0}^{0}\left(-\frac{1}{a}\right)^j + \sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{a}\right)^j\right)\\ &= -\left(-1 + \frac{1}{1+\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{a+1}\,.\end{aligned}$$

Mit Bemerkung 1.8.7 ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\pi\frac{1}{j!} &= \pi\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\\ &= \pi\left(-\sum_{j=0}^{0}\frac{1}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\right) = \pi(-1+e)\,.\end{aligned}$$

Insgesamt berechnet sich der Wert der Reihe zu

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}j! + \pi a^j}{a^j \cdot j!} = \frac{1}{a+1} + \pi(e-1)\,.$$

Aufgabe H 2. *Konvergenzkriterien*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{3}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty}\frac{j+2}{j^2-4}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium 1.9.5, denn $(|a_j|)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine monotone Nullfolge. Es gilt:

$$|a_j|=\left|(-1)^j\left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{3}}\right|=\left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{3}},\quad |a_j|>|a_{j+1}|,\quad \lim_{j\to\infty}|a_j|=\lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{3}}=0.$$

(b) Die Reihe konvergiert, denn die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergieren nach dem Leibniz-Kriterium 1.9.5 bzw. dem Wurzel-Kriterium 1.9.16 und damit auch deren Summe nach Satz 1.9.3.

(c) Die Reihe konvergiert nach dem Minorantenkriterium nicht, denn es gilt

$$\frac{j+2}{j^2-4}=\frac{1}{j-2}>\frac{1}{j}.$$

Die harmonische Reihe ist also eine divergente Minorante.

(d) Um zu zeigen, dass diese Reihe konvergiert, wird das Quotientenkriterium 1.9.13 verwendet. Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}=\frac{3}{n+1}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0<1.$$

Damit konvergiert diese Reihe.

Aufgabe H 3. *Grenzwerte von Reihen*

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4}{3^{k-1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k+1)\ln(k)}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^k}{(k+1)!}$

Hinweis:

- $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es handelt sich um eine geometrische Reihe. Um Beispiel 1.8.4 aus der Vorlesung verwenden zu können, machen wir eine Indexverschiebung. Es folgt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{3^{k-1}} = 4\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^{(j+2)-1}} = \frac{4}{3}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{4}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2.$$

(b) Formuliert man diese Reihe um, so erhält man

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k+1)\ln(k)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k+1)\ln(k)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right).$$

Es handelt sich also um eine sogenannte Teleskopsumme. Damit ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k+1)\ln(k)} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

(c) Bei dieser Reihe benutzt man den Hinweis und erhält die folgenden Teleskopsummen:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(d) Diese Reihe setzt sich aus zwei bekannten Reihentypen zusammen, man erhält

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{(k+1)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \left(-2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k!}\right) - \left(-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \\
&= -1 + 2e - e^{-1}.
\end{aligned}$$

Auch hier war eine Indexverschiebung nötig um den Hinweis einsetzen zu können.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 4.

Es sind $f\colon M \to \mathbb{R}$ und $g\colon M \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $f + g\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) + g(x)$ ist stetig.

(b) $f \cdot g\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ist stetig.

Zusatz: Zusätzlich gelte $g(M) \subseteqq M$. Zeigen Sie mit Hilfe konvergenter Folgen: Die Komposition $f \circ g\colon M \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(g(x))$ ist stetig.

Lösungshinweise hierzu: Nach 1.11.10 der Vorlesung gilt für eine Funktion f:

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

Insbesondere gilt dann $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. Weiter stellen wir fest, dass die Grenzwertsätze für Funktionen 1.12.1 auch mit Grenzübergängen $\lim_{x \to x_0 - 0}$ gelten. Mit Aussage 1.12.2 erhalten wir zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0 - 0} (f(x) + g(x)) &\overset{1.12.2}{=} \lim_{t \to x_0 + 0} (f(2x_0 - t) + g(2x_0 - t)) \\
&\overset{1.12.1}{=} \lim_{t \to x_0 + 0} f(2x_0 - t) + \lim_{t \to x_0 + 0} g(2x_0 - t) \\
&\overset{1.12.2}{=} \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 - 0} g(x)
\end{aligned}$$

Es seien f und g als stetig vorausgesetzt.

(a) Es gilt für eine beliebige Stelle $x_0 \in M$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0 + 0} (f + g)(x) &= \lim_{x \to x_0 + 0} (f(x) + g(x)) \\
&\overset{1.12.2}{=} \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 + 0} g(x) \\
&\overset{f,g \text{ stetig}}{=} \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 - 0} g(x) \\
&= \lim_{x \to x_0 - 0} (f(x) + g(x)) \\
&= \lim_{x \to x_0 - 0} (f + g)(x)\,,
\end{aligned}$$

also ist $f + g$ eine stetige Funktion, da in jeder Stelle $x_0 \in M$ rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert übereinstimmen.

(b) Analog gilt für eine beliebige Stelle $x_0 \in M$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0+0}(f\cdot g)(x) &= \lim_{x\to x_0+0}(f(x)\cdot g(x)) \\
&\overset{1.12.2}{=} \lim_{x\to x_0+0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0+0} g(x) \\
&\overset{f,g\ \text{stetig}}{=} \lim_{x\to x_0-0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0-0} g(x) \\
&= \lim_{x\to x_0-0}(f(x)\cdot g(x)) \\
&= \lim_{x\to x_0-0}(f\cdot g)(x)\,,
\end{aligned}
$$

also ist $f\cdot g$ eine stetige Funktion, da in jeder Stelle $x_0 \in M$ rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert übereinstimmen.

zum Zusatz: Funktionen f, g sind genau dann stetig, wenn für beliebige konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im jeweiligen Definitionsbereich gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(y_n) &= f(\lim_{n\to\infty} y_n) \\
\lim_{n\to\infty} g(x_n) &= g(\lim_{n\to\infty} x_n)\,.
\end{aligned}
$$

Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge im Definitionsbereich von g, dann ist wegen der Stetigkeit von g die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n := g(x_n) \in M$ ebenfalls konvergent. Zu zeigen ist $\lim_{n\to\infty} f\circ g(x_n) = f\circ g(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
f\circ g(\lim_{n\to\infty} x_n) &= f(g(\lim_{n\to\infty} x_n)) = f(\lim_{n\to\infty} g(x_n)) \\
&= f(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f\circ g(\lim_{n\to\infty} x_n)\,,
\end{aligned}
$$

das heißt $f\circ g$ ist stetig.

Aufgabe H 5. *Umkehrabbildung*

Gegeben seien die folgenden Funktionen

$$
f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x}{x^2-1}, \qquad g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{2x} + \sqrt{\frac{1}{4x^2}+1}.
$$

(a) Berechnen Sie $f(g(x))$.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$
f(g(x)) = \frac{\frac{1}{2x} + \sqrt{\frac{1}{4x^2}+1}}{\left(\frac{1}{2x} + \sqrt{\frac{1}{4x^2}+1}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2x} + \sqrt{\frac{1}{4x^2}+1}}{\frac{2}{2x}\left(\frac{1}{2x} + \sqrt{\frac{1}{4x^2}+1}\right) + 1 - 1} = x.
$$

(b) Ist g auf Grund von (a) die Inverse zu f? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungshinweise hierzu: Nein! Es reicht nicht zu zeigen, dass $f(g(x)) = x$ für alle $x \in D_g$ gilt. Wie in Definition 1.13.7 festgelegt, muss man ebenfalls überprüfen, dass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$ ist. Mit D_f bzw. D_g sind die Definitionsbereiche von f bzw. g gemeint.

(c) Untersuchen Sie unter welchen Einschränkungen g die Inverse zu f ist.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{x^2-1}{2x} + \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2} + 1} = \frac{x^2-1}{2x} + \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2} \\ &= \frac{x^2-1}{2x} + \frac{x^2+1}{2|x|}. \end{aligned}$$

Schränkt man den Definitionbereich von f auf $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > 0, x \neq 1\right\}$ ein, so ist g die Inverse zu f. Denn es gilt für $x > 0$

$$g(f(x)) = \frac{x^2-1}{2x} + \frac{x^2+1}{2|x|} = x.$$

Aufgabe H 6.

(a) Laut Vorlesung gilt $\sin(x) \leqq x$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche gilt: $|\sin(x)| \leqq |x|$.

(b) Sei $x \in \mathbb{C}$. Verwenden Sie die Identitäten $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ und $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ um zu zeigen, dass

$$\sin(x) \pm \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right).$$

Obige Identitäten müssen nicht bewiesen werden.

(c) Zeigen mit Hilfe der ε–δ-Bedingung die Stetigkeit von $\sin$, wobei $x \in \mathbb{R}$.

(d) Zeigen Sie die Stetigkeit von $\cos$.
Hinweis: Es gilt $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

(e) Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche $D \subsetneqq \mathbb{R}$ der Funktionen $\tan$ und $\cot$. Beweisen Sie die Stetigkeit dieser Funktionen in ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Offensichtlich gilt auch $|\sin(x)| \leqq |x|$ für $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.
Da $|\sin(x)| \leqq 1$ gilt $|\sin(x)| \leqq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $M = \mathbb{R}$.

(b) Durch äquivalentes Umformen erhält man:

$$
\begin{aligned}
& \sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{e^{ix}-e^{-ix}+e^{iy}-e^{-iy}}{2i} = 2\frac{e^{i\frac{x+y}{2}}-e^{-i\frac{x+y}{2}}}{2i}\cdot\frac{e^{i\frac{x-y}{2}}+e^{-i\frac{x-y}{2}}}{2i}\\
\Leftrightarrow\quad & e^{ix}-e^{-ix}+e^{iy}-e^{-iy} = e^{i\frac{2x}{2}}+e^{i\frac{2y}{2}}-e^{-i\frac{2y}{2}}-e^{-i\frac{2x}{2}}\\
\Leftrightarrow\quad & 0=0
\end{aligned}
$$

(c) Mit dem zuvor bewiesenen Additionstheorem gilt

$$
\begin{aligned}
|\sin(x)-\sin(y)| &\leqq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\cdot\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\\
&\leqq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\cdot 1\\
&\leqq 2\frac{|x-y|}{2}
\end{aligned}
$$

Für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ können wir zum Beispiel $\delta = \varepsilon$ wählen. Somit folgt aus $|x-y| < \delta$, dass $|\sin(x)-\sin(y)| < \varepsilon$.

(d) Da $\cos(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ und $\sin(x)$ stetig ist für alle $x \in \mathbb{R}$, ist auch $\cos(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(e) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Die Nullstellen von $\cos(x)$ sind $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Deshalb ist $\tan(x)$ als Verknüpfung von stetigen Funktionen stetig in $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Analoges gilt für $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ mit $\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Hinweis: Für die Bearbeitung einer Teilaufgabe ist es oftmals hilfreich, die Ergebnisse *anderer* Teilaufgaben zu berücksichtigen.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 7. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien und Entwicklungspunkte der folgenden Potenzreihen. Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot z^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5^{\frac{n}{2}} z^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(z + 2 - \sqrt{2}i)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}(z^2 - 2z + 1)\right)^n$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen den Konvergenzradius ρ mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Mit Koeffizienten $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ ergibt sich

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{1 + 2/n + 1/n^2}.$$

Wir berechnen

$$a = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + 2/n + 1/n^2} = 1.$$

Der Konvergenzradius ist $\rho = \dfrac{1}{a} = 1$. Die Reihe konvergiert für jedes z aus dem offenen Intervall $(-1, 1)$. Um den Konvergenzbereich festzustellen, müssen wir noch das Verhalten in den Randpunkten -1 und 1 untersuchen.

Für $z = -1$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}.$$

Diese Reihe ist eine alternierende Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert.

Für $z = 1$ dagegen ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Diese Reihe konvergiert auch (Beispiel 1.8.2 im Skript).

Daher konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ sowohl für $z = -1$ als auch für $z = 1$ und daher auf dem gesamten Intervall $[-1, 1]$. Der Konvergenzbereich lautet also $K = [-1, 1]$.

Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 0$.

(b) Wir berechnen

$$a = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

So gilt für den Konvergenzradius $\rho = 0$. Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 0$. Die Reihe konvergiert nur für den einen Punkt $z = 0$.

(c) Wir erkennen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!}$$

Das ist eine Exponentialreihe, in die nicht z, sondern z^2 eingesetzt wurde. Es gilt also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = e^{z^2}.$$

Da die Exponentialreihe aber für jedes beliebige $z \in \mathbb{C}$ konvergiert ($\rho = +\infty$), gibt das selbe auch für die gegebene Reihe. Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 0$.

(d) Wir berechnen den Konvergenzradius mit Hilfe des Wurzelkriteriums

$$a = \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^n} = \sqrt{5}.$$

Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.
Für $z = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ erhalten wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^{\frac{n}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^n}{5^{\frac{n}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

Diese alternierende Reihe divergiert.
Für $z = \frac{1}{\sqrt{5}}$ erhalten wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5^{\frac{n}{2}} \frac{1}{5^{\frac{n}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} 1.$$

Diese Reihe divergiert auch ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = 1$ ist keine Nullfolge).
Der Konvergenzbereich lautet also $K = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

(e) Wie in (b), erhalten wir $\rho = 0$. Entwicklungpunkt: $z_0 = -2 + \sqrt{2}i$.

(f) Wir substituieren $(z-1)^2 = u$ und erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}(z^2 - 2z + 1) \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} u \right)^n .$$

Den Konvergenzradius ρ_u für u berechnen wir mit Hilfe des Wurzelkriteriums

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}.$$

Damit erhalten wir $\rho_u = 4$ und $4 \geqq |u| = \left|(z-1)^2\right|$, also $|z-1| \leqq 2$. Folglich ist der Konvergenzradius $\rho = 2$, der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 1$.

Aufgabe H 8.

Formen Sie die folgenden Reihen so um, dass die Terme aus $\sin$, $\cos$ und $\exp$ Funktionen bestehen. Benutzen Sie die Rechenregeln für Potenzreihen aus 1.14.11.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n := \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{n+k+1}}{(n-k)!\,(2k+1)!} \right)$

(c) $2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{x^{4k-2}}{(4k-2)!} + \dfrac{x^{4k-1}}{(4k-1)!} \right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Um diese Reihe umzuformen, trennt man sie am besten in zwei Teile und betrachte sie für n gerade bzw. g ungerade getrennt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos(x) + \sin(x) \end{aligned}$$

(b) Um diese Reihe umzuformen benötigt man in 1.14.11 den 3. bzw. 4. Teil. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{n+k+1}}{(n-k)!\,(2k+1)!} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right) \\ &= \sin(x) \exp(x) \end{aligned}$$

(c) Zunächst erinnern wir uns an die Entwickungen von $\sin$, $\cos$ und $\exp$.

$$\begin{aligned}\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\end{aligned}$$

Bei der $\exp$-Funktion tritt jede nichtnegative ganzzahlige Potenz von x auf, bei $\sin$ nur die ungeraden und bei $\cos$ nur die geraden Potenzen. Ferner alterniert bei diesen beiden Funktionen das Vorzeichen. Wenn man die ersten paar Summanden der zu bearbeitenden Reihe aufschreibt stellt man fest, dass eine ähnliche Reihe wie bei der $\exp$-Funktion vorliegt. Der Unterschied besteht darin, dass immer zwei Summanden ausgelassen werden und die nächsten beiden verdoppelt werden:

$$\begin{aligned}&x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{360} + \frac{x^7}{2520} + \frac{x^{10}}{1814400} + \frac{x^{11}}{19958400} + \dots \\ &= 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^6}{6!} + 2\frac{x^7}{7!} + 2\frac{x^{10}}{10!} + 2\frac{x^{11}}{11!} + \dots\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der Reihenentwicklung von $\sin$ und $\cos$ ergibt, dass es sich bei der gesuchten Reihe um $e^x - \sin(x) - \cos(x)$ handelt.

Aufgabe H 9.

Gegeben sind folgende Identitäten:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$,
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^k \log_a x = 0$ für $a > 0$ und $k > 0$ sowie
- $e^{\ln x} = x$ für $x > 0$.

Diese müssen nicht gezeigt werden. Bestimmen Sie hiermit:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\sin(x)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zunächst wird der Term umgeformt.

$$x^{1/x} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

Mit dem ersten Hinweis erhält man $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x$. Die $\exp$-Funktion ist stetig. Damit erhält man

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$$

(b) Um diese Teilaufgabe zu lösen, formt man den Term $x^{\sin(x)}$ um zu

$$x^{\sin(x)} = e^{\ln x^{\sin(x)}} = e^{\sin(x)\ln(x)}.$$

Weiter gilt

$$\sin(x)\ln(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x$$

Mit dem zweiten und dem dritten Hinweis folgen

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0+0} x \ln x = 0$$

sowie

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} x \ln x = 1 \cdot 0 = 0$$

Da die Funktion x^a stetig ist erhalten wir

$$\lim_{x\to 0+0} x^{\sin(x)} = e^0 = 1$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 10.

(a) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der durch die folgenden Ausdrücke definierten Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \qquad g(x) = \ln\left(1-x^4\right)$$

$$h(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad k(x) = x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right)$$

(b) Berechnen die folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan x}{1-\cos x} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{e^x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+3x) - 2\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$$

Hinweis: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Ausdruck $\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ ist nicht definiert für $\sqrt{9-x^2} = 0$ und $9-x^2 < 0$. Wir erhalten deshalb als Definitionsbereich $D_f = (-3,3)$. Mit der Kettenregel (2.2.3) bestimmen wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{9-x^2}\right)' = -\frac{1}{9-x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}} \cdot \left(9-x^2\right)' \\ &= -\frac{1}{2\left(9-x^2\right)^{3/2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\left(9-x^2\right)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung erhalten wir mit der Quotientenregel (2.2.1):

$$\begin{aligned} f''(x) = \left(\frac{x}{\left(9-x^2\right)^{3/2}}\right)' &= \frac{x'\left(9-x^2\right)^{3/2} - x\left(\left(9-x^2\right)^{3/2}\right)'}{\left(\left(9-x^2\right)^{3/2}\right)^2} \\ &= \frac{\left(9-x^2\right)^{3/2} - x\cdot\frac{3}{2}\left(9-x^2\right)^{1/2}\cdot(-2x)}{\left(9-x^2\right)^3} \\ &= \left(9-x^2\right)^{-3/2} + 3x^2\left(9-x^2\right)^{-5/2} = \frac{9+2x^2}{\left(9-x^2\right)^{5/2}}\,. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $g(x) = (\ln(1-x^4))$ ist nicht definiert, wenn $1 - x^4 \leqq 0$. Als Definitionsbereich bleibt also das offene Intervall $D_g = (-1, 1)$. Mit der Kettenregel (2.2.3) erhalten wir

$$g'(x) = \left(\ln\left(1-x^4\right)\right)' = \frac{1}{1-x^4} \cdot \left(1-x^4\right)' = \frac{1}{1-x^4} \cdot \left(-4x^3\right) = \frac{4x^3}{x^4-1}.$$

Wir berechnen $g''(x)$ mit Hilfe der Quotientenregel

$$\begin{aligned} g''(x) = \left(\frac{4x^3}{x^4-1}\right)' &= \frac{\left(4x^3\right)' \cdot \left(x^4-1\right) - \left(4x^3\right) \cdot \left(x^4-1\right)'}{\left(x^4-1\right)^2} = \frac{12x^2\left(x^4-1\right) - 16x^6}{\left(x^4-1\right)^2} \\ &= \frac{-4x^6 - 12x^2}{(x^4-1)^2}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $h(x) = \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ist nicht definiert für $x = 0$; andererseits muss $-1 \leqq \frac{1}{x} \leqq 1$ gelten. Als maximalen Definitionsbereich von h erhält man deshalb

$$D_h = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Mit der Kettenregel erhalten wir die erste und zweite Ableitung von h:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \\ h''(x) &= \left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)' = -\frac{1}{\left(x\sqrt{x^2-1}\right)^2} \cdot \left(x\sqrt{x^2-1}\right)' \\ &= -\frac{1}{\left(x\sqrt{x^2-1}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x^2-1} + \frac{x}{2}\left(x^2-1\right)^{-1/2}\right) = \frac{1-2x^2}{x^2(x^2-1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Als Definitionsbereich für k können wir $D_k = \mathbb{R}^+$ zulassen. Mit der Produktregel (2.2.1) und der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} k'(x) &= x' \cdot (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + x\,(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))' \\ &= \sin(\ln x) - \cos(\ln x) + x\left(\cos(\ln x)\frac{1}{x} + \sin(\ln x)\frac{1}{x}\right) = 2\sin(\ln x), \\ k''(x) &= \frac{2\cos(\ln x)}{x}. \end{aligned}$$

(b) Mit der Regel von l'Hospital erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x\tan x}{1-\cos x} &\overset{,,\frac{0}{0}``}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(x\tan x)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x + \frac{x}{(\cos x)^2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cos x + x}{\sin x(\cos x)^2} \\ &\overset{,,\frac{0}{0}``}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x\cos x + x)'}{(\sin x(\cos x)^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^2 - (\sin x)^2 + 1}{(\cos x)^3 - 2(\sin x)^2\cos x} = 2. \end{aligned}$$

Wieder ergibt sich mit der Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan(3x))'}{(\tan(5x))'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{(\cos(3x))^2}}{\frac{5}{(\cos(5x))^2}} = \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(5x)}{\cos(3x)}\right)^2$$
$$\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-5\sin(5x)}{-3\sin(3x)}\right)^2 = \frac{5}{3}\,.$$

Es liegt bei $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{e^x}$ zwar der Fall „$\frac{\infty}{\infty}$“ vor. Allerdings liefert die Regel von l'Hospital keine Aussage, da egal wie oft man sie anwendet immer der Fall „$\frac{\infty}{\infty}$“ vorliegt. Mit Hilfe der Definition von $\cosh$ erhält man aber:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+e^{-2x}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Mit Hilfe der Regel von l'Hospital erreicht man zuerst:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+3x) - 2\sin^2 x}{1-e^{-x^2}} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6}{1+3x}\ln(1+3x) - 4\sin x\cos x}{2xe^{-x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}\cdot\frac{3}{(1+3x)e^{-x^2}} - \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\cos x}{e^{-x^2}}\,.$$

Die einzelnen Terme können weiter untersucht werden – gegebenenfalls wieder mit l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{1} = 3$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{(1+3x)e^{-x^2}} = 3$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{e^{-x^2}} = 2\,.$$

Folglich erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+3x) - 2\sin^2 x}{1-e^{-x^2}} = 3\cdot 3 - 1\cdot 2 = 7\,.$$

Aufgabe H 11.

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem sie jeweils explizit eine Formel für die n-te Ableitung bestimmen. Beweisen Sie Ihre Resultate mit vollständiger Induktion sowie den bekannten Differentiationsregeln.

(a) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \ln(x)$, wobei $x > 0$

(b) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n a^x$, wobei $a, x > 0$

(c) $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^n \frac{1}{a+bx}$, wobei $x \neq -\frac{a}{b}$

Hinweis: Die Identität $\exp(\ln x) = x$ für $x > 0$ könnte sich als nützlich erweisen.

Lösungshinweise hierzu: Man unterscheide folgende Schreibweisen:
x^n bedeutet „ x hoch n " , wohingegen mit $x^{(n)}$ die „ n-te Ableitung von x " gemeint ist.

(a) Wir wollen mit vollständiger Induktion zeigen, dass die folgende Gleichung gilt.

$$(\ln(x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

IA Für $n = 1$ gilt $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x} = \dfrac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x}$.

IV Die n-te Ableitung von $\ln$ lasse sich in der oben genannten Form darstellen.

IS Dann gilt für die $n+1$-te Ableitung:

$$\begin{aligned}\left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right)' &= \frac{0-(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1-1}(n+1-1)!}{x^{n+1}}\end{aligned}$$

(b) Wie in (a) wollen wir zeigen, dass die folgende Gleichung gilt.

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$$

IA Für $n = 1$ gilt $(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = \ln(a)e^{x\ln a} = a^x\left(\ln(a)\right)^1$.

IV Die n-te Ableitung von a^x lasse sich in der oben genannten Form darstellen.

IS Dann gilt für die $n+1$-te Ableitung

$$\left(a^x(\ln a)^n\right)' = \left(e^{x\ln a}(\ln a)^n\right)' = e^{x\ln a}(\ln a)^{n+1} = a^x(\ln a)^{n+1}$$

(c) Und noch einmal:

$$\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! b^n}{(a+bx)^{n+1}}$$

IA Für $n = 1$ gilt $\left(\dfrac{1}{a+bx}\right)' = \dfrac{-1\cdot b}{(a+bx)^2} = \dfrac{(-1)^1 1! b^1}{(a+bx)^{1+1}}$.

IV Die n-te Ableitung von $\frac{1}{a+bx}$ lasse sich in der oben genannten Form darstellen.

IS Dann gilt für die $n+1$-te Ableitung

$$\left(\frac{(-1)^n n! b^n}{(a+bx)^{n+1}}\right)' = \frac{0-(-1)^n n! b^n (n+1)(a+bx)^n b}{(a+bx)^{2n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)! b^{n+1}}{(a+bx)^{n+2}}$$

Aufgabe H 12.

In der folgenden Aufgabe beschränken wir uns auf die reellen Zahlen.

(a) Geben Sie an, wo $\cosh$ streng monoton wächst und wo $\cosh$ streng monoton fällt. Bestimmen Sie Maxima und Minima von $\cosh$. Untersuchen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty}\cosh(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\cosh(x)$. Skizzieren Sie den Graphen von $\cosh$.

Lösungshinweise hierzu: Da $e^x > 1$ für $x > 0$ folgt (die Ableitung von $\cosh$ wurde in Beispiel 2.2.12 bestimmt):

$$\cosh'(x) = \sinh(x) > 0 \text{ für } x > 0 \text{ und}$$
$$\cosh'(x) = \sinh(x) < 0 \text{ für } x < 0\,.$$

Dies zeigt mit der Charakterisierung monotoner Funktionen 2.4.8 aus der Vorlesung, dass $\cosh$ für beliebige Intervalle $[0, a]$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und damit auf $[0, +\infty)$ streng monoton wächst. Analog fällt $\cosh$ auf $(-\infty, 0]$ streng monoton.

Maxima und Minima können nach Lemma 2.4.2 aus der Vorlesung notwendigerweise nur an Stellen mit $0 = \cosh'(x) = \sinh(x)$ vorliegen. Es gilt also

$$0 = \cosh'(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

genau dann, wenn

$$e^x = e^{-x} \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(e^{-x}) \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0\,.$$

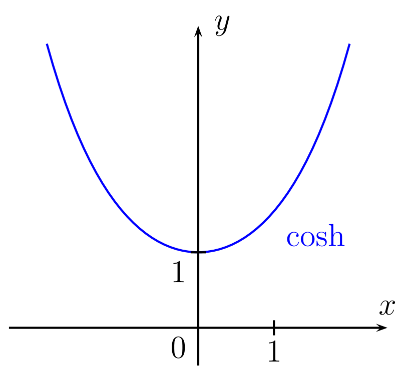
Die Stelle 0 ist also die einzige Stelle, bei der ein Extremum vorliegen kann. Da $\cosh$ für $x \leqq 0$ streng monoton fällt und für $x \geqq 0$ streng monoton wächst, liegt also bei $(0, 1)$ ein Minimum.

Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty}\cosh(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \geqq \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}e^x = +\infty$$

und analog

$$\lim_{x\to-\infty}\cosh(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \geqq \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{-x} = +\infty\,.$$

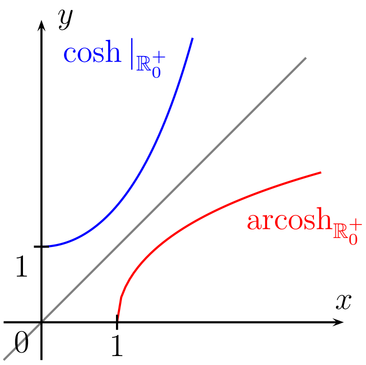


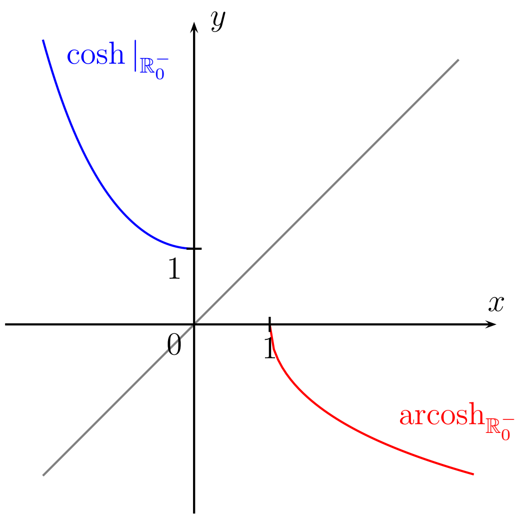
(b) Finden Sie (möglichst sinnvolle) Gebiete D, wo es möglich ist, eine Umkehrfunktion arcosh_D zum darauf eingeschränkten $\cosh|_D$ anzugeben. Geben Sie jeweils Definitions- und Wertebereiche dieser Umkehrfunktionen an und skizzieren Sie die Graphen der Umkehrfunktionen. Bestimmen Sie auch jeweils die Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\operatorname{arcosh}_D(x)$.

Lösungshinweise hierzu: Eine Umkehrfunktion von $\cosh|_D$ lässt sich nur für Gebiete D finden, wo $\cosh|_D$ injektiv ist. Die Monotonie einer Funktion ist dafür schon hinreichend. Mit (a) erhalten wir also: Für $\cosh|_{\mathbb{R}_0^+}$ und $\cosh|_{\mathbb{R}_0^-}$ lassen sich jeweils Umkehrfunktionen angeben. Da $\cosh$ gerade ist, das heißt $\cosh(x) = \cosh(-x)$, dürfen Gebiete D, auf denen $\cosh|_D$ eine Umkehrfunktion besitzen soll, nicht zusammenhängend sein, wenn sie sowohl negative als auch positive Werte enthalten. Wir wollen solche Gebiete deshalb nicht weiter betrachten.

Für $\cosh|_{\mathbb{R}_0^+}$ erhalten wir den Wertebereich $[1, +\infty)$ und offensichtlich den Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^+$, für $\cosh|_{\mathbb{R}_0^-}$ ebenfalls den Wertebereich $[1, +\infty)$ und wieder offensichtlich den Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^-$.

Damit folgt: Die Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh}_{\mathbb{R}_0^+}$ zu $\cosh|_{\mathbb{R}_0^+}$ besitzt den Definitionsbereich $[1, +\infty)$ und Wertebereich $\mathbb{R}_0^+$, die Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh}_{\mathbb{R}_0^-}$ zu $\cosh|_{\mathbb{R}_0^-}$ besitzt den Definitionsbereich $[1, +\infty)$ und Wertebereich $\mathbb{R}_0^-$





Zur Bestimmung der Ableitungen der Umkehrfunktionen beachten wir zunächst:

$$\begin{aligned}
& (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & (\sinh x)^2 = -1 + (\cosh x)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & |\sinh x| = \sqrt{-1 + (\cosh x)^2} \\
\Rightarrow \quad & \sinh x = \sqrt{-1 + (\cosh x)^2} \quad \text{für } x \geqq 0 \text{ und} \\
& \sinh x = -\sqrt{-1 + (\cosh x)^2} \quad \text{für } x \leqq 0.
\end{aligned}$$

Für $\operatorname{arcosh}_{\mathbb{R}_0^+}$ gilt damit $\operatorname{arcosh}_{\mathbb{R}_0^+}(y_0) = x_0 \in \mathbb{R}_0^+$. Das heißt für die Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} \operatorname{arcosh}_{\mathbb{R}_0^+} y\Big|_{y=y_0} &= \frac{1}{\cosh' x_0} = \frac{1}{\sinh x_0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-1+(\cosh x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1+y_0^2}}\,.\end{aligned}$$

Für $\operatorname{arcosh}_{\mathbb{R}_0^-}$ gilt $\operatorname{arcosh}_{\mathbb{R}_0^-}(y_0) = x_0 \in \mathbb{R}_0^-$ und wir erhalten für die Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} \operatorname{arcosh}_{\mathbb{R}_0^-} y\Big|_{y=y_0} &= \frac{1}{\cosh' x_0} = \frac{1}{\sinh x_0} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-1+(\cosh x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-1+y_0^2}}\,.\end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir also gesehen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \operatorname{arcosh}_{\mathbb{R}_0^+} x &= \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}} \quad \text{und} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \operatorname{arcosh}_{\mathbb{R}_0^-} x &= -\frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}\end{aligned}$$

(c) Sei nun $\operatorname{arcosh} = \left(\cosh|_{\mathbb{R}_0^+}\right)^{-1}$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \quad \text{für } x \geqq 1\end{aligned}$$

Hinweis: Satz 2.4.6 aus der Vorlesung kann dabei helfen.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt nach Beispiel 2.3.3

$$\operatorname{arsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

und wir berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \ln(x+\sqrt{x^2+1}) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.\end{aligned}$$

Nach Satz 2.4.6 gilt dann

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + c\,.$$

Setzt man in diese Identität $x = 0$ ein, so folgt

$$c = \ln\left(0 + \sqrt{0^2 + 1}\right) + c = \operatorname{arsinh}(0) = 0$$

und damit ist $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ bewiesen.
Für die zweite Identität verfährt man analog. Wir wissen aus (b)

$$\operatorname{arcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{-1 + x^2}}$$

und berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x\right) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,.
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.4.6 gilt

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + c\,.$$

Setzt man in diese Identität $x = 1$ ein, so folgt

$$c = \ln\left(1 + \sqrt{1^2 - 1}\right) + c = \operatorname{arcosh}(1) = 0$$

und damit ist $\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ bewiesen.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 13. *Kurvendiskussion*

Die Funktion f sei gegeben durch die Zuordnungsvorschrift $f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 1)$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f in $\mathbb{R}$ und untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit.

(b) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(d) Bestimmen Sie die Extremalstellen von f, sowie jeweils deren Typ und die zugehörigen Funktionswerte.

(e) Bestimmen Sie die Wendepunkte von f.

(f) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Definitionsbereich:
Wir erhalten

$$3x^2 + 2x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0\,,$$

und damit ist der Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

Die Funktion f ist auf dem gesammten Definitionsbereich stetig, da sie ein Verkettung von stetigen Funktionen ist. ($\ln$ ist stetig; Polynome sind stetig.)

(b) Symmetrien:
Wir erhalten $f(-x) = \ln(3x^2 - 2x + 1)$. Die Funktion f ist nicht gerade, weil $f(-x) \neq f(x)$, und f ist nicht ungerade, da $f(-x) \neq -f(x)$, deshalb ist f nicht symmetrisch.
Aber die verschobene Funktion $g(x) := f\left(x - \frac{1}{3}\right)$ ist gerade, denn

$$g(x) = f\left(x - \frac{1}{3}\right) = \ln\left(3x^2 + \frac{2}{3}\right) = \ln\left(3(-x)^2 + \frac{2}{3}\right) = g(-x).$$

(c) Nullstellen:

$$\ln(3x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = 0.$$

(d) Extremalstellen:

$$f'(x) = \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x + 1} = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3}.$$

Zugehörige Funktionswerte:

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

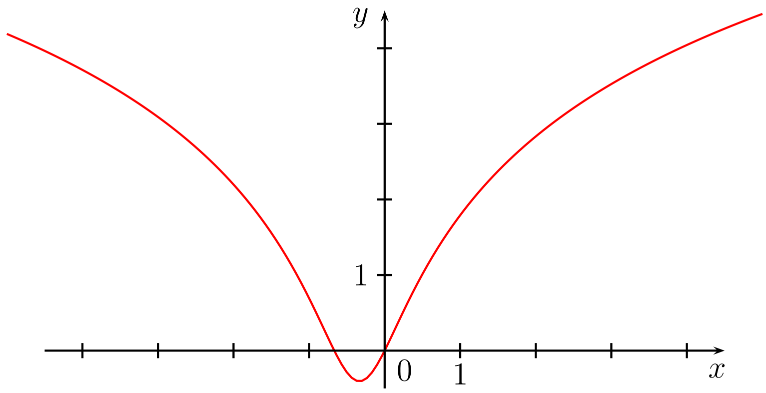
Extrema: $x_3 = -\dfrac{1}{3}$ ist ein globales Minimum, weil $f'(x) < 0$ für $x \in (-\infty, -\frac{1}{3})$ und $f'(x) > 0$ für $x \in (-\frac{1}{3}, +\infty)$.

(e) Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{-18\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{9}\right)}{\left(3x^2+2x+1\right)^2} = 0 \Rightarrow x_4 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad x_5 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Die Wendepunkte heißen $\left(-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}, \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ und $\left(-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}, \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)$, da $f''(x) < 0$ für $x \in (-\infty, x_4)$, $f'(x) > 0$ für $x \in (x_4, x_5)$ und $f''(x) < 0$ für $x \in (x_5, \infty)$ gilt (Definition 2.7.4).

(f)



Aufgabe H 14.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'' = f$$

mit den Anfangswerten $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Benutzen Sie dazu das folgende Vorgehen:

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihe von f' und f'' durch „gliedweises differenzieren“ (vgl. Bemerkung 2.2.6 und Satz 3.8.4).

Lösungshinweise hierzu: Durch gliedweises Differenzieren ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 und a_1 indem Sie die Anfangswerte in die Potenzreihe einsetzen.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0 \stackrel{!}{=} 0\,,$$

also $a_0 = 0$ und

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n 0^{n-1} = a_1 \stackrel{!}{=} 1\,,$$

also $a_1 = 1$

(c) Setzen Sie die Potenzreihe in die Differentialgleichung ein. Mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes für Potenzreihen 2.6.9 erhalten Sie aus der so gewonnenen Gleichung Bedingungen an die Koeffizienten a_n der Potenzreihe. Berechnen Sie a_n für kleine $n \in \mathbb{N}$ und versuchen Sie damit die Potenzreihe von f und somit f zu identifizieren.

Hinweis: Sie können versuchen, eine allgemeine Formel für a_n zu raten und diese dann mit vollständiger Induktion zu beweisen. Vergleichen Sie diese mit den Koeffizienten der Exponentialreihe. Wie sieht andererseits die Potenzreihe von $\sinh$ aus?

Lösungshinweise hierzu: Um später leichter argumentieren zu können, stellen wir zunächst einmal fest

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\,.$$

Dies wird nun zusammen mit der Potenzreihe von f in die Differentialgleichung $f'' = f$ eingesetzt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = f''(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Mit dem Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen 2.6.9 können wir also sagen, dass die beiden Potenzreihen in der Gleichung genau dann übereinstimmen, wenn die entsprechenden Koeffizienten übereinstimmen, also

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n$$

und umgeformt zu

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n$$

ergibt sich eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Potenzreihe von f. Diese benötigt zwar das „vorletzte“ Element der Folge, da wir aber beide Startwerte a_0 und

a_1 bereits ermittelt haben, liegt die Folge von Koeffizienten vollständig fest:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= 1 \\
a_2 &= \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot a_0 = \frac{1}{2!} \cdot 0 = 0 \\
a_3 &= \frac{1}{3 \cdot 2} a_1 = \frac{1}{3!} \\
a_4 &= \frac{1}{4 \cdot 3} \cdot a_2 = \frac{1}{4!} \cdot 0 = 0 \\
a_5 &= \frac{1}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{1}{5!} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Wir wollen mit vollständiger Induktion beweisen: Die durch die Startwerte $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und die Rekursionsvorschrift $a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n$ festgelegte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Koeffizienten stimmt mit der durch

$$b_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{n!}$$

festgelegten Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ überein.

IA Sei $n = 0$. Dann gilt $a_0 = 0 = b_0$.

IV Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gelte $a_j = b_j$ für alle $j \leqq n$.

IS Zu zeigen ist, dass $a_{n+1} = b_{n+1}$.
Hierbei muss der Fall $n = 0$ separat betrachtet werden, da dort die Rekursionsformel noch nicht greift. Wir sehen aber sofort ein: $a_{0+1} = a_1 = 1 = b_1 = b_{0+1}$.
Sei nun $n > 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_{(n-1)+2} \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{((n-1)+2) \cdot ((n-1)+1)} \cdot a_{n-1} = \frac{1}{(n+1) \cdot n} \cdot a_{n-1} \\
&\overset{**}{=} \frac{1}{(n+1) \cdot n} \cdot b_{n-1} \\
&= \frac{1}{(n+1) \cdot n} \cdot \frac{1 - (-1)^{n-1}}{2} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)!} = b_{n+1},
\end{aligned}$$

wobei $*$ für das Einsetzen der Rekursionformel von a_n und $**$ für **IV** steht.

Wir haben also gesehen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{n!} x^n .$$

Diese Potenzreihe wollen wir genauer untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n!} x^n - \frac{(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} x^n \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{1}{n!} (-1)^n x^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right) = \sinh(x) . \end{aligned}$$

Aufgabe H 15. *„Approximation der Wurzel"*
Es sei $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{x}$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, 1)$.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt:

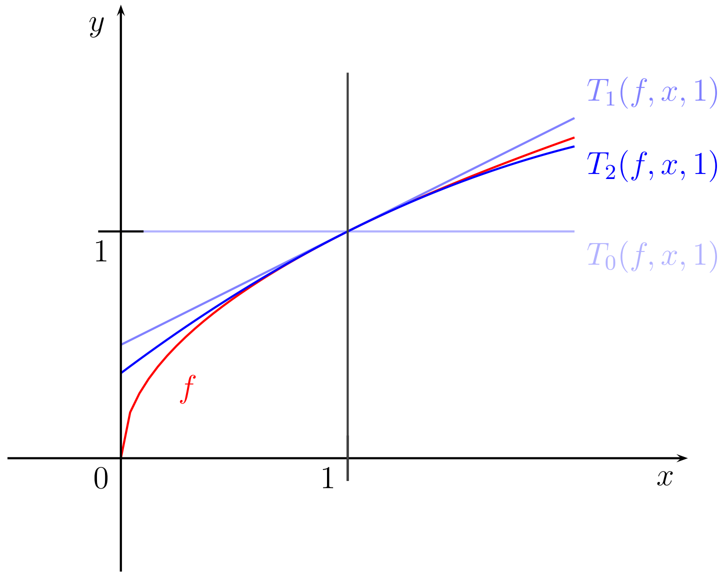
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}^3}$$

und damit

$$\begin{aligned} T_2(f, x, 1) &= \frac{\sqrt{1}}{0!} (x-1)^0 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}}}{1!} (x-1)^1 + \frac{-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}^3}}{2!} (x-1)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 . \end{aligned}$$

(b) Skizzieren Sie die Graphen von f sowie der Taylorpolynome $T_0(f, x, 1)$, $T_1(f, x, 1)$ und $T_2(f, x, 1)$.

Lösungshinweise hierzu:



(c) Geben Sie ein geeignetes Taylorpolynom an, um die Approximation „$\sqrt{x} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$", wenn „$x \approx 1$", das heißt für $x \in [1-\delta, 1+\delta]$ und $0 < \delta < 1$, zu rechtfertigen. Schätzen Sie für $\delta = \frac{1}{8}$ mit Hilfe eines geeigneten Restgliedes den Betrag des Fehler dieser Approximation ab.

Hinweis: Es hilft, den Fehler für $x \in [1, 1+\delta]$ und $x \in [1-\delta, 1]$ getrennt abzuschätzen.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$T_1(f,x,1) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

Da f im Intervall $[1-\delta, 1+\delta]$ die Bedingungen des Satzes von Taylor (2.6.1 aus der Vorlesung) erfüllt, ist $T_1(f,x,1)$ eine geeignete Approximation von f.

Das zugehörige Restglied nach Lagrange hat die Form

$$R_1(f,x,1) = \frac{-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\vartheta_{x,1}(x-1)}^3}}{2!}(x-1)^2 = -\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{1+\vartheta_{x,1}(x-1)}^3}(x-1)^2$$

mit $\vartheta_{x,1} \in [0,1)$ oder nach Bemerkung 2.6.3 2.

$$R_1(f,x,1) = -\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi_{x,1}}^3}(x-1)^2$$

mit $\xi_{x,1} \in (x,1)$ falls $x < 1$ und $\xi_{x,1} \in (1,x)$ falls $x > 1$.

Weiter gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\xi_{x,1}}^3} < \frac{1}{\sqrt{x}^3} \qquad \text{falls } x < 1$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\xi_{x,1}}^3} < \frac{1}{\sqrt{1}^3} = 1 \quad \text{falls } x > 1\,.$$

Damit erhalten wir für den Betrag des Fehlers

$$|R_1(f,x,1)| = \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi_{x,1}}^3}(x-1)^2 < \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{x}^3}(x-1)^2 \quad \text{falls } x < 1$$

und

$$|R_1(f,x,1)| = \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\xi_{x,1}}^3}(x-1)^2 < \frac{1}{8}(x-1)^2 \quad \text{falls } x > 1$$

Nun ist der Betrag des Fehlers für $x \in [1-\frac{1}{8}, 1+\frac{1}{8}]$ abzuschätzen. Für $x < 1$ ist $\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{x}^3}(x-1)^2$ monoton fallend und wir erhalten

$$\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{x}^3}(x-1)^2 < \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{8}}^3}(1-\frac{1}{8}-1)^2 = \frac{1}{\sqrt{56}^3} \approx 0{,}0024\,.$$

Für $x > 1$ ist $\frac{1}{8}(x-1)^2$ monoton steigend und es ergibt sich

$$\frac{1}{8}(x-1)^2 < \frac{1}{8}(1+\frac{1}{8}-1)^2 = \frac{1}{8^3} \approx 0{,}0020\,.$$

Insgesamt erhalten wir also die Abschätzung für den Fehler

$$|R_1(f,x,1)| < \frac{1}{\sqrt{56}^3} \text{ für } x \in [1-\frac{1}{8}, 1+\frac{1}{8}].$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 16.

Bestimmen Sie die Mengen von Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int (\sin(x))^2 + (\tan(x))^2 + (\cos(x))^2 \,\mathrm{d}\, x$

Lösungshinweise hierzu: Wir erinnern uns an folgendes, aus der Schule bekanntes, Additionstheorem: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$. Zweimaliges Anwenden ergibt

$$\begin{aligned}\int \sin(x)^2 + \tan(x)^2 + \cos(x)^2 \,\mathrm{d}\, x &= \int 1 + \tan(x)^2 \,\mathrm{d}\, x \\ &= \int \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} \,\mathrm{d}\, x = \int \frac{1}{\cos(x)^2} \,\mathrm{d}\, x \\ &= [\tan(x)]\,.\end{aligned}$$

Zu (e):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} \tan(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

(b) $\displaystyle\int (\sin(x) - \cos(x))^2 \,\mathrm{d}\, x$

Lösungshinweise hierzu: Wiederum mit dem oben genannten Additionstheorem erhalten wir

$$\begin{aligned}\int (\sin(x) - \cos(x))^2 \,\mathrm{d}\, x &= \int \sin(x)^2 - 2\sin(x)\cos(x) + \cos(x)^2 \,\mathrm{d}\, x \\ &= \int 1 - 2\sin(x)\cos(x) \,\mathrm{d}\, x.\end{aligned}$$

Wir substituieren beispielsweise $u(x) = \sin(x)$ und erhalten mit $u'(x) = \cos(x)$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\int (\sin(x) - \cos(x))^2 \,\mathrm{d}\, x &= \int 1 - 2\sin(x)\cos(x) \,\mathrm{d}\, x = [x] - 2\int u(x)u'(x) \,\mathrm{d}\, x \\ &= [x] - 2\int u \,\mathrm{d}\, u = [x] - 2\left[\frac{u^2}{2}\right] = \left[x - \sin(x)^2\right]\end{aligned}$$

Bei der Substituion $u = \cos(x)$ hätten wir $[x + \cos(x)^2]$ erhalten. Dies verdeutlicht, dass Stammfunktionen nur bis auf eine Konstante eindeutig sind.

Zu (e):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}(x - \sin(x)^2) = 1 - 2\sin(x)\cos(x)$$

Alternativ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x+\cos(x)^2) = 1 + 2\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = 1 - 2\cos(x)\sin(x)$$

Bevor man in Panik gerät sollte man also erst einmal eine Probe durchführen.

(c) $\displaystyle\int \frac{18x^5+9}{2x^6+6x+19}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

$$\int \frac{18x^5+9}{2x^6+6x+19}\,\mathrm{d}\,x = \frac{3}{2}\int \frac{6x^5+3}{x^6+3x+\frac{19}{2}}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{3}{2}\ln\left(x^6+3x+\frac{19}{2}\right)\right]$$

Da das Polynom im Nenner stets positiv ist, konnten wir uns das Betragszeichen bei der Logarithmusfunktion sparen.

Zu (e):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\frac{3}{2}\ln\left(x^6+3x+\frac{19}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\ln\left(x^6+3x+\frac{19}{2}\right) &= \frac{3}{2}\frac{6x^5+3}{x^6+3x+\frac{19}{2}}\\ &= \frac{18x^5+9}{2x^6+6x+19}\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\int \sqrt{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\sqrt{1-\sin(x)}\sqrt{1+\sin(x)}}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\sqrt{1-(\sin(x))^2}}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Es ist aber $(\sin(x))^2 + (\cos(x)^2) = 1$, das heißt $\sqrt{1-(\sin(x))^2} = |\cos(x)|$.
Im Fall $\cos(x) \geqq 0$, das heißt für $x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$, erhalten wir

$$\int \sqrt{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Dies lässt sich mit Substitution lösen. Setzt man nämlich $u(x) = 1+\sin(x)$, dann gilt $u'(x) = \cos(x)$ und es ergibt sich mit der Substitutionsregel 3.3.1

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,\mathrm{d}\,x = \int u'(x)\cdot(u(x))^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x &\overset{3.3.1}{=} \int u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,u\\ &= [2u^{\frac{1}{2}}] = \left[2\sqrt{1+\sin(x)}\right]\,.\end{aligned}$$

Im Fall $\cos(x) \leqq 0$, das heißt für $x \in \left[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$, erhalten wir

$$\int \sqrt{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x = -\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}\,\mathrm{d}\,x = -\left[2\sqrt{1+\sin(x)}\right].$$

Wir haben bislang also die Mengen der Stammfunktionen für einzelne Teilintervalle des Definitionsbereichs bestimmt. Dies wollen wir noch zur Menge der Stammfunktionen auf dem gesamten Definitionsbereich zusammenführen. Dazu müssen die Stammfunktionen auf jeden Fall stetig sein.

Wir betrachten für ein festes $k \in \mathbb{N}_0$ die aneinander grenzenden Intervalle

$$\left[2k\pi - \tfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ und } \left[(2k+1)\pi - \tfrac{\pi}{2}, (2k+1)\pi + \tfrac{\pi}{2}\right] ,$$

die sich an der Stelle $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ berühren. Für eine Stammfunktion

$$2\sqrt{1+\sin(x)} + c_1 \text{ auf } \left[2k\pi - \tfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \tfrac{\pi}{2}\right]$$

und eine Stammfunktion

$$-2\sqrt{1+\sin(x)} + c_2 \text{ auf } \left[(2k+1)\pi - \tfrac{\pi}{2}, (2k+1)\pi + \tfrac{\pi}{2}\right]$$

muss also gelten:

$$c_1 = 2\sqrt{1+\sin(2k\pi + \tfrac{\pi}{2})} + c_1 \overset{!}{=} -2\sqrt{1+\sin(2k\pi + \tfrac{\pi}{2})} + c_2 = c_2\,,$$

denn $\sqrt{1+\sin(2k\pi + \frac{\pi}{2})} = \sqrt{1-1} = 0$.

Analog verfährt man für die aneinander grenzenden Intervalle $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ und $\left[(2k-1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. Auch hier stellt man fest, dass die additiven Konstanten übereinstimmen müssen. Insgesamt stellen wir fest: Ist für $c \in \mathbb{R}$

$$f_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 2\sqrt{1+\sin(x)} + c & \text{für } x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbb{N}_0 \\ -2\sqrt{1+\sin(x)} + c & \text{sonst} \end{cases} ,$$

so folgt

$$\int \sqrt{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}\,x = \left\{ f_c \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zu (e):

Für $x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} 2\sqrt{1+\sin(x)} + c &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}} \\
&= \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sin(x)}}{\sqrt{1-\sin(x)}} \\
&= \frac{\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}}{\sqrt{1-(\sin(x))^2}} = \frac{\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}}{|\cos(x)|} \\
&\overset{\cos(x) \geqq 0}{=} \frac{\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}}{\cos(x)} \\
&= \sqrt{1-\sin(x)}
\end{aligned}$$

und für $x \in \left[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} - 2\sqrt{1+\sin(x)} + c &= -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}} \\
&= -\frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sin(x)}}{\sqrt{1-\sin(x)}} \\
&= -\frac{\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}}{\sqrt{1-(\sin(x))^2}} = -\frac{\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}}{|\cos(x)|} \\
&\overset{\cos(x)\leqq 0}{=} -\frac{\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}}{-\cos(x)} \\
&= \sqrt{1-\sin(x)}.
\end{aligned}$$

(e) Machen Sie in allen Fällen eine Probe durch Ableiten.

Aufgabe H 17.

In Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}^+$ ist

$$f_{a,b}\colon (0, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{a + b\tan(x)}$$

gegeben. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a, b die Menge der Stammfunktionen

$$\int f_{a,b}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Hinweis: Sie können hierfür die Substitution $t = \tan(x)$ verwenden und anschließend eine Partialbruchzerlegung durchführen.

Lösungshinweise hierzu: Durch die Substitution $x(t) = \arctan(t)$ erhalten wir mit $x'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ die Gleichung

$$\int \frac{1}{a + b\tan x}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{(a+bt)(1+t^2)}\,\mathrm{d}\,t.$$

Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung lautet

$$\begin{aligned}
&& \frac{1}{(a+bt)(1+t^2)} &= \frac{A}{a+bt} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \\
&\Leftrightarrow & 1 &= (A+Bb)t^2 + (Ba+Cb)t + A + Ca.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$0 = A + Bb, \qquad Ba + Cb = 0, \qquad A + Ca = 1.$$

Man erhält

$$A = \frac{b^2}{a^2+b^2}, \qquad B = \frac{-b}{a^2+b^2}, \qquad C = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Also ist

$$\int \frac{1}{(a+bt)(1+t^2)}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{b^2}{a+bt} - \frac{bt}{1+t^2} + \frac{a}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t.$$

Bei den ersten beiden Termen liegt jeweils ein Term der Form $\frac{f'}{f}$ vor. Das Integral für den dritten Term kann zum Beispiel in 3.4.9 nachschauen. Also ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{b^2}{a+bt} - \frac{bt}{1+t^2} + \frac{a}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left[b\ln|a+bt| - \frac{b}{2}\ln|1+t^2| + a\arctan(t)\right] \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left[b\ln|a+bt| - b\ln|\sqrt{1+t^2}| + a\arctan(t)\right] \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left[b\ln\left|\frac{a+bt}{\sqrt{1+t^2}}\right| + a\arctan(t)\right].
\end{aligned}$$

Resubstituieren ergibt

$$\int \frac{1}{a+b\tan x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a^2+b^2}\left[ax + b\ln|a\cos(x)+b\sin(x)|\right].$$

Aufgabe H 18.

(a) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\int x^n e^x\,\mathrm{d}\,x = \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k e^x\right]$$

Lösungshinweise hierzu:

IA Wir beginnen damit die Gleichung für $n=0$ zu beweisen. Es gilt

$$\int x^0 e^x\,\mathrm{d}\,x = \int e^x\,\mathrm{d}\,x = [e^x] = \left[(-1)^{0-0}\frac{0!}{0!}x^0 e^x\right] = \left[\sum_{k=0}^{0}(-1)^{0-k}\frac{0!}{k!}x^k e^x\right].$$

IV Sei die Formel bereits für n bewiesen.

IS Für $n+1$ folgt mit Partieller Integration

$$\int x^{n+1}e^x\,\mathrm{d}\,x = \left[x^{n+1}e^x\right] - \int (n+1)x^n e^x\,\mathrm{d}\,x.$$

Mit IV gilt weiter

$$\left[x^{n+1}e^x\right] - \int (n+1)x^n e^x \,\mathrm{d}\,x = \left[x^{n+1}e^x - (n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k e^x\right].$$

Durch Umformungen erhält man dann insgesamt

$$\int x^{n+1}e^x \,\mathrm{d}\,x = \left[\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\frac{(n+1)!}{k!}x^k e^x\right].$$

(b) Zeigen Sie, dass für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x = 0\,.$$

Lösungshinweise hierzu: Mit zweimaliger partieller Integration (3.3.3) erhält man

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x\\
&= \underbrace{\left[\frac{1}{n}\sin(mx)\cdot\sin(nx)\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi}\frac{m}{n}\cos(mx)\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x\\
&= \underbrace{-\left[\frac{1}{n}\cos(mx)\cdot\cos(nx)\right]_0^{2\pi}}_{=0} + \int_0^{2\pi} -\frac{m}{n}\sin(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x.
\end{aligned}$$

Dies kann man unformen und erhält

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x + \int_0^{2\pi}\frac{m}{n}\sin(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x\\
&= \left(1+\frac{m}{n}\right)\int_0^{2\pi}\sin(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x
\end{aligned}$$

und somit

$$0 = \int_0^{2\pi}\sin(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 19.

Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{ix}}{1+x^2}\right| \mathrm{d}\, x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x} \mathrm{d}\, x$

(c) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{x+1}{x^2-1} \mathrm{d}\, x$ **(d)** $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x+1|}} \mathrm{d}\, x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zuerst erkennen wir, dass $|e^{ix}| = 1$ ist, und vereinfachen das Integral zu

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{ix}}{1+x^2}\right| \mathrm{d}\, x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}\, x.$$

Mit der Tabelle 3.1.7 bestimmen wir die Stammfunktion und erhalten als Lösung

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{ix}}{1+x^2}\right| \mathrm{d}\, x = \lim_{b\to+\infty} [\arctan(x)]_1^b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Nach Definition des uneigentlichen Integrals gilt:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} \mathrm{d}\, x = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t xe^{-x} \mathrm{d}\, x.$$

Mit der Methode der partiellen Integration erhalten wir

$$f'(x) = e^{-x}, \quad g(x) = x, \quad \text{also} \quad f(x) = -e^{-x}, \quad g'(x) = 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^t xe^{-x} \mathrm{d}\, x &= \left[\left(-e^{-x}\right) \cdot x\right]_0^t - \int_0^t 1 \cdot \left(-e^{-x}\right) \mathrm{d}\, x \\ &= -\left[e^{-x} x\right]_0^t - \left[e^{-x}\right]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1.\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\lim_{t\to+\infty} \left(-te^{-t} - e^{-t} + 1\right) = 1.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} \mathrm{d}\, x = 1.$$

(c) Wenn man den Integranden vereinfacht, erhält man

$$\int_0^3 \frac{x+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x.$$

Das Integral existiert nicht, denn

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to 1-0}\int_0^t \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to 1-0}\left[\ln|x-1|\right]_0^t = -\infty.$$

(d) Im ersten Schritt trennen wir das Integral, um den Betrag weglassen zu können, und erhalten

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{|x+1|}}\,\mathrm{d}\,x = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{-(x+1)}}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}\,x.$$

Danach berechnen wir die beiden Integral getrennt:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{-(x+1)}}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to -1-0}\int_{-2}^t \frac{1}{\sqrt{-(x+1)}}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to -1-0}\left[-2\sqrt{-(x+1)}\right]_{-2}^t = 2$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{s\to -1+0}\int_s^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \lim_{s\to -1+0}\left[2\sqrt{x+1}\right]_s^0 = 2.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{|x+1|}}\,\mathrm{d}\,x = 2+2 = 4.$$

Aufgabe H 20.

Es sei

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}\,t\,.$$

Verwenden Sie im Folgenden ohne Beweis, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{2\pi}$$

gilt. Bestimmen Sie (für $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$):

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\Gamma(1)$

(d) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

Beweisen Sie außerdem

(e) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Hinweis: Versuchen Sie, die Integrale durch geschicktes Umformen auf eine Form mit bekannten oder berechenbaren Termen zu bringen. Insbesondere wird sich die oben angegebene Identität als nützlich erweisen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Bevor wir substituieren formen wir das Integral um zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}\,x.$$

Wir substituieren mit $u(x) = \frac{x-a}{\sigma}$ und erhalten $u'(x) = \frac{1}{\sigma}$. Mit Hilfe des Hinweises erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\,x = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}\,u = \sqrt{2\pi\sigma^2}.$$

(b) Weil die Funktion $e^{-\frac{x^2}{2}}$ achsensymmetrisch ist, können wir P 24 (a) benutzen und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}\,x &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}\,x = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2} \int_{-b}^{+b} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}\,x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

(c) Den Werte von $\Gamma(1)$ kann man direkt ausrechnen durch

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}\,t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

(d) Für $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ erhält man das Integral

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}\,t.$$

Substituiert man $u(t) = \sqrt{t}$ erhält man $u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Indem wir in Teil (a) $a = 0$ sowie $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ setzen, erhalten wir

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u(t)^2} u'(t) \mathrm{d}\,t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}\,u = \sqrt{\pi}.$$

(e) Wir führen eine partielle Integration durch, mit

$$\begin{aligned} u' &= e^{-t} & v &= t^x \\ u &= -e^{-t} & v' &= xt^{x-1}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \,\mathrm{d}\, t = \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} x t^{x-1} \,\mathrm{d}\, t$$
$$= 0 + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} \,\mathrm{d}\, t = x\Gamma(x).$$

Aufgabe H 21.

Berechnen Sie die folgenden Integrale. Nutzen Sie dabei die Symmetrien der Funktionen.

(a) $\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^2} \sin(x^3) \,\mathrm{d}\, x$

(b) $\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1+|x|} \,\mathrm{d}\, x$

(c) $\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(2x)\sin(3x) \,\mathrm{d}\, x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man bemerkt, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 e^{x^2} \sin(x^3)$ punktsymmetrisch ist, d.h. $f(-x) = -f(x)$. Nach Aufgabe P 24 (b) gilt

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^2} \sin(x^3) \,\mathrm{d}\, x = 0.$$

(b) Mit Aufgabe P 24 (a) kann man das Integral vereinfachen zu

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1+|x|} \,\mathrm{d}\, x = 2\int_0^1 \frac{x}{1+x} \,\mathrm{d}\, x,$$

weil die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{|x|}{1+|x|}$ achsensymmetrisch ist, d.h. $f(-x) = f(x)$. Weiter berechnet man das Integral durch

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x} \,\mathrm{d}\, x = \int_0^1 1 + \frac{-1}{1+x} \,\mathrm{d}\, x = \left[x - \ln\left(|1+x|\right)\right]_0^1 = 1 - \ln(2).$$

Insgesamt erhält man

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1+|x|} \,\mathrm{d}\, x = 2\left(1 - \ln(2)\right) = 2 - \ln(4).$$

(c) Diesmal liegt Symmetrie zum Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ vor. Durch die Substitution $u(x) = x - \frac{\pi}{2}$ erhalten wir $u'(x) = 1$. Nun müssen wir natürlich auch die Integrationsgrenzen anpassen. In den Substitutionsansatz setzen wir zunächst $x = 0$ ein, und erhalten für die (neue) untere Grenze $u = -\frac{\pi}{2}$. Analog erhält man für $x = \pi$ als obere Grenze $u = +\frac{\pi}{2}$. Also ist

$$\int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(2x) \sin(3x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} u \cos(2u + \pi) \sin(3u + \frac{3\pi}{2}) \,\mathrm{d}\, u.$$

Mit den Hilfe der Eigenschaften

$$\cos(2u + \pi) = -\cos(2u)$$

und

$$\sin(3u + \frac{3\pi}{2}) = \sin(3u + \frac{\pi}{2} + \pi) = \cos(3u + \pi) = -\cos(3u)$$

vereinfacht sich das Integral zu

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} u \cos(2u) \cos(3u) \,\mathrm{d}\, u.$$

Da der Integrand $u \cos(2u) \cos(3u)$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist, gilt nach Aufgabe P 24 (b)

$$\int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(2x) \sin(3x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} u \cos(2u) \cos(3u) \,\mathrm{d}\, u = 0.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 22. *Konvergenzverhalten uneigentlicher Integrale*

Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen):

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir erhalten

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{1} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

Das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert (Satz 3.5.5), weil die Funktion $\displaystyle\frac{x}{(x^2+1)^2}$ stetig ist (x und $(x^2+1)^2$ sind stetig, Satz 1.12.4). Für $x>0$, gilt $\displaystyle\frac{x}{(x^2+1)^2} \leqq \frac{x}{x^4}$.

Das Integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^4}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert, weil

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{x}{x^4}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-3}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_1^t = \frac{1}{2}.$$

Mit Hilfe des Majoranten-Kriteriums 3.7.5 erhalten wir die Konvergenz des Integrals $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$. Insgesamt konvergiert auch $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$.

(b) Wir erhalten

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^{2} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x.$$

Das Integral konvergiert nicht, denn

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to-1-0}\int_{-2}^{t} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to-1-0}\left[\ln|x+1|\right]_{-2}^{t} = -\infty.$$

(c) Es gilt

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{1} \frac{x-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x + \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x.$$

Das erste Integral $\int_0^1 \frac{x-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert (nach Satz 3.5.5 ist jede stetige Funktion Riemann-integrierbar). Für das zweite Integral erhalten wir

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{x-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x \leqq \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = 1.$$

Mit Hilfe des Majoranten-Kriteriums 3.7.5 erhalten wir die Konvergenz des Integrals $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x$. Damit konvergiert das Integral $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1}\,\mathrm{d}\,x$.

(d) Wir erhalten

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}\,x + \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}\,x.$$

Das Integral konvergiert nicht, denn

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}\,x \geqq \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right] = +\infty.$$

Aufgabe H 23. *Geschlossene Form*

Bestimmen Sie für die folgenden Reihen den Konvergenzradius und eine geschlossene Form im Inneren des Konvergenzkreises. Der Begriff „geschlossene Form“ ist zu verstehen, wie in Aufgabe P 27(b).

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

(b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-2}{n(n-1)(n-2)} x^n$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit dem Quotientenkriterium erhält man den Konvergenzradius ρ durch

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)\,((n+1)-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{1} \right)^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$$

Leitet man $\frac{x^n}{n(n-1)}$ zweimal ab, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2} \left(\frac{x^n}{n(n-1)} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \left(\frac{x^{n-1}}{n-1} \right) = x^{n-2}.$$

Die Reihe über x^{n-2} lässt sich explizit berechnen, man erhält

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Weiter berechnet man auf $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{1-x}$ und erhält

$$\int \frac{1}{1-x} \,\mathrm{d}\, x = [-\ln(|1-x|)] = \left\{-\ln(1-x) + c_1 \;\middle|\; c_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Da $-\ln(1-x) + c_1$ mit der ersten Ableitung der Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ übereinstimmen muss, können wir mit

$$-\ln(1-x) + c_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1},$$

für $x = 0$ sofort bestimmen, dass $c_1 = 0$ ist.
Im nächsten Schritt integrieren wir $-\ln(1-x)$ und erhalten

$$\int -\ln(1-x) \,\mathrm{d}\, x = [x + (1-x)\ln(1-x)].$$

Zuletzt muss die Integrationskonstante $c_2 \in \mathbb{R}$ so bestimmt werden, dass

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = x + (1-x)\ln(1-x) + c_2.$$

gilt. Mit $x = 0$ erhält man, dass $c_2 = 0$. Als Ergebnis erhalten wir

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = x + (1-x)\ln(1-x).$$

(b) Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir den Konvergenzradius ρ durch

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)^2 - 2}{(n+1)n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{n^2-2} \right)^{-1} = 1$$

Um die Reihe in eine geschlossene Form zu bringen, beginnt man damit, die Partialbruchzerlegung von $\frac{n^2-2}{n(n-1)(n-2)}$ zu bestimmen. Man erhält

$$\frac{n^2-2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}.$$

Mit dieser Gleichung vereinfacht sich die Summe und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-2}{n(n-1)(n-2)} x^n &= -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} + x \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} + x^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} \\
&= -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} + x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{x^2}{2} + x + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x^2 + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= (x^2 + x - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + x - \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Bleibt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ zu berechnen. Hierzu erinnern wir uns an (a) und erhalten als Lösung

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-2}{n(n-1)(n-2)} x^n = (1 - x - x^2) \log(1-x) + x - \frac{x^2}{2}.$$

Aufgabe H 24. *Niveaulinien & achsenparallele Schnitte*

Skizzieren Sie die Niveaulinen für die Werte c der folgenden Funktionen. Verwenden Sie zur Unterscheidung verschiedene Farben. Skizzieren Sie weiter achsenparallele Schnitte für $x_0 = a$ und $y_0 = b$.

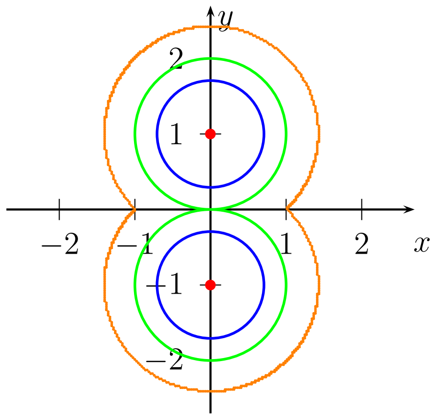
(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2\,|y|$
mit $c \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1\}$ und $a \in \{1, 2\}$, $b \in \{1, 2\}$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto x \sin(y)$
mit $c \in \{0, 1\}$ und $a \in \{0, 1\}$, $b \in \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zum Zeichnen der Niveaulinien betrachtet man $f(x, y) = c$ und erhält für $y \geqq 0$

$$\begin{aligned} & f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y = c \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 + (y-1)^2 = c + 1, \end{aligned}$$



was einem Kreis mit Radius $\sqrt{c+1}$ um den Punkt $(0, 1)$ entspricht. Analog verfährt man mit $y \leqq 0$ und erhält das folgende Schaubild.

Für die achsenparallelen Schnitte $x_0 = a$ erhält man für $y \leqq 0$

$$y \mapsto (y+1)^2 + a^2 - 1,$$

was einer nach oben geöffneten Parabel mit Scheitel $(-1, a^2 - 1)$ entspricht. Mit $y \geqq 0$ verfährt man genauso. Man erhält als achsenparallelen Schnitt zu $x_0 = a$ die Menge

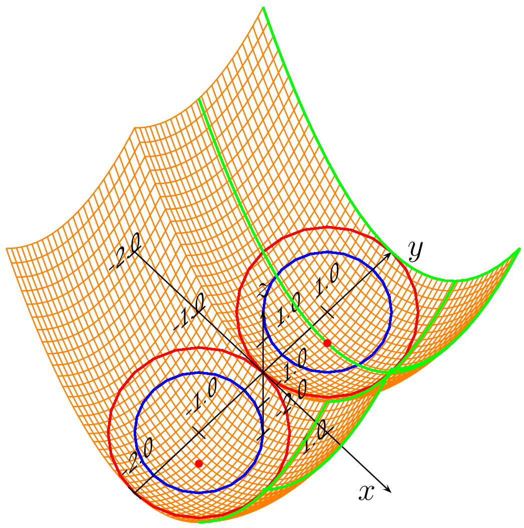
$$\left\{(a, y, y^2 - 2|y| + a^2) \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Für die achsenparallelen Schitte $y_0 = b$ erhält man Parabeln der Form

$$x \mapsto x^2 + b^2 - 2\,|b|\,,$$

die den Scheitel bei $(0, b^2 - 2|b|)$ hat. Man erhält als achsenparallelen Schnitt zu $x_0 = a$ die Menge

$$\left\{(x, b, x^2 + b^2 - 2|b|) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

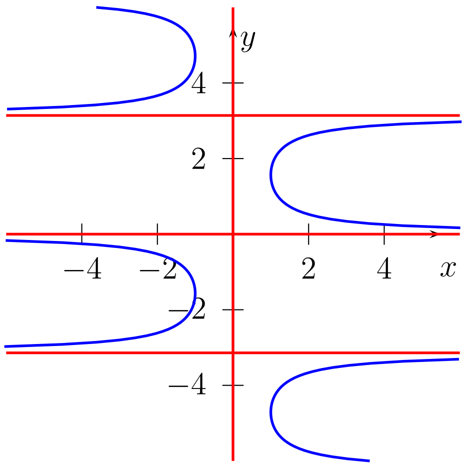


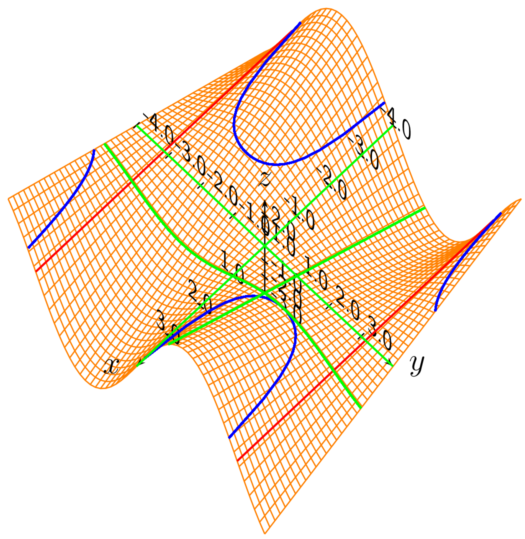
(b) Zuerst betrachten wir die Niveaulinien zu $c = 0$. Da ein Produkt nur Null ist, falls einer der beiden Faktoren Null ist, ist die Niveaulinie beschrieben durch

$$\left\{(x, y) \,\middle|\, x = 0 \text{ oder } y = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Um die Niveaulinie $c = 1$ zu zeichnen, bemerken wir, dass $\sin(y)$ hier nicht Null sein kann und erhalten durch äquivalentes Umformen

$$g(x, y) = x\sin(y) = c \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{c}{\sin(y)}.$$





Für die achsenparallelen Schnitte $x_0 = a$ erhält man Sinus-Funktionen der Form

$$y \mapsto a\sin(y).$$

Als achsenparallelen Schnitt $x_0 = a$ erhält man also die Menge

$$\left\{(a, y, a\sin(y)) \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Für die achsenparallelen Schnitte $y_0 = b$ erhält man Geraden der Form

$$x \mapsto \sin(b)x.$$

Als achsenparallelen Schnitt $y_0 = b$ erhält man also die Menge

$$\left\{(x, b, \sin(b)x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 25. *Partielle Differentiation*

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der durch die folgenden Zuordnungsvorschriften zu definierenden Funktionen.

$$f\colon (x,y,z) \mapsto e^{x+y}xz$$
$$g\colon (x,y,z) \mapsto x^3y^2z$$
$$h\colon (x,y) \mapsto \arctan\left(\frac{x}{y}\right) .$$

Berechnen Sie jeweils alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

Lösungshinweise hierzu: Die Funktion h ist offensichtlich nicht definiert auf $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. An allen weiteren Stellen ist die Funktion definiert. Die Funktionen f und g sind für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ definiert.

$$f_x = e^{x+y}z + e^{x+y}xz \qquad f_y = e^{x+y}xz \qquad f_z = e^{x+y}x$$
$$f_{xx} = 2e^{x+y}z + e^{x+y}xz \qquad f_{yy} = e^{x+y}xz \qquad f_{zz} = 0$$
$$f_{xy} = e^{x+y}z + e^{x+y}xz \qquad f_{xz} = e^{x+y} + xe^{x+y} \qquad f_{yz} = e^{x+y}x$$

$$g_x = 3x^2y^2z \qquad g_y = 2x^3yz \qquad g_z = x^3y^2$$
$$g_{xx} = 6xy^2z \qquad g_{yy} = 2x^3z \qquad g_{zz} = 0$$
$$g_{xy} = 6x^2yz \qquad g_{yz} = 2x^3y \qquad g_{xz} = 3x^2y^2$$

$$h_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad h_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{-x}{y} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$
$$h_{xx} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad h_{yy} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$h_{xy} = \frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Aufgabe H 26. *Ableitung längs eines Vektors*

Gegeben sind die Punkte $a = \left(0,-1,1\right)$, $b = \left(-\frac{\pi}{2},\pi,3\right)$, $c = \left(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right)$, die Vektoren $v = \left(1,2,-3\right)$ und $w = \left(7,5,3\right)$, sowie die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2+y^2-z^2 ,$$
$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \sin(x)\cos(y)z^2 ,$$
$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto \sin(x+y^2+z^3) .$$

Berechnen Sie $\partial_v f(a)$, $\partial_w f(a)$, $\partial_v g(b)$,$\partial_w g(b)$, $\partial_v h(c)$ und $\partial_w h(c)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir benutzen jeweils den Gradienten der entsprechenden Funktion und Satz 4.3.12 aus der Vorlesung um die Ableitungen längs eines Vektors zu berechnen. Für f erhalten wir

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \nabla f(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Für die Ableitungen erhalten wir

$$\partial_v f(a) = \nabla f(a) \bullet v = 2 \quad \text{und} \quad \partial_w f(a) = \nabla f(a) \bullet w = -16.$$

Mit g verfahren wir genau so und erhalten

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y)z^2 \\ -\sin(x)\sin(y)z^2 \\ \sin(x)\cos(y)2z \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \nabla g(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich die Ableitungen zu

$$\partial_v g(b) = \nabla g(b) \bullet v = -18 \quad \text{und} \quad \partial_w g(b) = \nabla g(b) \bullet w = +18.$$

Mit $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$ erhalten wir für h

$$\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x + y^2 + z^3) \\ \cos(x + y^2 + z^3)2y \\ \cos(x + y^2 + z^3)3z^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla h(c) = -\cos(\sqrt{\pi} + \pi^{3/2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{\pi} \\ 3\pi \end{pmatrix}.$$

Als Ableitungen erhalten wir

$$\partial_v h(c) = -\cos(\sqrt{\pi} + \pi^{3/2})(1 + 4\sqrt{\pi} - 9\pi)$$

und

$$\partial_w h(c) = -\cos(\sqrt{\pi} + \pi^{3/2})(7 + 10\sqrt{\pi} + 9\pi)$$

Aufgabe H 27. *Stetigkeit*

Es soll gezeigt werden, dass

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig ist. Verwenden Sie dazu das folgende Vorgehen:

(a) Begründen Sie mit Hilfe von Satz 4.2.8, dass f in Stellen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ stetig ist.

Lösungshinweise hierzu: Mit Satz 4.2.10 sieht man, dass

$$\begin{aligned} f_1 &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto |x| + |y| \\ f_2 &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y) \mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

stetige Funktionen sind. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ gilt somit

$$f(x,y) = f_2(x,y) \cdot \sin\left(\frac{1}{f_1(x,y)}\right)$$

und da $\sin$ bekanntlich stetig ist, haben wir f als Produkt, Komposition und Quotient stetiger Funktionen dargestellt. Somit ist f nach Satz 4.2.8 stetig.

(b) Schließen Sie mit Hilfe von Definition 4.2.6 (ε–δ-Kriterium) auf die Stetigkeit von f in $(0,0)$.

Lösungshinweise hierzu: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Es gilt für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= |f(x,y) - 0| = |f(x,y)| \\ &= \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right)\right| \\ &= \left|(x^2+y^2)\right| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right)\right| \\ &\leqq \left|(x^2+y^2)\right| \\ &= \left||(x,y)|^2\right| \\ &= |(x,y)|^2 \,. \end{aligned}$$

Um auf Stetigkeit schließen zu können, muss ein $\delta > 0$ gefunden werden, dass wenn

$$|(x,y) - (0,0)| = |(x,y)| < \delta$$

folgt

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |(x,y)|^2 < \varepsilon \,.$$

Für $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ ist dies aber gegeben, denn dann gilt

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |(x,y)|^2 < \delta^2 = \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon \,.$$

Damit ist f stetig in $(0,0)$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 28. *partielle Ableitungen und Taylorpolynome*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2|x|$.

(a) Untersuchen Sie an welchen Stellen die Funktion f differenzierbar bzw. zweimal differenzierbar ist. Berechnen Sie dort alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

(b) Berechnen Sie, falls möglich, die Taylorpolynome zweiter Stufe in den Punkten $(1,0)$, $(0,0)$ und $(-1,0)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zunächst untersuchen wir nur die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ auf Differenzierbarkeit. Wir stellen fest, dass die Betragsfunktion für $x \neq 0$ differenzierbar ist und machen eine Fallunterscheidung $x > 0$ bzw. $x < 0$ um die Ableitung $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ zu verifizieren. Mit dem selben Prinzip stellen wir fest, dass die Betragsfunktion für $x \neq 0$ zweimal differenzierbar ist und die zweite Ableitung gerade $x \mapsto 0$ ist.
Damit ist die Funktion f auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ differenzierbar und auch zweimal differenzierbar und wir erhalten die folgenden partiellen Ableitungen:

$$f_x(x,y) = 2x - 2\frac{x}{|x|}, \qquad f_y(x,y) = 2y,$$

$$f_{xx}(x,y) = 2, \qquad f_{xy}(x,y) = 0, \qquad f_{yy}(x,y) = 2.$$

(b) In $(0,0)$ ist die Funktion f nicht differenzierbar, weshalb man dort auch kein Taylorpolynom angeben kann. Für die Punkte $(1,0)$ und $(-1,0)$ erhält man

$$T_2\left(f,(x,y),(1,0)\right) = -1 + (x-1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2x$$

und

$$T_2\left(f,(x,y),(-1,0)\right) = -1 + (x+1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2x.$$

Aufgabe H 29. *Extrema*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)\,.$$

(a) Geben Sie den Wertebereich von f an.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(c) Geben Sie alle kritischen Punkte von f an (d.h. Punkte mit $\operatorname{grad} f = 0$).

(d) Bestimmen Sie den Typ der Schmiegquadrik an den Graph von f in den kritischen Punkten.

(e) Bestimmen Sie alle Extrema von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $8x^2 - 6xy + 3y^2 \geqq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (Die quadratische Form $q(x, y) = 8x^2 - 6xy + 3y^2$ ist positiv definit, Definition 6.1.7, Lemma 6.1.8, Lineare Algebra und Geometrie). Damit erhalten wir den Wertebereich von f: $f(x, y) \geqq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Als Gradient erhalten wir

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x+3y}\,(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 8x - 3y) \\ 3e^{2x+3y}\,(8x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x + 2y) \end{pmatrix}.$$

Als Hessematrix erhalten wir

$$\mathrm{H}f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 4e^{2x+3y}\left(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 16x - 6y + 4\right), \\ f_{xy} &= 6e^{2x+3y}\left(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 6x - y - 1\right) = f_{yx}, \\ f_{yy} &= 3e^{2x+3y}\left(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 12x + 12y + 2\right). \end{aligned}$$

(c) Wir berechnen $\operatorname{grad} f = 0$ und erhalten zwei kritischen Punkte von f:

$$P_1 = (0, 0), \qquad P_2 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right).$$

(d) Die Schmiegquadrik an den Graph von f im Punkt P ist durch die Gleichung $z = T_2(f, (x, y), P)$ gegeben (Spezialfall 4.4.15). Wir berechnen Taylorpolynom der Stufe 2 in den kritischen Punkten. Für $P_1 = (0, 0)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} T_2(f, (x, y), (0, 0)) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0) \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(0, 0)(x - 0)^2 + f_{xy}(0, 0)(x - 0)(y - 0) + \frac{1}{2} f_{yy}(0, 0)(y - 0)^2 \\ &= 8x^2 - 6xy + 3y^2, \end{aligned}$$

und damit ist die Schmiegquadrik im Punkt $(0, 0)$ durch $z = 8x^2 - 6xy + 3y^2$ gegeben. Analog erhalten wir das Taylorpolynom der Stufe 2 in Punkt $P_2 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} T_2\left(f, (x, y), P_2\right) &= \frac{1}{2e^2} + \frac{7}{e^2}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{e^2}\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4e^2}\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= e^{-2}\left(7x^2 - 9xy + \frac{3}{4}y^2 - x - \frac{3}{2}y\right). \end{aligned}$$

Die Schmiegquadrik im Punkt $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ ist durch

$$z = e^{-2}\left(7x^2 - 9xy + \frac{3}{4}y^2 - x - \frac{3}{2}y\right)$$

gegeben.

(e) Wir berechnen die Hessematrix in den kritischen Punkten:

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e^2}\begin{pmatrix} 14 & -9 \\ -9 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $d(P_1) = \det \mathrm{H}f(P_1) = f_{xx}(P_1)f_{yy}(P_1) - f_{xy}(P_1)^2 = 60$. Weil $d(P_1) > 0$ und $f_{xx}(P_1) > 0$, liegt bei P_1 ein lokales Minimum vor (Satz 4.5.8). Wir berechnen $f(P_1) = 0$. Analog erhalten wir $d(P_2) = -60e^{-2}$. Da $d(P_2) < 0$, liegt bei P_2 ein Sattelpunkt vor (Satz 4.5.8). Wir erhalten $f(P_2) = \frac{1}{2}e^{-2}$.

Zum Schluss bestimmen wir den Typ der Schmiegquadrik an den Graphen von f in den kritischen Punkten.
Bei P_1 liegt ein Minimum vor. Die Hesse-Matrix in diesem Punkt ist positiv definit (Satz 4.5.5), deshalb hat die quadratische Form $q_1 = 8x^2 - 6xy + 3y^2$ zwei positive Eigenwerte: $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$ (Lemma 6.1.8, Lineare Algebra und Geometrie). Die Quadrik hat die Form $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2z = 0$ (elliptishes Paraboloid).
Bei P_2 liegt ein Sattelpunkt vor. Die Hesse-Matrix in diesem Punkt ist indefinit (Satz 4.5.5), deshalb hat die quadratische Form $q_2 = 7x^2 - 9xy + \frac{3}{4}y^2$ einen positiven und einen negativen Eigenwert, z.B., $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$ (Lemma 6.1.8, Lineare Algebra und Geometrie). Die Quadrik hat die Form $\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 + 2z = 0$ (hyperbolisches Paraboloid).

Aufgabe H 30. *Extrema auf eingeschränktem Gebiet*

Untersuchen Sie die Funktion

$$u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) - \sin(x+y)$$

im Inneren des von der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $x + y = 2\pi$ begrenzten Gebietes auf Extremwerte. Gehen Sie dabei ausführlich auf die Anzahl der kritischen Punkte innerhalb dieses Gebiets ein.

Lösungshinweise hierzu:

Die Nebenbedingungen besagen, dass $x > 0$, $y > 0$ und $x + y < 2\pi$. Die Komponenten des Gradienten lauten

$$\begin{aligned} u_x &= \cos(x) - \cos(x+y) \\ u_y &= \cos(y) - \cos(x+y)\,. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir $\cos(x) = \cos(y)$.

Daraus muss allerdings nicht zwangsläufig folgen, dass x und y übereinstimmen. Da die $\cos$-Funktion 2π-periodisch ist, können sich x und y auch um ein Vielfaches von 2π unterscheiden. Also $y \in \{x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Da x und y laut Vorraussetzung jedoch strikt positiv sein müssen, und ihre Summe kleiner sein muss als 2π, folgt, dass $x = y$.

Setzen wir dieses Resultat nun in die Gleichung $\nabla u = 0$ ein, so erhalten wir $\cos(x) - \cos(2x) = 0$. Hierfür kommt nur der Fall $x = y = \frac{2\pi}{3}$ in Frage.

Eine weitere Möglichkeit wäre, dass $y \in \{-x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Aufgrund der Nebenbedingungen ist nur der Fall $y = -x + 2\pi$ möglich.

Einsetzen in $\nabla u = 0$ ergibt $\cos(x) = \cos(x - x + 2\pi) = 1$. Im Intervall $]0, 2\pi[$ gibt es kein x welches diese Gleichung löst.

Also ist $P = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ der einzige mögliche kritische Punkt.

Als Hessematrix erhalten wir

$$Hu = \begin{pmatrix} -\sin(x) + \sin(x+y) & \sin(x+y) \\ \sin(x+y) & -\sin(y) + \sin(x+y) \end{pmatrix} .$$

Indem wir unseren kritischen Punkt einsetzen, erhalten wir die Matrix

$$Hu = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

deren Determinante $\dfrac{9}{4}$ ist. Ferner ist $u_{xx} < 0$. Unser kritischer Punkt ist also ein Hochpunkt.

Zusatz zum Knobeln:
Untersuchen Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x, y, z) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) - \sin(x + y + z)$$

im Inneren jenes Gebietes auf Extremwerte, welches von der x–y-Ebene, der y–z-Ebene, der x–z-Ebene und der durch die Gleichung $x + y + z = 2\pi$ gegebenen Ebene begrenzt wird. Gehen Sie dabei ausführlich auf die Anzahl der kritischen Punkte innerhalb dieses Gebiets ein.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 31. *Extrema unter Nebenbedingungen*
Berechnen Sie alle kritischen Stellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto x^2 + y(z-1)$$

unter der Nebenbedingung

$$\{(x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1 \quad \text{und} \quad z = 2x-y+1\}.$$

Bestimmen Sie weiter, ob es sich dabei um lokale Maxima oder lokale Minima handelt.

Lösungshinweise hierzu: Es gibt viele Möglichkeiten diese Aufgabe zu lösen. Auf jeden Fall kann man hier Satz 4.6.7 – die Langrange Multiplikatormethode mit mehreren Nebenbedingen – verwenden. Alternativ kann man auch zwei Variablen eliminieren und bezüglich der verbleibenden Variable Minima und Maxima suchen. Wir wollen hier eine Mischung aus diesen beiden Methoden anwenden:
Wir verwenden die Nebenbedingung $z = 2x - y + 1$ um die Aufgabe auf folgendes Problem zurückzuführen:
Finde alle kritische Stellen der Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x^2 + 2xy - y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$h(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Im nächsten Schritt wollen wir die Lagrange Multiplikatormethode anwenden und berechnen dafür die Gradienten von g und h. Wir erhalten

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x-2y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla h = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Wir vergewissern uns, dass wir die Lagrange Multiplikatormethode anwenden dürfen, also dass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $h(x,y) = 0$ die Ableitung $\nabla h(x,y) \neq 0$ ist. Aus der Lagrange Multiplikatormethode erhalten wir das nicht-lineare Gleichungssystem

$$2x + 2y = 2\lambda x, \tag{1}$$
$$2x - 2y = 2\lambda y, \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3}$$

Wir multiplizieren (1) mit y und subtrahieren (2) multipliziert mit x. Dann erhalten wir

$$2y^2 + 4xy - 2x^2 = 0. \tag{4}$$

Löst man (3) nach y auf, so erhält man die zwei Lösungen

$$y_1 = -\sqrt{1-x^2} \quad \text{und} \quad y_2 = +\sqrt{1-x^2}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) erhalten wir

$$2(1-x^2) + 4x\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right) - 2x^2 = 0, \tag{6}$$

was äquivalent ist zu

$$2x\left(\pm\sqrt{1-x^2}\right) = 2x^2 - 1. \tag{7}$$

Quadriert man (7) so erhält man

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = 0. \tag{8}$$

Mit (8) und erhält man x, mit (5) erhält man dann y in der Form

$$x = s_2\sqrt{\frac{2+s_1\sqrt{2}}{4}} \quad \text{und} \quad y = s_3\sqrt{\frac{2-s_1\sqrt{2}}{4}},$$

wobei $s_1, s_2, s_3 \in \{-1,+1\}$. Da wir nicht nur Äquivalenzumformungen benutzt haben (Quadrieren einer Gleichung), müssen wir überprüfen, welche Lösungen von (8)+(5) auch Lösungen von (4)+(5) sind. Wir setzen in (4) ein und erhalten

$$\frac{2-s_1\sqrt{2}}{2} + s_2s_3\sqrt{\frac{\left(2+s_1\sqrt{2}\right)\left(2-s_1\sqrt{2}\right)}{4}} - \frac{2+s_1\sqrt{2}}{2} = (s_2s_3 - s_1)\sqrt{2} = 0.$$

Aus dieser Betrachtung folgt, dass $s_3 = s_1s_2$ ist und damit die Menge der kritischen Stellen sich in der Form

$$\mathcal{L} := \left\{ \left(s_2\sqrt{\frac{2+s_1\sqrt{2}}{4}}, s_1s_2\sqrt{\frac{2-s_1\sqrt{2}}{4}} \right) \middle| \; s_1, s_2 \in \{-1,+1\} \right\}.$$

schreiben lässt. Weiter berechnet man für eine kritische Stelle $(x,y) \in \mathcal{L}$ den Wert von g und erhält

$$g(x,y) = \frac{2+s_1\sqrt{2}}{4} + s_2s_3\sqrt{\frac{\left(2+s_1\sqrt{2}\right)\left(2-s_1\sqrt{2}\right)}{4}} - \frac{2-s_1\sqrt{2}}{4} = s_1\sqrt{2}.$$

Damit ist $(x,y) \in \mathcal{L}$ ein Maximum von g, falls $s_1 = +1$ ist, und ein Minimum, falls $s_1 = -1$ ist. Überträgt man das Ergebnis auf die Funktion f, so erhält man, dass $(x, y, 2x-y+1)$ genau dann ein Maximum unter der gegebenen Nebenbedingung ist, falls $(x,y) \in \mathcal{L}$ und $s_1 = +1$ ist. Entsprechendes gilt für Minima.

Aufgabe H 32. *Differentiationsregeln*

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der durch folgende Zuordnungsvorschriften gegebenen Funktionen direkt und unter Verwendung der Kettenregel. Untersuchen Sie Definitions- und Wertebereich aller dabei auftretenden Funktionen.

(a) $f(x,y) = f_2(f_1(x,y))$
mit $f_1(x,y) = x^2 + y^2$ und $f_2(t) = \sin(t)$,

(b) $g(t) = g_2(g_1(t))$
mit $g_1(t) = (\sin(t),\, \cos(t))^\intercal$ und $g_2(x,y) = (xy,\, x^3,\, y^2)^\intercal$,

(c) $h(x,y,z) = h_1(h_2(x,y,z))$
mit $h_1(u,v) = (uv,\, u+v,\, \sin(u+v))^\intercal$ und $h_2(x,y,z) = (x+y,\, y+z)^\intercal$,

(d) $k(x,y) = k_1(k_2(x,y))$
mit $k_1(u,v,t) = (u+v+t,\, uv-t)^\intercal$, $k_2(x,y) = (2xy,\, x+y,\, x^2)^\intercal$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Direkt (Definition 4.7.1):

$$\begin{aligned}\mathrm{J}f(x,y) &= (\operatorname{grad} f(x,y))^\intercal = \left(\operatorname{grad}\left(\sin\left(x^2+y^2\right)\right)\right)^\intercal \\ &= \left(2x\cos\left(x^2+y^2\right),\, 2y\cos\left(x^2+y^2\right)\right) = \cos\left(x^2+y^2\right)\cdot(2x,\, 2y).\end{aligned}$$

Kettenregel (4.8.3): mit $f_2(t) = \sin(t)$ und $f_1(x,y) = x^2+y^2$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{J}f(x,y) &= \mathrm{J}(f_2\circ f_1)(x,y) = (\mathrm{J}f_2(f_1(x,y)))\cdot(\mathrm{J}f_1(x,y)) \\ &= f_2'(f_1(x,y))\cdot(\operatorname{grad} f_1(x,y))^\intercal = \cos\left(x^2+y^2\right)\cdot(2x,\, 2y).\end{aligned}$$

Definitionsbereiche und Wertebereiche:

$$\begin{array}{rclrclrcl} D_f &=& \mathbb{R}^2, & D_{f_1} &=& \mathbb{R}^2, & D_{f_2} &=& \mathbb{R}, \\ W_f &=& [-1,1], & W_{f_1} &=& \mathbb{R}^+, & W_{f_2} &=& [-1,1]. \end{array}$$

(b) Direkt:

$$\mathrm{J}g(t) = \mathrm{J}\begin{pmatrix}\sin(t)\cos(t)\\ (\sin(t))^3\\ (\cos(t))^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\cos(t))^2-(\sin(t))^2\\ 3(\sin(t))^2\cos(t)\\ -2\cos(t)\sin(t)\end{pmatrix}.$$

Kettenregel: mit $g_2(x,y) = (xy,\, x^3,\, y^2)^\intercal$ und $g_1(t) = (\sin(t),\, \cos(t))^\intercal$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{J}g(t) = \mathrm{J}(g_2\circ g_1)(t) = \mathrm{J}g_2(g_1(t))\cdot\mathrm{J}g_1(t) &= \begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ 3(\sin(t))^2 & 0\\ 0 & 2\cos(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}(\cos(t))^2-(\sin(t))^2\\ 3(\sin(t))^2\cos(t)\\ -2\cos(t)\sin(t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Definitionsbereiche und Wertebereiche:

$$\begin{array}{rclrclrcl} D_g &=& \mathbb{R}, & D_{g_1} &=& \mathbb{R}, & D_{g_2} &=& \mathbb{R}^2, \\ W_g &=& \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times[-1,1]\times[0,1], & W_{g_1} &=& [-1,1]^2, & W_{g_2} &=& \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+. \end{array}$$

(c) Direkt:

$$\begin{aligned} \mathrm{J}h(x,y,z) &= \mathrm{J}\begin{pmatrix} xy+xz+yz+y^2 \\ x+2y+z \\ \sin(x+2y+z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y+z & x+2y+z & x+y \\ 1 & 2 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & 2\cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kettenregel:

$$\begin{aligned} \mathrm{J}h(x,y,z) &= \mathrm{J}(h_1\circ h_2)(x,y,z) = \mathrm{J}h_1(h_2(x,y,z))\cdot \mathrm{J}h_2(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} y+z & x+y \\ 1 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y+z & x+2y+z & x+y \\ 1 & 2 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & 2\cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definitionsbereiche und Wertebereiche:

$$\begin{array}{lcllcllcl} D_h &=& \mathbb{R}^3, & D_{h_1} &=& \mathbb{R}^2, & D_{h_2} &=& \mathbb{R}^3, \\ W_h &=& \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[-1,1], & W_{h_1} &=& \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[-1,1], & W_{h_2} &=& \mathbb{R}^2. \end{array}$$

(d) Direkt:

$$\mathrm{J}k(x,y) = \mathrm{J}\begin{pmatrix} 2xy+x+y+x^2 \\ 2xy(x+y)-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+1+2x & 2x+1 \\ 4xy+2y^2-2x & 2x^2+4xy \end{pmatrix}.$$

Kettenregel:

$$\begin{aligned} \mathrm{J}k(x,y) &= \mathrm{J}(k_1\circ k_2)(x,y) = \mathrm{J}k_1(k_2(x,y))\cdot \mathrm{J}k_2(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+y & 2xy & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 1 & 1 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y+1+2x & 2x+1 \\ 2y(x+y)+2xy-2x & 2x(x+y)+2xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y+1+2x & 2x+1 \\ 4xy+2y^2-2x & 2x^2+4xy \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definitionsbereiche und Wertebereiche:

$$\begin{array}{lcllcllcl} D_k &=& \mathbb{R}^2, & D_{k_1} &=& \mathbb{R}^3, & D_{k_2} &=& \mathbb{R}^2, \\ W_k &=& \mathbb{R}^2, & W_{k_1} &=& \mathbb{R}^2, & W_{k_2} &=& \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+. \end{array}$$

Aufgabe H 33. *Extrema ohne und mit Nebenbedingung*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (x^2+y^2+z^2-1)^2\,.$$

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f. Entscheiden welchen Typ die kritischen Punkte besitzen, d.h. ob es lokale, absolute Maxima beziehungsweise Minima sind, oder ob Sattelpunkte vorliegen.

Lösungshinweise hierzu: Zur Bestimmung der kritischen Punkte ist die Gleichung

$$0 = \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2(x^2+y^2+z^2-1)\cdot 2x \\ 2(x^2+y^2+z^2-1)\cdot 2y \\ 2(x^2+y^2+z^2-1)\cdot 2z \end{pmatrix}$$

zu lösen.

Erster Fall: $x^2+y^2+z^2-1=0$.

Für Punkte $p=(x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3$, die diese Gleichung erfüllen, gilt aber offensichtlich $\operatorname{grad} f(p) = 0$. Das heißt, die Menge

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2-1=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1 \right\}$$

ist eine Menge von kritischen Punkten und ist eine Sphäre mit Radius 1 um den Punkt $(0,0,0)^\intercal$.

Zweiter Fall: $x^2+y^2+z^2-1 \neq 0$.

Dann muss gelten $2x=0$, $2y=0$ und $2z=0$, also $x=y=z=0$. Dies ist ein isolierter kritischer Punkt.

Wir stellen fest, für alle $p \in S$ gilt $f(p)=0$, andererseits gilt aber für alle $q \in \mathbb{R}^3$, dass $f(q) \geqq 0$. Das heißt, die Menge S ist eine Menge von absoluten Minima.

Schränkt man nun f auf die kompakte Menge

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leqq 1 \right\}$$

ein, so muss diese nach dem Satz vom Minimum und vom Maximum 4.2.18 ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum enthalten (wohlgemerkt bezogen auf die Menge B). Wir haben bereits gesehen, dass der Rand $\partial B = S$ aus Minima von f besteht, somit muss das Maximum im kritischen Punkt $(0,0,0)^\intercal$ liegen. Eingeschränkt auf B ist dies ein absolutes Maximum, wie aber ist die Situation, wenn wir f nicht auf B einschränken? Der Punkt $(0,0,0)^\intercal$ ist natürlich auch lokales Maximum, da aber $f(0,0,0)=1$, hingegen $f(3,0,0)=4$, kann $(0,0,0)^\intercal$ kein absolutes Maximum von f sein.

(b) Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung

$$\{(x,y,z)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und entscheiden Sie, ob es sich um lokale oder absolute Minima oder Maxima handelt.

Lösungshinweise hierzu: Um die Multiplikatormethode nach Lagrange anwenden zu können, setzen wir

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1$$

und erreichen somit, dass die Nebenbedingung genau von der Nullstellenmenge von g erfüllt wird. Da

$$\operatorname{grad} g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{grad} g(p) \neq 0$, wenn $g(p) = 0$, kann die Multiplikatormethode 4.6.3 angewendet werden.

Zu untersuchen ist

$$\operatorname{grad} f + \lambda \operatorname{grad} g = 0\,,$$

was zusammen mit der Nebenbedingung auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
2(x^2+y^2+z^2-1)\cdot 2x + \lambda\, 2(x-1) &= 0 && (1)\\
2(x^2+y^2+z^2-1)\cdot 2y + \lambda\, 2y &= 0 && (2)\\
2(x^2+y^2+z^2-1)\cdot 2z + \lambda\, 2z &= 0 && (3)
\end{aligned}$$

und

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad \text{(NB)}$$

führt. Die Gleichung (NB) lässt sich umformen zu

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 2x - 1 \qquad \text{(NB')}$$

und in die Gleichungen (1)–(3) einsetzen:

$$\begin{aligned}
(2x-1)\cdot 2x + \lambda(x-1) &= 0 && (1')\\
(2x-1)\cdot 2y + \lambda y &= 0 && (2')\\
(2x-1)\cdot 2z + \lambda z &= 0 && (3')
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (1')–(3') lassen sich dann umformen zu

$$\begin{aligned}
x(4x-2+\lambda) - \lambda &= 0 && (1'')\\
y(4x-2+\lambda) &= 0 && (2'')\\
z(4x-2+\lambda) &= 0 && (3'')
\end{aligned}$$

Erster Fall: $4x - 2 + \lambda = 0$.
Dann folgt aus Gleichung (1"), dass $\lambda = 0$, also $4x - 2 = 0$, das heißt

$$x = \frac{1}{2}\,.$$

Dies eingesetzt in (NB) oder (NB') führt auf die Gleichung

$$y^2 + z^2 = \frac{3}{4}\,.$$

Mögliche Kandidaten p für Extrema liegen also auf einem Kreis in der $(x = \frac{1}{2})$-Ebene mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, 0, 0)^\mathsf{T}$ und Radius $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Für alle solche p gilt aber $p \in S$, wobei S in Teilaufgabe (a) definiert ist, sie sind deswegen absolute Minima von f, also auch absolute Minima von f unter der gegebenen Nebenbedingung.
Zweiter Fall: $4x - 2 + \lambda \neq 0$.
Dann folgt aber aus (2") und (3"), dass $y = z = 0$. Dies eingesetzt in (NB) oder (NB') führt auf

$$x^2 - 2x = 0\,,$$

somit $x = 0$ oder $x = 2$. In beiden Fällen lässt sich für diese Werte die Gleichung (1") für $\lambda = 0$ erfüllen. Also sind $(0,0,0)^\mathsf{T}$ und $(2,0,0)^\mathsf{T}$ ebenfalls Stellen, bei denen Extrema vorliegen könnten. Nun gilt aber $f(0,0,0) = 1$ und $f(2,0,0) = 1$ und da die Nebenbedingung eine kompakte Menge beschreibt und die absoluten Maxima auf dieser angenommen werden müssen (Satz vom Minimum und vom Maximum 4.2.18), handelt es sich bei diesen beiden Punkten und absolute Maxima unter der gegebenen Nebenbedingung.

Hinweis: Kritische Punkte müssen nicht isoliert liegen. Es kann also durchaus vorkommen, dass man die kritischen Punkte nur mit Hilfe einer oder mehrerer Gleichungen beschreiben kann. In solchen Fällen sollen die Gleichungen derart vereinfach werden, dass man unmittelbar die Gestalt der Menge der kritischen Punkte ablesen kann.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 34. *Quer durch's Vektorfeld*

In Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$ ist das folgende Vektorfeld gegeben:

$$v_b \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z)^\intercal \mapsto \big(2x, 3z^2 + z, 1 + 6yz + by\big)^\intercal \ .$$

Ferner sei abhängig von $\gamma \in (0, \infty)$ eine Kurve K_γ gegeben:

$$C : [0, \gamma] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (2\sin(t), \cos(2t), \cos(t))^\intercal \ .$$

(a) Wählen Sie b so, dass v_b ein Potential besitzt und berechnen Sie ein solches.

Lösungshinweise hierzu: Bedingung für die Existenz eines Potentials ist, dass die Rotation gleich null ist. In unserem Fall erhalten wir $\operatorname{rot}(v_b) = (b - 1, 0, 0)^\intercal$. Ein Potential existiert also genau dann wenn $b = 1$. Nun berechnen wir ein Potential: Wir integrieren den ersten Eintrag des Vektorfeldes nach x.

$$\int 2x \,\mathrm{d}\, x = x^2 + c_1(y, z) =: U(x, y, z)$$

Dieses Ergebnis leiten wir nun nach y ab und setzen das Ergebnis gleich dem zweiten Eintrag des Vektorfeldes.

$$U_y(x, y, z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, y} c_1(y, z) \stackrel{!}{=} 3z^2 + z$$

Durch Integration nach y erhalten wir

$$c_1(y, z) = \int 3z^2 + z \,\mathrm{d}\, y = 3yz^2 + yz + c_2(z).$$

Das Potential U hat somit die Form

$$U(x, y, z) = x^2 + 3yz^2 + yz + c_2(z).$$

Leiten wir U nach z ab und setzen diese Ableitung mit dem zweiten Eintrag des Vektorfeldes gleich, so bekommen wir folgende Gleichung

$$U_z(x, y, z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, z} \big(x^2 + 3yz^2 + yz + c_2(z)\big) = 6yz + y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, z} c_2(z) \stackrel{!}{=} 1 + 6yz + y.$$

Wir erhalten $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, z} c_2(z) = 1$ und somit $c_2(z) = z + c_3$, wobei $c_3 \in \mathbb{R}$.
Durch $U(x, y, z) = x^2 + 3yz^2 + yz + z + c_3$, mit $c_3 \in \mathbb{R}$ sind somit alle Potentiale bestimmt.

(b) Finden Sie das kleinstmögliche γ so, dass die Kurve K_γ geschlossen ist.

Lösungshinweise hierzu: Für $\gamma = 0$ erhalten wir $C(\gamma) = C(0) = (0,1,1)^\intercal$. Die Nullstellenmenge der ersten Komponente von C ist $\mathcal{A}_1 = \{x = k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$; die zweite Komponente wird wieder 1 in $\mathcal{A}_2 = \{x = \pi k \mid k \in \mathbb{N}\}$ und die dritte Komponente nimmt den Wert 1 wieder in $\mathcal{A}_3 = \{x = 2\pi k \mid k \in \mathbb{N}\}$ an. Das gesuchte γ ist der kleinste Wert in $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3$. Also $\gamma = 2\pi$.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{K_\pi} v_b \bullet \mathrm{d}\,x$ für $b = 0$ und $b = 1$.

Hinweis: Die Verwendung von Symmetrien sowie das Additionstheorem $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$ können hierbei viel Arbeit ersparen.

Lösungshinweise hierzu: Es sei zunächst $b = 0$. Wir berechnen

$$C'(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ -2\sin(2t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Hiermit und duch Einsetzen erhalten wir

$$\int_{K_\pi} v_b(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^\pi v_b\left(C(t)\right) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\pi \begin{pmatrix} 4\sin(t) \\ 3\cos^2(t) + \cos(t) \\ 1 + 6\cos(2t)\cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ -2\sin(2t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t,$$

also

$$\begin{aligned}
\int_{K_\pi} v_b(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int_0^\pi 8\sin(t)\cos(t) - 6\cos^2(t)\sin(2t) - 2\sin(2t)\cos(t) \\
&\quad - \sin(t) - 6\cos(2t)\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\pi 8\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^\pi -6\cos^2(t)\sin(2t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^\pi -2\sin(2t)\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&\quad + \int_0^\pi -\sin(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^\pi -6\cos(2t)\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}\,t.
\end{aligned}$$

Von dieser Summe sind der erste, der zweite und der fünfte Integrant punktsymmetrisch zum Punkt $\frac{\pi}{2}$, was bedeutet, dass diese Integrale gleich null sind.

Offensichtlich ist $\displaystyle\int_0^\pi -\sin(t)\,\mathrm{d}\,t = -2$.

Für das verbleibende Integral verwenden wir obiges Additionstheorem. Dieses sagt uns insbesondere, dass $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ ist. Also haben wir

$$\int_0^\pi -2\sin(2t)\cos(t)\,\mathrm{d}\,t = -4\int_0^\pi \cos^2(t)\sin(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Durch die Substitution $u = \cos(t)$ folgt

$$-4\int \cos^2(t)\sin(t)\,\mathrm{d}\,t = \int 4u^2\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{4}{3}u^3\right]$$

und damit
$$\int_0^\pi -2\sin(2t)\cos(t)\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{4}{3}\cos^3(t)\right]_0^\pi = -\frac{8}{3}.$$
Also haben wir $\displaystyle\int_{K_\pi} v_b(x)\,\mathrm{d}\,x = -2-\frac{8}{3} = -\frac{14}{3}$.

Nun ist noch der Fall $b=1$ zu betrachten.

Da hier jedoch ein Potential vorliegt wollen wir uns das Leben nicht unnötig schwer machen und benutzen dieses. Wir setzen 0 beziehungsweise π in unsere Parametrisierung ein und erhalten als Anfangs- bzw. Endpunkt $x_a = (0,1,1)^\intercal$, $x_e = (0,1,-1)^\intercal$.

Dies ergibt $\displaystyle\int_{K_\pi} v_b(x)\,\mathrm{d}\,x = U(x_e)-U(x_a) = 1-5 = -4$.

Aufgabe H 35. *Potential und Kurvenintegrale*

Gegeben ist ein Vektorfeld
$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \exp(-x^2-y^2-z^2)(x,y,z)^\intercal$$
und in Abhängigkeit von $\beta\in[0,2\pi]$ eine Kurve K_β, parametrisiert durch
$$C_\beta\colon [0,\beta]\to\mathbb{R}^3\colon \alpha\mapsto(\cos(\alpha)\cos(2\alpha),\sin(\alpha)\cos(2\alpha),\sin(2\alpha))^\intercal.$$

(a) Berechnen Sie ein Potential zu dem Vektorfeld v.

(b) Berechnen Sie für $\beta\in[0,2\pi]$ das Integral $\displaystyle\int_{K_\beta} v\bullet\mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen
$$\begin{aligned}\int x\exp(-x^2-y^2-z^2)\,\mathrm{d}\,x &= -\frac{1}{2}\int -2x\exp(-x^2-y^2-z^2)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \left[-\frac{1}{2}\exp(-x^2-y^2-z^2)\right].\end{aligned}$$
Damit erhalten wir als Ansatz für ein Potential U den Term
$$U(x,y,z) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2-y^2-z^2)+C(y,z).$$
Leitet man den Ansatz von U nach y ab und setzt das Ergebnis mit der zweiten Komponenete des Vektorfeldes v gleich, so erhält man
$$U_y(x,y,z) = y\exp(-x^2-y^2-z^2)+C_y(y,z) = y\exp(-x^2-y^2-z^2).$$
Daraus folgt, dass $C(y,z)=C(z)$. Gleiches wiederholen wir für z und erhalten, dass $C(z)=C\in\mathbb{R}$. Da wir nur ein Potential bestimmen sollen, dürfen wir $C=0$ wählen. Und erhalten als Potential
$$U(x,y,z) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2-y^2-z^2).$$

(b) Da v ein Potential besitzt, kann man das Integral berechen, indem man Anfangs- und Endpunkt der Kurve K_β in das Potential einstetzt. Man erhält

$$\begin{aligned}
\int_{K_\beta} v \bullet \mathrm{d}\,x &= U(C_\beta(\beta)) - U(C_\beta(0)) \\
&= -\frac{1}{2}\exp\left(-\left(\cos(\beta)\cos(2\beta)\right)^2 - \left(\sin(\beta)\cos(2\beta)\right)^2 - \left(\sin(2\beta)\right)^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\exp\left(-\left(\cos(0)\cos(0)\right)^2 - \left(\sin(0)\cos(0)\right)^2 - \left(\sin(0)\right)^2\right) \\
&= -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2e} = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 36. *Kurvenintegrale reellwertiger Funktionen*

(a) Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs der Ellipse beschrieben durch die Gleichung $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

(b) Durch $C\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \left((\cos(t))^3, (\sin(t))^3\right)^\intercal$ sei ein Draht parametrisiert. Er besitze die Massendichte $\varrho(C(t)) = \sin(t)$. Erläutern Sie, warum die Gesamtmasse des Drahtes durch $\int_C \varrho(x)\,\mathrm{d}\,x$ angemessen beschrieben wird, und berechnen Sie diese.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Ellipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ werde durch $C(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$ mit $0 \leqq t \leqq 2\pi$ parametrisiert. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_C f(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^{2\pi} f(C(t)) \cdot |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} \cos(t)\sqrt{(\sin(t))^2 + 4\,(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(t)\sqrt{1 + 3\,(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{\pi} \cos(t)\sqrt{1 + 3\,(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}\,t + \int_\pi^{2\pi} \cos(t)\sqrt{1 + 3\,(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&\overset{t = x + \pi}{=} \int_0^{\pi} \cos(t)\sqrt{1 + 3\,(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\pi} \cos(x+\pi)\sqrt{1 + 3\,(\cos(x+\pi))^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^{\pi} \cos(t)\sqrt{1 + 3\cos^2 t}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\pi} (-\cos(x))\sqrt{1 + 3(-\cos(x))^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt $C'(t) = 3\sin(t)\cos(t)\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Wir berechnen

$$\int_C \varrho(x)\,\mathrm{d}\,s = \int_0^{\pi/2} \varrho(C(t)) \cdot |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{\pi/2} 3\sin(t) \cdot |\sin(t)\cos(t)|\,\mathrm{d}\,t$$
$$= 3\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^2 \cos(t)\,\mathrm{d}\,t = \left[(\sin(t))^3\right]_0^{\pi/2} = 1.$$

Ein Draht besitzt eine konstante Querschnittsfläche A. Die Masse des Drahtes ist somit

$$A\int_C \varrho(x)\,\mathrm{d}\,x$$

und demnach proportional zum berechneten Kurvenintegral.

Aufgabe H 37. *Zirkulation und Ausfluss*

Gegeben ist die Ellipse $K = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2 + 4y^2 = 1\}$ und die Vektorfelder:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (-y, x+2)^\intercal$$
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (xy, -yx)^\intercal$$

(a) Geben Sie eine geschlossene doppelpunktfreie Parametrisierung $C\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ der Ellipse K an.

(b) Bestimmen Sie jeweils Zirkulation längs K und Ausfluss durch K für f und g.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Ursprung der Ellipse liegt offensichtlich im Ursprung. Durch nullstetzen von x beziehungsweise y stellen wir fest, dass sie die y-Achse an den Stellen $\pm\frac{1}{2}$ und die x-Achse in ± 2 schneidet. Daher liegt es Nahe als Parametrisierung

$$C(t) = (c_1(t), c_2(t))^\intercal = \left(2\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t)\right)^\intercal$$

zu wählen. Sowohl die $\cos$- als auch die $\sin$-Funktion sind 2π-periodisch. Daher können wir den Parameter der obigen Parametrisierung zwischen 0 und 2π laufen lassen. Also $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Wir berechnen

$$C'(t) = ({c_1}'(t), {c_2}'(t)) = \left(-2\sin(t), \frac{1}{2}\cos(t)\right)^\intercal$$

und damit

$$\hat{C}'(t) := ({c_2}'(t), -{c_1}'(t))^\intercal = \left(\frac{1}{2}\cos(t), 2\sin(t)\right)^\intercal.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} f(C(t)) \bullet C'(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(t) \\ 2\cos(t)+2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= (\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + \cos(t) = 1 + \cos(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(C(t)) \bullet \hat{C}'(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(t) \\ 2\cos(t)+2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4}\sin(t)\cos(t) + 4\sin(t)\cos(t) + 4\sin(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(C(t)) \bullet C'(t) &= \begin{pmatrix} \sin(t)\cos(t) \\ -\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= -2(\sin(t))^2\cos(t) - \frac{1}{2}(\cos(t))^2\sin(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(C(t)) \bullet \hat{C}'(t) &= \begin{pmatrix} \sin(t)\cos(t) \\ -\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(\cos(t))^2\sin(t) - 2(\sin(t))^2\cos(t). \end{aligned}$$

Nun berechnen wir

$$Z(f,K) = \int_0^{2\pi} 1 + \cos(t)\,\mathrm{d}\,t = [t + \sin(t)]_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$\begin{aligned} A(f,K) &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4}\sin(t)\cos(t) + 4\sin(t)\cos(t) + 4\sin(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[\frac{(\cos(t))^2}{8} - 2(\cos(t))^2 - 4\cos(t)\right]_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(g,K) &= \int_0^{2\pi} -2(\sin(t))^2\cos(t) - \frac{1}{2}(\cos(t))^2\sin(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[-\frac{2}{3}(\sin(t))^3 + \frac{(\cos(t))^3}{6}\right]_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(g,K) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos(t))^2\sin(t) - 2(\sin(t))^2\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[-\frac{(\cos(t))^3}{6} - \frac{2}{3}(\sin(t))^3\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$