A. Kirchhoff,
T. Pfrommer,
M. Kutter, Dr. I. Rybak

1. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Sommersemester 2010

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-9k-10}{10k}\right)^k$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $\frac{n}{n+1} \to 1$ für $n \to \infty$. Die Reihe ist daher divergent.

(b) Hier kann man das Majorantenkriterium anwenden. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$0 \leqq \frac{1}{k^2+k+1} \leqq \frac{1}{k^2}.$$

Aus der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ folgt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}.$$

(c) Das Quotientenkriterium liefert

$$0 \leqq \frac{(n+1)^3}{4^{n+1}} \frac{4^n}{n^3} = \frac{(n+1)^3}{4n^3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1.$$

Daraus folgt die Konvergenz der Reihe.

(d) Hier weisen wir die Konvergenz der Reihe mit dem Wurzelkriterium nach. Es gilt

$$\sqrt[k]{\left|\frac{-9k-10}{10k}\right|^k} = \left|\frac{-9k-10}{10k}\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{10} < 1.$$

Aufgabe H 2. *Stetigkeit*

Betrachtet wird die Funktion $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{x}$.

(a) Berechnen Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein passendes $\delta > 0$ so, dass gilt

$$\forall x \in [1, 1+\delta]: \quad |f(x) - f(1)| < \varepsilon.$$

(b) Finden Sie für jeden Punkt $x_0 \in [1,4]$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass die Bedingung

$$\forall x \in [1,4]\colon \ (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

erfüllt ist.

(c) Betrachtet wird nun die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

Können Sie auch hier ein δ wie in **(b)** finden?

(d) Was hat das Ganze mit Stetigkeit zu tun?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon \Leftarrow \sqrt{x} < 1 + \varepsilon \Leftarrow x < (1+\varepsilon)^2 \Leftarrow |x - 1| < (1+\varepsilon)^2 - 1 =: \delta.$$

(b) Sei $x_0 \in [1,4]$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt dann

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \Leftarrow |x - x_0| < \varepsilon(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) \Leftarrow |x - x_0| < 2\varepsilon =: \delta.$$

Die letzte Implikation gilt, da $2 \leqq \sqrt{x} + \sqrt{x_0} \leqq 4$ für alle $x, x_0 \in [1,4]$ gilt.

(c) Für $x_0 = 2$ findet man hier nicht für jedes $\varepsilon > 0$ ein entsprechendes $\delta > 0$, denn es gilt für alle $x \neq 2$:

$$|g(x) - g(x_0)| = |1 - 2| = 1,$$

und zwar **unabhängig** von δ.

(d) Die Tatsache, dass ein solches $\delta > 0$ existiert, ist äquivalent zur Stetigkeit in $x_0 = 1$ in Aufgabenteil (a) bzw. zur Stetigkeit im gesamten Intervall $[1,4]$ im Aufgabenteil (b). Im Aufgabenteil (c) findet man kein solches $\delta > 0$, da die Funktion g unstetig in $x_0 = 2$ ist.

Aufgabe H 3. *Konvergenz in metrischen Räumen*

Auf der Menge $\mathcal{C}^0([0,1])$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ verwenden wir die durch $\rho_\infty(f,g) := \max\left\{|f(t) - g(t)| \;\middle|\; t \in [0,1]\right\}$ festgelegte Metrik ρ_∞. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^0([0,1])$ wird definiert durch

$$f_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{für } t \in [0,1].$$

Überprüfen Sie, ob die Folge konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Lösungshinweise hierzu: Wir bestimmen zunächst den möglichen Grenzwert der Folge und klären anschließend die Konvergenz. Nehmen wir also an, dass die Folge tatsächlich gegen eine Funktion $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ konvergiert. Dann würde für alle $s \in [0,1]$

$$\left|\sqrt{s^2+\frac{1}{n}}-f(s)\right| = |f_n(s)-f(s)| \leqq \max_{t\in[0,1]} |f_n(t)-f(t)| = \rho_\infty(f_n, f) \to 0$$

für $n \to \infty$ gelten, und somit (punktweise) $f(t) = |t| = t$ implizieren. Um nun auch die Konvergenz im metrischen Raum $(\mathcal{C}^0([0,1]), \rho_\infty)$ gegen die Funktion f einzusehen, sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann finden wir ein $K \geqq 1$ mit $\sqrt{K} > \frac{1}{\varepsilon}$. Also gilt

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,1]} |f_n(t)-f(t)| &= \max_{t\in[0,1]} \left|\sqrt{(t+\frac{1}{\sqrt{n}})^2-\frac{2t}{\sqrt{n}}}-t\right| \\ &\leqq \max_{t\in[0,1]} \left|\sqrt{(t+1/\sqrt{n})^2}-t\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $n \geqq K$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies die Konvergenz der Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 4. *Stetigkeit*

Bestimmen Sie möglichst große Teilmengen von $\mathbb{R}$, auf denen die folgenden Definitionen sinnvoll sind:

(a) $f_1\colon x \mapsto \dfrac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2|x-1|}$

Lösungshinweise hierzu: Der Definitionsbereich ist $\mathbb{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. In $\mathbb{D}_1$ ist die Funktion, als Verknüpfung stetiger Funktionen, stetig. Aus Beispiel (1.12.5) ist bekannt dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Daran ist ersichtlich dass

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(x)}{|x|} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin(x)}{|x|} = -1$$

Bereits aus der Schule ist bekannt dass $\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Wir substituieren zunächst $u = x+1$ beziehungsweise $x = u+1$ und beachten dass sich im Limes auch die Grenzen ändern.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2|x-1|} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi u}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{(u+1)^2|u|} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{(u+1)^2|u|}$$

substituiere $v = \frac{\pi}{2}u$ beziehungsweise $u = \frac{2}{\pi}v$

$$= \lim_{v\to 0} \frac{\sin(v)}{\left(\frac{2}{\pi}v+1\right)^2 \cdot \frac{2}{\pi}|v|} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\lim_{v\to 0}\frac{\sin(v)}{|v|}}{\lim_{v\to 0}\left(\frac{2}{\pi}v+1\right)^2}\right)$$

$$= \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{als linksseitiger Grenzwert} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{als rechtsseitiger Grenzwert} \end{cases}$$

Wir erhalten also die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0\pm 0} f_1(x) \to \infty \qquad \lim_{x\to 1-0} f_1(x) = +\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to 1+0} f_1(x) = -\frac{\pi}{2}\ .$$

Somit ist die Funktion nicht stetig fortsetzbar.

(b) $f_2\colon x \mapsto \ln\left(\ln(1+x^2)\right)$

Lösungshinweise hierzu: Die $\ln$-Funktion ist definiert für alle $x > 0$, streng monoton steigend und größer oder gleich 0 für alle $x \geqq 1$. Fassen wir diese beiben Aussagen zusammen, und verwenden wieder das Argument der Verknüpfung stetiger Funktionen, erhalten wir, dass die Funktion f_2 stetig ist für alle $x \neq 0$. Außerdem ist $\mathbb{D}_2 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Wir erhalten $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f_2(x) \to -\infty$. Die Funktion ist nicht stetig fortsetzbar.

(c) $f_3\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

Lösungshinweise hierzu: Mit den gleichen Argumenten wie zuvor folgt $\mathbb{D}_3 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. In $\mathbb{D}_3$ ist die Funktion stetig. Wir betrachten zunächst

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} \to -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} \to \infty$$

Hiermit folgern wir

$$\lim_{x\to 1-0} f_3(x) = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 1+0} f_3(x) = 0$$

Die Funktion ist also nicht stetig fortsetzbar.

(d) $f_4\colon x \mapsto \dfrac{3x^4+6x^3-27x^2-6x+24}{x^3-2x^2-x+2}$

Lösungshinweise hierzu: Wir können f_4 schreiben als

$$f_4\colon x \mapsto \frac{3(x+1)(x-1)(x-2)(x+4)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

Für $\mathbb{D}_4 = \mathbb{R} \setminus \{-1,1,2\}$ ist die Funktion stetig. Ferner gilt

$$\lim_{x\to -1\pm 0} f_4(x) \to 9 \qquad \lim_{x\to +1\pm 0} f_4(x) \to 15 \qquad \lim_{x\to +2\pm 0} f_4(x) \to 18\ .$$

Durch $f_4(-1) = 9$, $f_4(1) = 15$ und $f_4(2) = 18$, ist die Funktion folglich stetig fortsetzbar.

(e) $f_5\colon x \mapsto \dfrac{\cos(3x)}{\sin(2x)}$

Lösungshinweise hierzu: Zunächst sei bemerkt, dass $\sin(2x) = 0$ für $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Folglich ist $\mathbb{D}_5 = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\colon k \in \mathbb{Z}\right\}$. Wir wissen $\cos(3x)$ ist $\frac{2}{3}\pi$-periodisch und $\sin(2x)$ ist π-periodisch. Somit ist f_5 eine 2π-periodische Funktion, die auf $\mathbb{D}_5$ stetig ist. Unter Verwendung der Additionstheoreme (1.14.21) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\cos(x)\sin(x)\\
\cos(3x) &= \cos(x+2x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x)
\end{aligned}$$

Hiermit können wir den Limes schreiben wie folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\cos(3x)}{\sin(2x)} &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\cos(x)\cos(2x)}{\sin(2x)} - \frac{\sin(x)\sin(2x)}{\sin(2x)} \right)\\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\cos(x)\cos(2x)}{2\cos(x)\sin(x)} - \sin(x) \right)\\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\cos(2x)}{2\sin(x)} - \sin(x) \right)
\end{aligned}$$

Also

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+2k\pi}\left(\frac{\cos(2x)}{2\sin(x)}-\sin(x)\right)=\frac{-1}{2\cdot 1}-1=-\frac{3}{2}$$
$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}+2k\pi}\left(\frac{\cos(2x)}{2\sin(x)}-\sin(x)\right)=\frac{-1}{2\cdot(-1)}+1=\frac{3}{2}$$

Also gilt mit $k\in\mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to(0+2k\pi)-0} f_5(x)\to-\infty \qquad \lim_{x\to(0+2k\pi)+0} f_5(x)\to+\infty \qquad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\pm0} f_5(x)\to-\frac{3}{2}$$
$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)-0} f_5(x)\to+\infty \qquad \lim_{x\to(\pi+2k\pi)+0} f_5(x)\to-\infty \qquad \lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)\pm0} f_5(x)\to+\frac{3}{2}$$

Durch

$$f_5\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=-\frac{3}{2} \qquad\qquad f_5\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)=+\frac{3}{2}$$

mit $k\in\mathbb{Z}$ können wir die Funktion stetig fortsetzen.

(f) $f_6\colon x\mapsto\dfrac{x-a}{|x-b|}$ wobei $a,b\in\mathbb{R}$

Lösungshinweise hierzu: Unter Beachtung des Nenners folgt, dass f_6 für $\mathbb{D}_6=\mathbb{R}\smallsetminus\{b\}$, als Verknüpfung stetiger Funktionen selbst wieder stetig ist. Wir unterscheiden folgende Fälle

$a=b$: Dann ist

$$\lim_{x\to b-0} f_6(x)\to-1 \qquad\qquad \lim_{x\to b+0} f_6(x)\to 1$$

$a>b$: Dann ist

$$\lim_{x\to b\pm0} f_6(x)\to-\infty$$

$a<b$: Dann ist

$$\lim_{x\to b\pm0} f_6(x)\to+\infty$$

Im Fall $a=b$, und nur in diesem Fall, ist die Funktion durch $f_6(b)=-1$ stetig fortsetzbar.

Untersuchen Sie diese Funktionen auf Stetigkeit, und bestimmen Sie jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Lücken in den Definitionsbereichen.
An welchen dieser Lücken sind die Funktionen stetig fortsetzbar?

Aufgabe H 5. *Stetigkeit und Folgen*

Sei $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ stetig und $f(x) < x$ für alle $x > 0$. Für die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte $a_n > 0$ und $a_{n+1} \leqq f(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$0 < a_{n+1} \leqq f(a_n) < a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

daher ist die Folge (a_n) monoton fallend und beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß existiert dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a \in \mathbb{R}$.

Wäre $a < 0$, so gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n < 0$ für alle $n \geqq N$ gelten würde. Da jedoch $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt daher aber $a \geqq 0$.

Wäre $a > 0$, so würde aus $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ (f ist stetig auf dem Intervall $(0,\infty)$) aus (1)

$$a \leqq f(a) \leqq a$$

und somit $f(a) = a$ folgen. Da wir aber $a > 0$ angenommen haben, gilt laut Voraussetzung $f(a) < a$. Insgesamt ergibt sich daher mit

$$a = f(a) < a$$

ein Widerspruch zu $a > 0$, also folgt $a \leqq 0$.

Insgesamt folgt aus $a \geqq 0$ und $a \leqq 0$ letztendlich $a = 0$.

Aufgabe H 6. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, ohne die Regel von l'Hospital zu verwenden:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos(2x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x^2}{1-x^2} + 2^{\frac{1}{x}}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\sin(3x)} - \dfrac{\sin(x)}{x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{ax}-x}{x-a}, \quad a \in \mathbb{R}$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-b}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Ausdruck $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ ist von der Form "$\dfrac{0}{0}$". Man findet den Grenzwert durch die folgende Umformung

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = 1.$$

(b) Der Ausdruck $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos(2x)}$ ist von der Form "$\dfrac{0}{0}$". Man findet den Grenzwert durch die folgende Erweiterung

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos(2x)} &= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} \\
&= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\left(\cos(x)-\sin(x)\right)\left(\cos(x)+\sin(x)\right)} \\
&= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos(x)+\sin(x)} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

(c) Mit den Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte (1.12.1) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{5x^2}{1-x^2} + 2^{\frac{1}{x}}\right) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{5x^2}{1-x^2} + \lim_{x\to +\infty} 2^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{\frac{1}{x^2}-1} + \lim_{x\to +\infty} 2^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{\frac{1}{x^2}-1} + \lim_{x\to +\infty} 2^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{5}{-1} + 2^0 = -4.
\end{aligned}$$

(d) Der Ausdruck $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\sin(3x)} - \dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ ist von der Form "$\dfrac{0}{0}$". Man findet den Grenzwert durch die folgende Umformung

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(3x)}-\frac{\sin(x)}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(3x)}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\\
&[t=3x]\\
&= \frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(t)}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\\
&[\text{siehe Beispiel 1.12.5}]\\
&= \frac{1}{3}\cdot 1-1=-\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(e) Der Ausdruck $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$ ist von der Form "$\dfrac{0}{0}$". Man findet den Grenzwert durch die folgende Umformung

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}-x}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{ax}-x\right)\left(\sqrt{ax}+x\right)}{(x-a)\left(\sqrt{ax}+x\right)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{ax-x^2}{(x-a)\left(\sqrt{ax}+x\right)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{-x\,(x-a)}{(x-a)\left(\sqrt{ax}+x\right)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{-x}{\sqrt{ax}+x}\\
&= -\frac{1}{2}\quad \text{für } a>0.
\end{aligned}$$

Für $a=0$ erhalten wir

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1.$$

Für $a<0$ erhalten wir wegen $\lim\limits_{x\to a}(x-a)=0$ und $\lim\limits_{x\to a\pm}\left(\sqrt{ax}-x\right)=-a-a=-2a$, sowie $x-a<0$ für $x<a$ und $x-a>0$ für $x>a$

$$\lim_{x\to a\pm}\frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}=\pm\infty.$$

(f) Der Ausdruck $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-b}\right)$ ist von der Form "$\infty-\infty$". Man findet den Grenzwert durch die folgende Erweiterung

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-b}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-b}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-b}\right)}{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-b}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+a-(x-b)}{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-b}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{a+b}{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-b}\right)}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 7. *Potenzreihen*

Bestimmen Sie die Konvergenzradien und Entwicklungspunkte der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n\, n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2(z-1+2i)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n z^{2n}}{2n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+\sqrt{2}-i)^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2^n} z^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(z^2+4z+4\right)^n$

Skizzieren Sie jeweils den Konvergenzkreis. Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = -1$. Wir berechnen den Konvergenzradius ρ mit Hilfe des Wurzelkriteriums. Mit Koeffizienten $a_n = \dfrac{1}{2^n n}$ ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n n}\right|} = \frac{1}{2}.$$

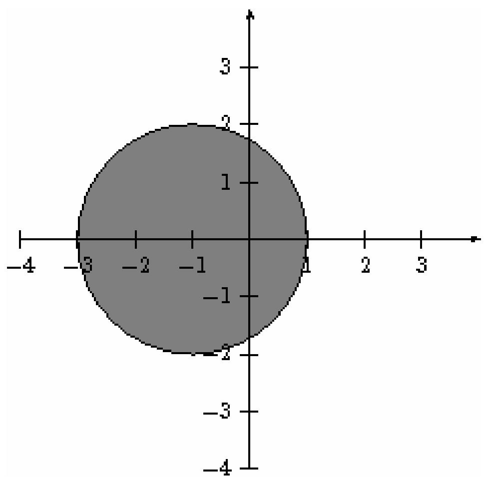
Der Konvergenzradius ist $\rho = \dfrac{1}{a} = 2$. Die Reihe konvergiert für jedes z aus dem offenen Intervall $(-3, 1)$. Um den Konvergenzbereich festzustellen, müssen wir noch das Verhalten in den Randpunkten -3 und 1 untersuchen. Für $z = -3$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Diese Reihe ist eine alternierende Reihe, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert. Für $z = 1$ dagegen ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

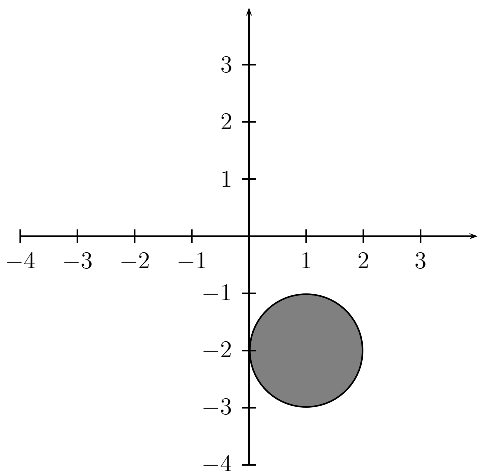
Diese Reihe ist divergent (Beispiel 1.9.16 im Skript). Daher konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n n}$ auf dem Intervall $[-3, 1)$.



(b) Wir berechnen

$$a = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1.$$

So gilt für den Konvergenzradius $\rho = 1$. Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 1 - 2i$.

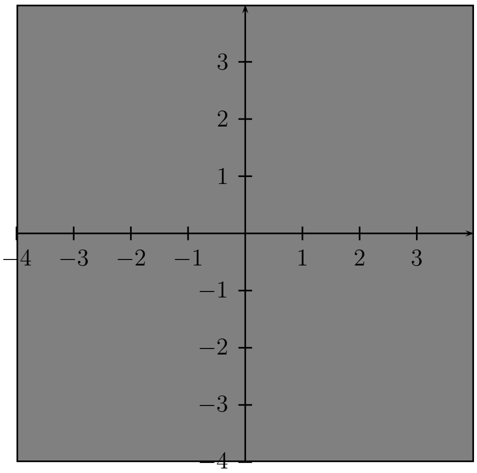


Wie, aus der Skizze ersichtlich ist, konvergiert die Reihe für kein $z \in \mathbb{R}$.

(c) Wir erkennen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n z^{2n}}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{2n!} - 1 = \cos(2z) - 1.$$

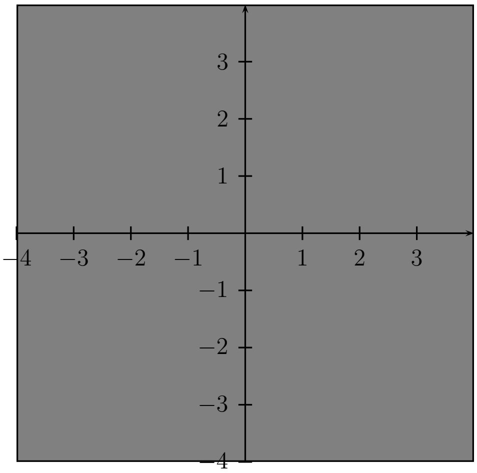
Das ist eine Potenzreihe für $\cos(2z)$, die aber für jedes beliebige $z \in C$ konvergiert $(\rho = +\infty)$. Es gilt das selbe auch für die gegebene Reihe. Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 0$.



(d) Wir berechnen

$$a = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

So gilt für den Konvergenzradius $\rho = +\infty$. Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = -\sqrt{2}+i$.



(e) Wir berechnen den Konvergenzradius mit Hilfe des Wurzelkriteriums

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{2}.$$

So gilt für den Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 0$.

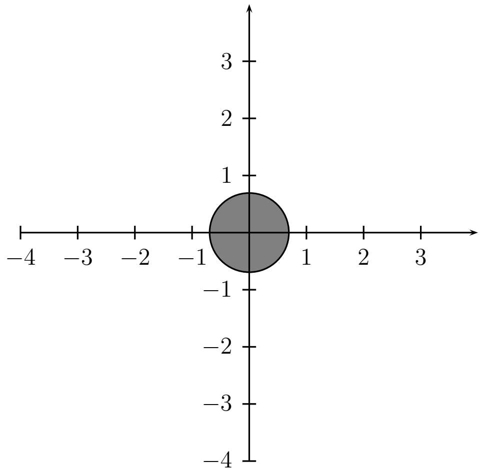
Die Reihe konvergiert für jedes z aus dem offenen Intervall $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Um den Konvergenzbereich festzustellen, müssen wir noch das Verhalten in den Randpunkten $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ untersuchen. Für $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} -1.$$

Diese Reihe ist divergent. Für $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dagegen ergibt sich die divergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

Daher konvergiert die gegebene Reihe auf dem Intervall $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.



(f) Es gilt

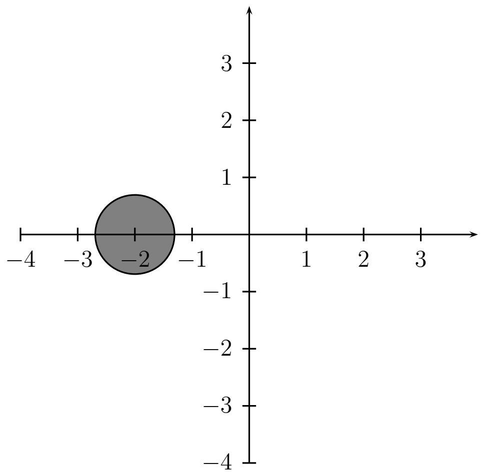
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(z^2 + 4z + 4\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left((z+2)^2\right)^n$$

Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = -2$. Es bietet sich an durch $u = (z+2)^2$ zu substituieren. Wir wissen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$$

Es folgt, unter Berücksichtigung der Substitution, dass

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n$ divergiert, konvergiert die Reihe nur auf dem offenen reellen Intervall $\left(-2-\frac{1}{\sqrt{2}}, -2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Aufgabe H 8. *Ableitungen*

Berechnen Sie für folgende Funktionen die Ableitung nach x:

(a) $f_1 : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{\tan x}$

Lösungshinweise hierzu: Mit der Quotientenregel ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f_1(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) &= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cos x}{(\sin x)^2} = \\ &= \frac{-1}{(\sin x)^2}\end{aligned}$$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sinh(\sqrt{1+x^2})$

Lösungshinweise hierzu: Zweifaches Anwenden der Kettenregel liefert:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f_2(x) &= \frac{d}{dx}(\sinh(\sqrt{1+x^2})) = \\ &= \cosh(\sqrt{1+x^2})\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cosh(\sqrt{1+x^2})\end{aligned}$$

(c) $f_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}\ln(1+x^4)$

Lösungshinweise hierzu: Diesmal mit Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f_3(x) &= \frac{d}{dx}(x^{1/3}\ln(1+x^4)) = \\ &= \frac{1}{3}x^{-2/3}\ln(1+x^4) + x^{1/3}\frac{1}{1+x^4}4x^3 = \\ &= \frac{\ln(1+x^4)}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4x^3\sqrt[3]{x}}{1+x^4}\end{aligned}$$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^4+1}e^x$

Lösungshinweise hierzu: Mit Produkt- und Quotientenregel berechnet sich:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f_4(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^4+1}\cdot e^x\right) = \\ &= \frac{x^2-1}{x^4+1}e^x + \frac{(x^4+1)2x - (x^2-1)4x^3}{(x^4+1)^2}e^x = \\ &= \left(\frac{x^6-x^4+x^2-1}{(x^4+1)^2} + \frac{2x^5+2x-4x^5+4x^3}{(x^4+1)^2}\right)e^x = \\ &= \frac{x^6-2x^5-x^4+4x^3+x^2+2x-1}{(x^4+1)^2}e^x\end{aligned}$$

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{1+(\sin(x))^2}$

Lösungshinweise hierzu: Man benötigt Produkt-, Ketten- und Quotientenregel und erhält:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f_5(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x \cos x}{1+(\sin x)^2}\right) = \\
&= \frac{(1+(\sin x)^2)((\cos x)^2-(\sin x)^2) - \sin x \cos x \; 2 \sin x \cos x}{(1+(\sin x)^2)^2} = \\
&= \frac{(\cos x)^2-(\sin x)^2+(\sin x)^2(\cos x)^2-(\sin x)^4-2(\cos x)^2(\sin x)^2}{(1+(\sin x)^2)^2} = \\
&= \frac{\overbrace{(\cos x)^2}^{=1-(\sin x)^2} - (\sin x)^2 - (\sin x)^2\overbrace{((\sin x)^2+(\cos x)^2)}^{=1}}{(1+(\sin x)^2)^2} = \\
&= \frac{1-3(\sin x)^2}{(1+(\sin x)^2)^2}
\end{aligned}$$

(f) $f_6 : (0,\pi) \to \mathbb{R} : x \mapsto (\sin(x))^x$

Lösungshinweise hierzu: Aus der Identität

$$a = e^{\ln a},$$

für $a > 0$, sowie aus Ketten- und Produktregel folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f_6(x) = \frac{d}{dx}\left((\sin x)^x\right) = \frac{d}{dx}\left((e^{\ln(\sin x)})^x\right) &= \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln(\sin x)}\right) = \\
&= e^{x\ln(\sin x)}\left(\ln(\sin x) + x\frac{1}{\sin x}\cos x\right) = \\
&= (\sin x)^x\left(\ln(\sin x) + \frac{\cos x}{\sin x}\,x\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe H 9. *Fibonacci-Zahlen*

Die Folge (a_n) der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Für den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

gilt $\rho \geqq \frac{1}{2}$.

Lösungshinweise hierzu: Wie man mit vollständiger Induktion sieht, gilt $a_n \leqq 2^n$:
Induktionsanfang: Es gilt $a_0 = 1 \leqq 2^0$ und $a_1 = 1 \leqq 2^1$, die Behauptung ist somit für $n = 0$ und $n = 1$ richtig.
Induktionsschluss: Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Ist die Behauptung für $n-1$ und n bewiesen, so folgt

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \leqq 2^n + 2^{n-1} \leqq 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Folglich ergibt sich $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leqq 2$ und damit gilt für den Konvergenzradius ρ der zu betrachtenden Potenzreihe $r = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} \geqq \frac{1}{2}$.

A. Kirchhoff,
T. Pfrommer,
M. Kutter, Dr. I. Rybak

4. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Prof. Dr. M. Stroppel
Prof. Dr. A. Sändig

Sommersemester 2010

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 10. *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^4}$

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(3x)}{\tan(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin(x)} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln(x)\ln(1-x)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x\,(e^x+1) - 2\,(e^x-1)}{x^2}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Ausdruck ist von der Form "$\frac{\infty}{\infty}$". Die Regel von l'Hospital liefert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4x^4} = 0.$$

(b) Der Ausdruck ist von der Form "$\frac{\infty}{\infty}$". Die Regel von l'Hospital dreimal angewandt liefert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3(\cos(x))^2}{(\cos(3x))^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{6\cos(x)(-\sin(x))}{2\cos(3x)(-3\sin(3x))}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)\sin(x)}{\cos(3x)\sin(3x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(x))^2-(\sin(x))^2}{3((\cos(3x))^2-(\sin(3x))^2)}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2(\cos(x))^2-1}{3(2(\cos(3x))^2-1)} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(c) Der Ausdruck ist von der Form "$\frac{0}{0}$". Die Regel von l'Hospital dreimal angewandt liefert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin(x)} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^2\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{2x\sin(x)+x^2\cos(x)}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2\sin(x)+4x\cos(x)-x^2\sin(x)}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{6\cos(x)-6x\sin(x)-x^2\cos(x)} = \frac{1}{2+4} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(d) Der Ausdruck ist von der Form "$\frac{0}{0}$". Die Regel von l'Hospital zweimal angewandt liefert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-} \ln(x)\ln(1-x) &= \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 1-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{-1}{x(\ln(x))^2}} \\ &= \lim_{x\to 1-} \frac{x(\ln(x))^2}{1-x} = \lim_{x\to 1-} \frac{(\ln(x))^2 + 2\ln(x)}{-1} = \frac{0+2\cdot 0}{-1} = 0.\end{aligned}$$

(e) Der Ausdruck ist von der Form "$\frac{0}{0}$". Die Regel von l'Hospital zweimal angewandt liefert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+1+xe^x-2e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+xe^x-e^x}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Aufgabe H 11. *Taylorpolynom*

Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ ist das Intervall $I := [-2\pi k, 2\pi k]$ gegeben. Weiter ist auf I die Funktion $\sin\big|_I : I \to \mathbb{R}: x \mapsto \sin(x)$ definiert.

(a) Überprüfen Sie, ob die Funktion $\sin\big|_I$ die Voraussetzungen des Satzes von Taylor in dem Intervall I erfüllt.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_5(\sin\big|_I, x, 0)$.

(c) In anwendungsbezogenen Vorlesungen wird Ihnen häufig eine Aussage der Form „*für kleine Winkel können wir* $\sin(x)$ *durch* x *ersetzen*" begegnen. Darf man das wirklich? Was sind „*kleine Winkel*"? Stellen Sie diese an sich gewagte Behauptung auf ein solides mathematisches Fundament, indem Sie sich das Restglied $R_2(\sin\big|_I, x, 0)$ anschauen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da die Funktion $\sin|_I : I \to \mathbb{R}$ stetig und unendlich oft stetig differenzierbar im Intervall I ist, sind die Voraussetzungen des Satzes von Taylor im Intervall I erfüllt.

(b) Es gilt $f(x) := \sin x = -f''(x) = f^{(4)}(x)$, sowie $f'(x) = \cos x = -f'''(x) = f^{(5)}(x)$. Damit berechnen wir $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 0$ und $f'(0) = -f'''(0) = f^{(5)}(0) = 1$. Damit können wir das Taylorpolynom 5. Stufe angeben:

$$T_5(f|_I, x, 0) = \sum_{n=0}^{5} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

(c) Das Restglied R_2 hat die Form

$$R_2(\sin|_I, x, 0) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!} x^3,$$

wobei $0 < \xi_x < x$. Da das Restglied R_2 gerade den Fehler bei der Approximation von $\sin$ durch das Taylorpolynom 1. Stufe beschreibt, gilt

$$\sin x = x + R_2(\sin|_I, x, 0) \quad \text{und damit} \quad \frac{\sin x}{x} = 1 + \frac{R_2(\sin|_I, x, 0)}{x} \quad \text{für } x \neq 0.$$

Eine Abschätzung der rechten Seite ergibt

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqq 1 + \frac{x^3}{x \cdot 3!} = 1 + \frac{x^2}{6} \to 1 \quad \text{für } x \to 0.$$

Aufgabe H 12. *Umkehrfunktion der Cosinus-Funktion*

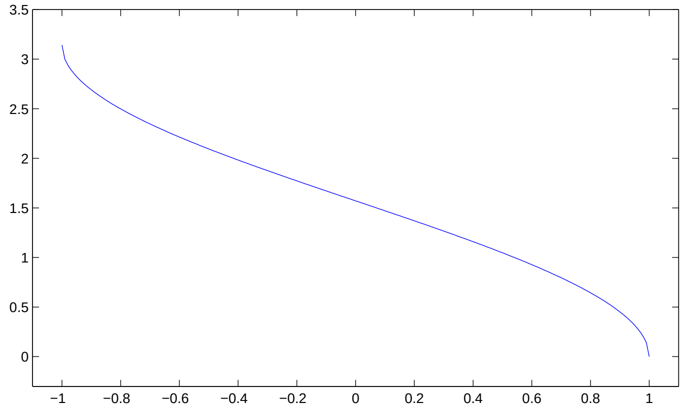
(a) Schränken Sie die Cosinus-Funktion $\cos$ im Definitionsbereich so auf ein geeignetes Intervall ein, daß die Umkehrfunktion *Arcuscosinus* $\arccos$ existiert und skizzieren Sie diese.

(b) Berechnen Sie $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\arccos(x)\right|_{x=x_0}$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

(c) Zeigen Sie $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten die Funktion $\cos|_{[0,\pi]} \colon [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$. $\cos|_{[0,\pi]}$ ist bijektiv und besitzt somit eine Umkehrfunktion $\arccos$.



(b) Der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion liefert mit $x_0 = \cos y_0$ und der Formel aus der Präsenzaufgebe P11 (b)

$$\left.\frac{d}{dx}\arccos x\right|_{x=x_0} = \frac{1}{\left.\frac{d}{dy}\cos y\right|_{y=y_0}} = \frac{1}{-\sin y_0} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos {y_0}^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

(c) Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{R}$$

berechnen wir

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\arcsin x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-\arcsin x)\\ &= 0 - 1\cdot(-\sin(\arcsin x)) = x.\end{aligned}$$

Da $\cos$ eine bijektive Funktion auf dem Intervall $[0, \pi]$ ist, gilt somit

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 13. *Taylorpolynome*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) : x \mapsto \arctan x$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Stufe $T_3(f, x, x_0)$ bezüglich des Entwicklungspunktes $x_0 = 0$.

Lösungshinweise hierzu: Um das Taylorpolynom 3. Stufe samt Restglied angeben zu können, brauchen wir die ersten vier Ableitungen von f.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2},\\
f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\\
f'''(x) &= 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3},\\
f^{(4)}(x) &= 24x\frac{1-x^2}{(1+x^2)^4}.
\end{aligned}$$

Das gesuchte Taylorpolynom 3. Stufe lautet dann wie folgt:

$$T_3(f, x, 0) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = x - \frac{x^3}{3}.$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von T_3 eine Näherung für $\arctan 0.1$.

Lösungshinweise hierzu: Eine mögliche Näherung für $\arctan 0.1$ ist gegeben durch $T_3(f, 0.1, 0)$.

$$T_3(f, 0.1, 0) = 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3} = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} = \frac{299}{3000}.$$

(c) Untersuchen Sie das Restglied $R_3(f, x, 0)$, um eine Schranke für den Fehler $|f(0.1) - T_3(f, 0.1, 0)|$ zu erhalten.

Lösungshinweise hierzu: Das Restglied R_3 lautet

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = \xi\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^4}x^4,$$

wobei $\xi \in [0, x]$. Wir wählen nun $x = 0.1$ und erhalten mit $1-\xi^2 \leqq 1$ und $(1+\xi^2)^4 \geqq 1$ eine mögliche Restgliedabschätzung durch

$$|R_3(x)| \leqq 0.1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 0.1^4 = 10^{-5}.$$

Wenn wir als Näherungsformel $\arctan x \approx x - \dfrac{x^3}{3}$ verwenden, dann ist der Fehler bei $x = 0.1$ also maximal 10^{-5}.

Aufgabe H 14. *Potenzreihen und Differentialgleichungen*
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$f' = \alpha f\,,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ist. Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$f'(x) = \alpha f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sei nun f eine solche Funktion.

(a) Bestimmen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ und schließen Sie dabei induktiv, dass f beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Lösungshinweise hierzu: Da f stetig differenzierbar ist, so folgt aus der Differentialgleichung

$$f' = \alpha f,$$

dass auch f' stetig differenzierbar ist und somit induktiv auch $f^{(n)}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Ebenso induktiv ergibt sich damit

$$f^{(n)} = \alpha f^{(n-1)} = \alpha^2 f^{(n-2)} = \cdots = \alpha^n f.$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) die Taylorreihe $T(f, x, 0)$ und anschließend deren Konvergenzradius.

Lösungshinweise hierzu: Die Taylorreihe von f ist gegeben durch

$$T(f, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(0) \frac{\alpha^n}{n!} x^n.$$

Das Quotientenkriterium liefert

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha^{n+1}\, n!\, f(0)}{\alpha^n\, (n+1)!\, f(0)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{n+1} = 0.$$

Der Konvergenzradius ist also $\rho = \infty$.

(c) Machen Sie eine Probe, indem Sie sich vergewissern, dass $T(f, x, 0)$ die Differentialgleichung erfüllt, das heißt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} T(f, x, 0) = \alpha \cdot T(f, x, 0)$.

Lösungshinweise hierzu: Nach Satz 2.6.10 des Skriptes ist eine Potenzreihe innerhalb des Konvergenzkreises beliebig oft differenzierbar. $T(f, x, 0)$ ist also in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung berechnet sich (wieder nach Satz 2.6.10) durch

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} T(f, x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \left(f(0) \frac{\alpha^n}{n!} x^n \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(0) \frac{\alpha^n}{n!}\, n\, x^{n-1} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} f(0) \frac{\alpha^n}{n!} x^n \\
&= \alpha T(f, x, 0).
\end{aligned}$$

Also erfüllt $T(f,x,0)$ die Differentialgleichung.

(d) Welche Reihe erhalten Sie für den Anfangswert $f(0) = 1$?

Lösungshinweise hierzu: Im Fall $f(0) = 1$ erhält man die Exponentialreihe

$$T(f,x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = e^{\alpha x}.$$

Aufgabe H 15. *Kurvendiskussion*

Die Funktion f sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f in $\mathbb{R}$ und untersuchen Sie das Verhalten von f an dessen Rändern (gegebenenfalls in $\pm\infty$). Überprüfen Sie die Funktion auf Stetigkeit.

Lösungshinweise hierzu: Der maximale Definitionsbereich von f in $\mathbb{R}$ ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. f ist in ganz D stetig. An den Rändern von D zeigt f folgendes Verhalten:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= 0,\\
\lim_{x\to-1\pm0} f(x) &= +\infty,\\
\lim_{x\to1\pm0} f(x) &= -\infty.
\end{aligned}$$

(b) Untersuchen Sie f auf Symmetrie.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2}\\
&= -\left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}\right)\\
&= -f(x).
\end{aligned}$$

Also ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung. f ist eine ungerade Funktion.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

Lösungshinweise hierzu: Für $x \in D$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ &\Leftrightarrow (1-x)^2 = (1+x)^2 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 = 1 + 2x + x^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = 4x \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Es gibt also genau eine Nullstelle: $x = 0$.

(d) Berechnen Sie f', sowie Art und Lage aller Extremalstellen von f. Bestimmen Sie außerdem die Tangente an den Graphen von f im Punkt $x = 0$.

Lösungshinweise hierzu: Für die Ableitung ergibt sich:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}\right) \\ &= \frac{-2}{(1+x)^3} - \frac{2}{(1-x)^3} \\ &= -\left(\frac{2}{(1+x)^3} + \frac{2}{(1-x)^3}\right) \end{aligned}$$

Um Extremalstellen in D zu ermitteln setzen wir f' gleich Null und erhalten:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{(1+x)^3} = -\frac{2}{(1-x)^3} \\ &\Leftrightarrow (1-x)^3 = -(1+x)^3 \\ &\Leftrightarrow 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = -(1 + 3x + 3x^2 + x^3) \\ &\Leftrightarrow 2 + 6x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

f' hat somit keine reellen Nullstellen und damit gibt es keine Extremalstellen von f in D. Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $x = 0$ ist durch das Taylorpolynom 1. Stufe $T_1(f, x, 0)$ gegeben:

$$T_1(f, x, 0) = f(0) + f'(0)x = -4x.$$

(e) Bestimmen Sie alle Wendepunkte von f.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen zunächst die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{6}{(1+x)^4} - \frac{6}{(1-x)^4}.$$

Kandidaten für Wendepunkte sind Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{6}{(1+x)^4} = \frac{6}{(1-x)^4} \\ &\Leftrightarrow (1-x)^4 = (1+x)^4 \\ &\Leftrightarrow 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 \\ &\Leftrightarrow 0 = 8x + 8x^3 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x^2 = -1 \end{aligned}$$

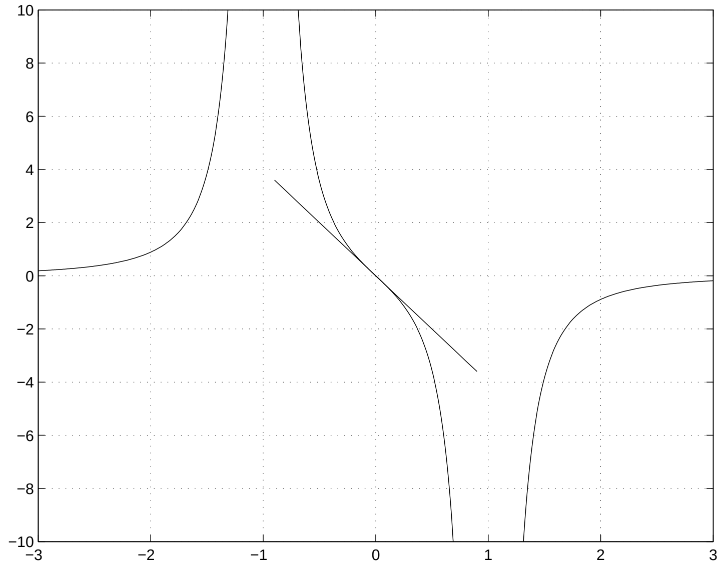
Es folgt, dass $x = 0$ die einzige reelle Nullstelle von f'' ist. Wir überprüfen die dritte Ableitung an der Stelle $x = 0$:

$$f'''(x)|_{x=0} = \left(\frac{-24}{(1+x)^5} - \frac{24}{(1-x)^5} \right)\bigg|_{x=0} = -48 \neq 0.$$

Also hat f' in $x = 0$ ein lokales Extremum und damit hat f in $x = 0$ den einzigen Wendepunkt.

(f) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösungshinweise hierzu:



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 16. *Integrale*

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x+x}\,\mathrm{d}\,x$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}\,x$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 xe^{x^2}\sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x$

Machen Sie in allen Fällen eine Probe.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir substituieren $t = \cos x$. Mit $\mathrm{d}\,t = -\sin x\,\mathrm{d}\,x$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= -\int \frac{1-t^2}{t^2}\,\mathrm{d}\,t = \int \left(1-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}\,t \\ &= \left[t+\frac{1}{t}\right] = \left[\cos x + \frac{1}{\cos x}\right].\end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x = \left[\cos x + \frac{1}{\cos x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} &= \cos(\pi/3) + \frac{1}{\cos(\pi/3)} - \cos(\pi/4) - \frac{1}{\cos(\pi/4)} \\ &= \frac{1}{2} + 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5-3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

(b) Wie in Beispiel 3.3.4 im Skript substituieren wir $x = \sqrt{2}\sin t$. Mit $\mathrm{d}\,x = \sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}\,t$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int \sqrt{2-2(\sin t)^2}\,\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}\,t = 2\int \sqrt{1-(\sin t)^2}\cos t\,\mathrm{d}\,t \\ &= 2\int (\cos t)^2\,\mathrm{d}\,t = 2\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}\,t = \int (1+\cos(2t))\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right] = [t + \sin t\cos t]\,.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir das Additionstheorem $\sin(2t) = 2\sin t\cos t$ benutzt. Durch Resubstitution $t = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, also $\cos t = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$ erhält man schließlich

$$\int \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \left[\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x\sqrt{2-x^2}}{2}\right].$$

(c) Um dieses Integral zu berechnen, zerlegen wir es in zwei bekannte Integrale aus Lemma 3.4.8 und 3.4.9:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{5}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{5}}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}\,x = \frac{5}{2}\int \frac{2x+2-\frac{6}{5}}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{5}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}\,x - 3\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{5}{2}\ln\left(x^2+2x+10\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)\right].\end{aligned}$$

Hierbei haben wir $\beta = 2,\ \gamma = 10,\ \Delta = \gamma - \frac{\beta^2}{4} = 9$ benutzt.

(d) Die reelle Faktorisierung von $x^3 - x$ ist $x(x-1)(x+1)$. Die Partialbruchzerlegung von $\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x+x}$ lautet

$$\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Um die Koeffizienten A, B und C zu bestimmen, multiplizieren wir beide Seiten mit $x(x-1)(x+1)$:

$$2x^2 - 5x + 1 = A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x).$$

Diese Bedingung muss für unendlich viele reelle Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ erfüllt sein. Also stimmen die beiden Polynome links und rechts überein. Wir können A, B und C durch Koeffizientenvergleich berechnen:

$$\begin{aligned} 2 &= A + B + C, \\ -5 &= B - C, \\ 1 &= -A. \end{aligned}$$

Als Lösung dieses inhomogenen LGS ergibt sich

$$A = -1, \qquad B = -1, \qquad C = 4.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x+x} &= -\int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x - \int_2^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x + 4\int_2^3 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= [-\ln|x| - \ln|x-1| + 4\ln|x+1|]_2^3 = \\ &= -\ln 3 - \ln 2 + 4\ln 4 + \ln 2 + \ln 1 - 4\ln 3 = \\ &= 4\ln 4 - 5\ln 3 = \ln\left(\frac{4^4}{3^5}\right) = \ln\left(\frac{256}{243}\right).\end{aligned}$$

(e) Es gilt

$$\int_1^2 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}\,x = \int_1^2 x^{\frac{7}{8}}\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \left[\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}\right]_1^2$$
$$= \frac{8}{15}\left(2^{\frac{15}{8}} - 1\right).$$

(f) Der Integrand ist eine ungerade Funktion. Wir wissen, dass das Integral über eine ungerade Funktion von $-a$ bis a gleich 0 ist. Mit diesem Wissen kann man sich viel Arbeit, wie in der nachfolgenden Rechnung, sparen.
Wir substituieren $u = x^2$ und erhalten

$$\int xe^{x^2}\sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int e^u \sin(u)\,\mathrm{d}\,u$$

Partielle Integration mit $f = e^u$ und $g = \sin(u)$ liefert

$$= \frac{1}{2}\left[e^u \sin(u)\right] - \frac{1}{2}\int e^u \cos(u)\,\mathrm{d}\,u$$

Partielle Integration mit $f = e^u$ und $g = \cos(u)$ liefert

$$= \frac{1}{2}\left[e^u \sin(u) - e^u \cos(u)\right] - \frac{1}{2}\int e^u \sin(u)\,\mathrm{d}\,u$$

Also ist

$$\int e^u \sin(u)\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{2}\left[e^u \sin(u) - e^u \cos(u)\right],$$
$$\frac{1}{2}\int e^u \sin(u)\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{4}\left[e^u \sin(u) - e^u \cos(u)\right],$$

und damit

$$\int_{-1}^1 xe^{x^2}\sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4}\left[e^{x^2}\left(\sin(x^2) - \cos(x^2)\right)\right]_{-1}^1$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^1(\sin(1) - \cos(1)) - e^1(\sin(1) - \cos(1))\right) = 0$$

Aufgabe H 17. *Geschlossene Form*

Bestimmen Sie für die folgenden Reihen den Konvergenzradius und eine geschlossene Form im Inneren des Konvergenzkreises. Der Begriff „geschlossene Form“ ist zu verstehen, wie in Aufgabe P 18.

(a) $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots$

(b) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir haben die folgende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Mit dem Quotientenkriterium erhält man den Konvergenzradius ρ durch

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2(n+1)+1} \cdot \frac{2n+1}{1} \right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1.$$

Leitet man $\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ab, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) = x^{2n}.$$

Die Reihe über x^{2n} lässt sich explizit berechnen, man erhält

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n = \frac{1}{1-x^2}.$$

Weiter berechnet man auf $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ eine Stammfunktion von $\dfrac{1}{1-x^2}$ und erhält

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,\mathrm{d}\,x = \int \left(\frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{-\ln|1-x| + \ln|1+x|}{2} \right] \\
&= \left\{ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Da $\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x} \right) + C$ mit der Reihe übereinstimmen muss, können wir mit

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

für $x = 0$ sofort bestimmen, dass $C = 0$ ist.
Als Ergebnis erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1.$$

(b) Wir erhalten die folgende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n.$$

Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir den Konvergenzradius ρ durch

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}\right)^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n^2+3n+2} = 1.$$

Um die Reihe in eine geschlossene Form zu bringen, integriert man $n(n+1)x^n$ und erhält

$$\int n(n+1)x^n \,\mathrm{d}\,x = \left[nx^{n+1}\right].$$

Die Reihe über nx^{n+1} lässt sich wie in Aufgabe P 18 berechnen, man erhält

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Integriert man nx^{n-1}, so erhält man

$$\int nx^{n-1} \,\mathrm{d}\,x = x^n + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Die Reihe über x^n lässt sich explizit berechnen, man erhält

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1.$$

Also erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1 + C_2\right).$$

Da $\left(\frac{1}{1-x} - 1 + C_2\right)$ mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ übereinstimmen muss, können wir für $x = 0$ sofort bestimmen, dass $C_2 = 0$ ist. Als Ergebnis erhalten wir durch zweimaliges Differenzieren

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

Aufgabe H 18. *Integration für Fortgeschrittene*

Verwenden Sie die Resultate der Universalsubstitution aus Aufgabe P 19 um folgende Integrale zu berechnen

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu: Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1+u(x)^2}{1-u(x)^2}\cdot\frac{2}{1+u(x)^2}\,\mathrm{d}\,u\\ &= \int \frac{2}{1-u(x)^2}\,\mathrm{d}\,u = \int \frac{2}{(1-u(x))(1+u(x))}\,\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

mit Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{(1-u(x))} - \frac{1}{(1+u(x))}\,\mathrm{d}\,u\\ &= [\ln|u(x)+1| - \ln|u(x)-1|] = \left[\ln\left|\frac{u(x)+1}{u(x)-1}\right|\right]\\ &= \left[\ln\left|\frac{\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-1}\right|\right]\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu: Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1+u(x)^2}{2u(x)}\cdot\frac{1+u(x)^2}{1-u(x)^2}\cdot\frac{2}{1+u(x)^2}\,\mathrm{d}\,u\\ &= \int \frac{1}{u(x)}\cdot\frac{1+u(x)^2}{1-u(x)^2}\,\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

mit Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{u(x)} - \frac{1}{u(x)-1} - \frac{1}{u(x)+1}\,\mathrm{d}\,u\\ &= [\ln|u(x)| - \ln|u(x)-1| - \ln|u(x)+1|]\\ &= [\ln|u(x)| - \ln|(u(x)+1)(u(x)-1)|]\\ &= \left[\ln|u(x)| - \ln|(u(x)^2-1)|\right]\\ &= \left[\ln\left|\frac{u(x)}{u(x)^2-1}\right|\right]\\ &= \left[\ln\left|\frac{\tan(x/2)}{\tan(x/2)^2-1}\right|\right]\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 19. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*
Zeigen Sie, dass für alle $x \geqq 0$ folgende Ungleichung gilt:

$$\ln(1+x) \geqq \frac{3}{2} \cdot \frac{x(x+6)}{(x+3)^2} \ .$$

Betrachten Sie hierfür die Ableitung der linken und der rechten Seite, und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Lösungshinweise hierzu: Wir definieren

$$f(x) := \ln(1+x)$$
$$g(x) := \frac{3}{2} \cdot \frac{x(x+6)}{(x+3)^2}$$

Ableiten ergibt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad\qquad g'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{27}{(x+3)^3}$$

Wir zeigen nun, dass $f'(x) \geqq g'(x)$, für alle $x \geqq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &\geqq \frac{27}{(x+3)^3} \\ (x+3)^3 &\geqq 27(1+x) \\ x^3+9x^2+27x+27 &\geqq 27+27x \\ x^3+9x^2 &\geqq 0, \end{aligned}$$

was wegen $x \geqq 0$ erfüllt ist. Auf dieses Wissen wenden wir nun zweimal den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an. Es gilt wegen $f' \geqq g'$ auf dem Intervall $[0,\infty)$ und $f(0) = g(0) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t \geqq \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}\,t = g(x) - g(0) \\ f(x) &= \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t \geqq \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}\,t = g(x), \end{aligned}$$

und somit $f(x) \geqq g(x)$, was zu beweisen war.

Aufgabe H 20. *Uneigentliche Integrale*
Bestimmen Sie, falls möglich, die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x} \,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch zweimalige partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\,x &= \left[-2x^2 e^{-\frac{x}{2}}\right] + 4\int x e^{-\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[-2x^2 e^{-\frac{x}{2}}\right] + 4\left[-2x e^{-\frac{x}{2}}\right] + 8\int e^{-\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[e^{-\frac{x}{2}}\left(-2x^2 - 8x - 16\right)\right].\end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} x^2 e^{-\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[e^{-\frac{x}{2}}\left(-2x^2 - 8x - 16\right)\right]_0^{\beta} \\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{-2\beta^2 - 8\beta - 16}{e^{\frac{\beta}{2}}}\right) + \frac{16}{e^0} = 0 + 16 = 16.\end{aligned}$$

(b) Die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{x^2+x}$ lautet

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Damit ist

$$\int \frac{1}{x^2+x} \,\mathrm{d}\,x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}\,x = \left[\ln|x| - \ln|x+1|\right] = \left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right].$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta} \frac{1}{x^2+x} \,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^{\beta} \\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{\beta}{\beta+1}\right|\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2.\end{aligned}$$

(c) Mit Hilfe von Stammfunktionen von Standardfunktionen 3.1.7 erhalten wir

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\,x = \arcsin(x).$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\, x &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\, x + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\, x \\ &= \lim_{\alpha\to -1} \int_{\alpha}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\, x + \lim_{\beta\to 1} \int_{0}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}\, x \\ &= \lim_{\alpha\to -1} \left[\arcsin(x)\right]_{\alpha}^{0} + \lim_{\beta\to 1} \left[\arcsin(x)\right]_{0}^{\beta} \\ &= \arcsin(0) - \lim_{\alpha\to -1} \arcsin(\alpha) + \lim_{\beta\to 1} \arcsin(\beta) - \arcsin(0) \\ &= 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.\end{aligned}$$

(d) Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}\, x = \left[-\frac{\ln x}{x}\right] + \int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}\, x = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right].$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}\, x &= \lim_{\beta\to+\infty} \int_{1}^{\beta} \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}\, x = \lim_{\beta\to+\infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_{1}^{\beta} \\ &= -\lim_{\beta\to+\infty} \left(\frac{\ln\beta}{\beta}\right) + \frac{\ln 1}{1} - \lim_{\beta\to+\infty} \left(\frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{1} \\ &= 1 - \lim_{\beta\to+\infty} \frac{\ln\beta}{\beta}.\end{aligned}$$

Die Regel von l'Hospital liefert

$$\lim_{\beta\to+\infty} \frac{\ln\beta}{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{\beta} = 0.$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}\, x = 1.$$

Aufgabe H 21. *Bogenlänge und Rotationsfläche*

Sei $r > 0$. Skizzieren Sie die Kurve

$$f\colon (-r,r) \to \mathbb{R} \quad x \mapsto r\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)},$$

bestimmen Sie ihre Bogenlänge

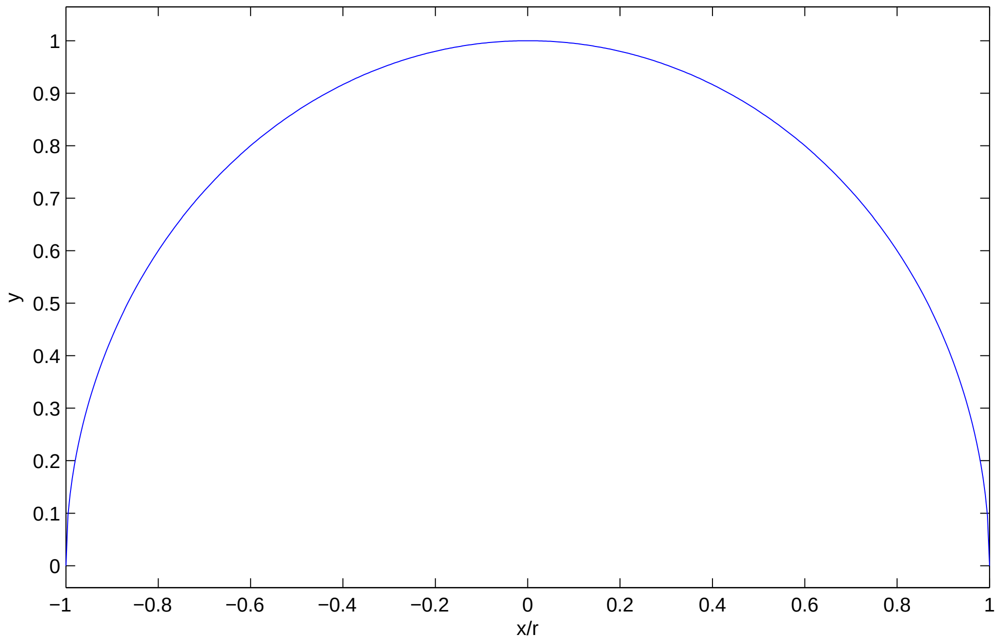
$$s = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

sowie die Rotationsfläche

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Das Ergebnis sollte aus der Schule bekannt sein.

Lösungshinweise hierzu:



Es ist

$$f'(x) = \frac{x}{r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}}$$

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{r^2}}.$$

Mit der Substitution $x = r \sin t$ erhält man $dx = r \cos t dt$ und damit

$$s = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{x^2}{r^2}}} dx = r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t} dt = \pi r.$$

Für die Fläche A erhalten wir

$$A = 2\pi r \int\limits_{-r}^{r} \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}} dx = 4\pi r^2,$$

was der Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius r entspricht.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 22. *Konvergenz mehrdimensionaler Folgen*

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen in $\mathbb{R}^2$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $$\left(\sin\left(\pi n+\frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi n+\frac{2}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b) $$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{1}{n}\right), \sin\left(\pi n+\frac{2}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c) $$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{2^k}, \pi\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\pi^{2k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ und der Stetigkeit der Sinusfunktion erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi n+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin(\pi n)=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi n+\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi n)=0,$$

und daher $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(\pi n+\frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi n+\frac{2}{n}\right)\right)=(0,0).$

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Wegen

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)=\begin{cases}0, & n=2k, \quad k\in\mathbb{Z}\\ 1, & n=4k+1, \quad k\in\mathbb{Z}\\ -1, & n=4k-1 \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

existirt hier kein Grenzwert in $\mathbb{R}$, und daher existiert auch

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{1}{n}\right), \sin\left(\pi n+\frac{2}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

nicht als Grenzwert in $\mathbb{R}^2$.

(c) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{2^k} = -\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = -\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right) = -1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\pi^{2k+1} = \sin\pi = 0,$$

und daher $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{-1}{2^k}\,,\,\pi\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\pi^{2k}\right) = (-1,0).$

Aufgabe H 23. *Funktionen in mehreren Veränderlichen*

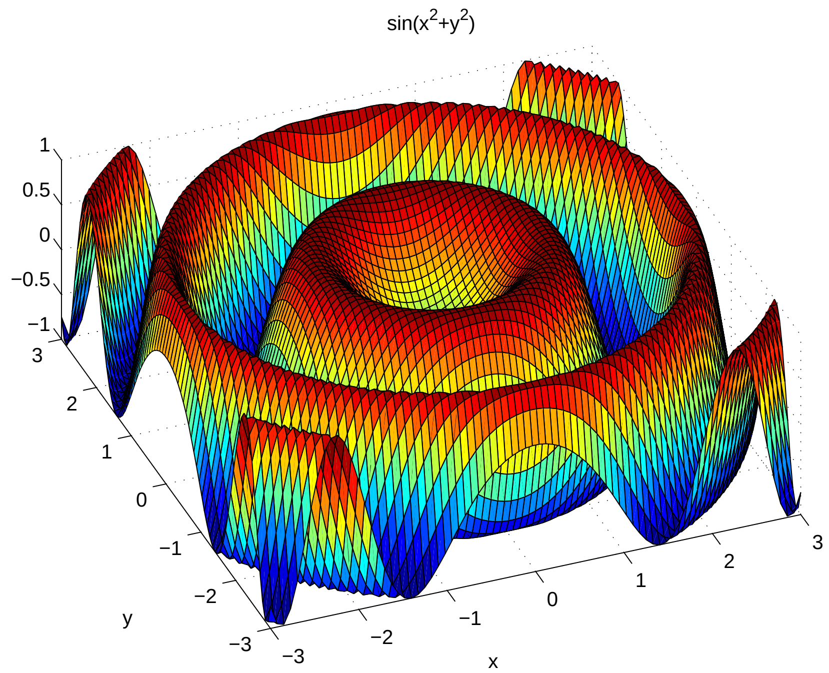
Es ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(x^2+y^2)$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien von f zu den Niveaus $-1, 0$ und 1. Skizzieren Sie mit Hilfe der Niveaulinien und achsenparalleler Schnitte den Graphen.

Lösungshinweise hierzu: Zunächst bestimmen wir die Niveaulinien von f zu den Niveaus $-1, 0$ und 1. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin(x^2+y^2) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = k\pi, \quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\},\\
\sin(x^2+y^2) = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = -\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k\in\mathbb{N},\\
\sin(x^2+y^2) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = \frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.
\end{aligned}$$

Es ergeben sich also Kreise um 0 mit den Radien $\sqrt{k\pi}$, $\sqrt{2k\pi-\frac{\pi}{2}}$, sowie $\sqrt{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$. Als achsenparallelen Schnitt erhalten wir für $y=0$ die Funktion $f(x,0)=\sin(x^2)$. Wegen der Rotationssymmetrie bezüglich des Ursprungs $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)=\sin(r^2)$ lässt sich der Graph damit vollständig beschreiben.



(b) Weiter sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $a_n := \left(\frac{1}{n}\sin(n), \frac{1}{n}\cos(n)\right)$ und $b_n := \left(\frac{2}{n}, \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{n}\right)$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(b_n).$$

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0,$$

sowie

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{4}{n^2} + \frac{\pi}{2} + \frac{9}{n^2} + \frac{6}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Aufgabe H 24. *Funktionen in mehreren Veränderlichen*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon (\mathbb{R}\smallsetminus\{0\})\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x^3 - xy^2}{2x}$$
$$g\colon (\mathbb{R}\smallsetminus\{0\})\times(\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}) \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \frac{x^3 - xy^2}{2xy}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g. Verwenden Sie dazu als Hilfsmittel Niveaulinien und achsenparallele Schnitte.

Lösungshinweise hierzu: Wir bestimmen zunächst die Niveaulinien von f. Für $c \leqq 0$ erhalten wir

$$f(x,y) = c \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2c \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 2c}.$$

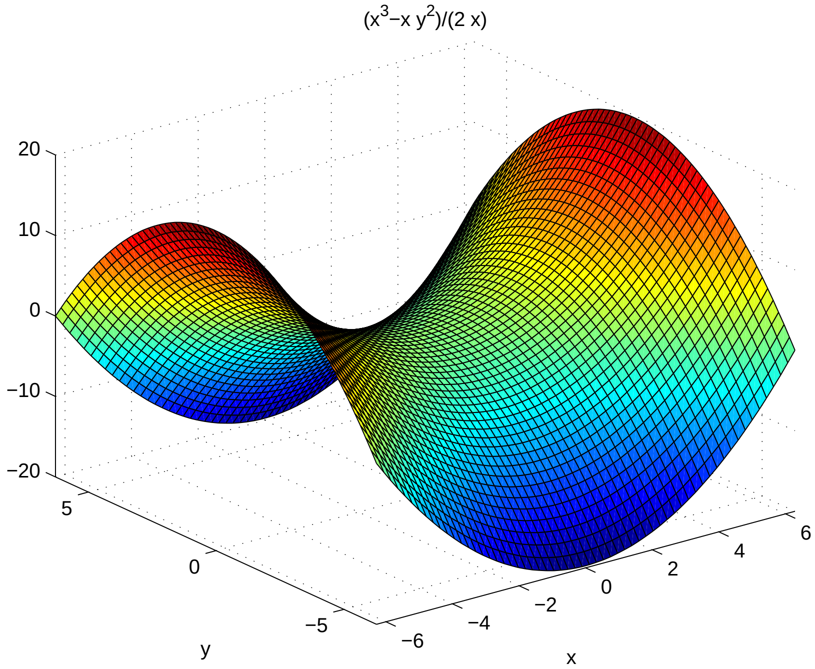
Für $c \geqq 0$ erhalten wir

$$f(x,y) = c \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2c \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + 2c}.$$

Die Niveaulinien von g sind somit Hyperbeln.
Alle achsenparallele Schnitte sind hingegen Parabeln: Für $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(c,y) = \frac{c^2 - y^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$
$$f(x,c) = \frac{x^2 - c^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{c^2}{2}.$$

Wir erhalten folgenden Graphen:



Wir bestimmen zunächst die Niveaulinien von g. Für $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$f(x,y) = c \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2cy \Leftrightarrow y = -c \pm \sqrt{c^2 + x^2}.$$

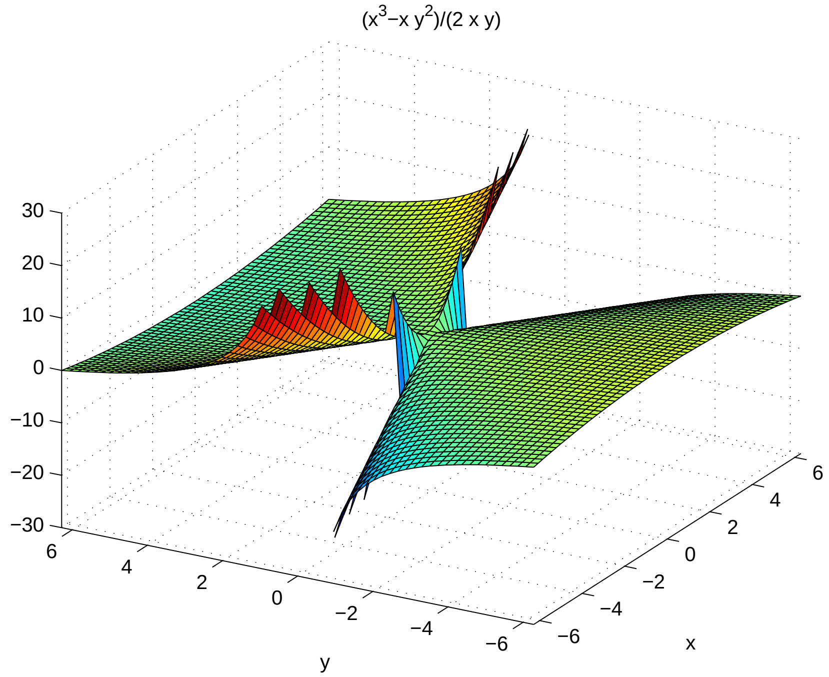
Die Schnitte parallel zur x-Achse sind wieder Parabeln: Für $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt

$$f(x,c) = \frac{x^2 - c^2}{2c} = \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}.$$

Die Schnitte parallel zur y-Achse haben allerdings Singularitäten bei $y = 0$: Für $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(c,y) = \frac{c^2 - y^2}{2y} = -\frac{y}{2} + \frac{c^2}{2y}.$$

Wir erhalten folgenden Graphen:



(b) Sind f und g stetig? Lassen sich f und g stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen?

Lösungshinweise hierzu: Die Funktion f ist stetig auf $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$, denn in diesem Bereich gilt $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$. Analog erkennt man, dass die Funktion g stetig auf $(\mathbb{R}\setminus\{0\})^2$ ist, denn hier gilt $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{2y}$.
Die Funktion f lässt sich stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen. Die Singularität auf der Geraden $x=0$ ist hebbar und

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} f(x,y) & x \neq 0 \\ -y^2 & x = 0 \end{cases}$$

eine stetige Fortsetzung von f.
Die Funktion g ist nicht stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar. Für $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt nämlich

$$\lim_{y\to 0+} g(c,y) = \lim_{y\to 0+} \frac{c^2-y^2}{2y} = -\infty,$$

jedoch ist

$$\lim_{y\to 0-} g(c,y) = \lim_{y\to 0-} \frac{c^2-y^2}{2y} = +\infty.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 25. *Partielle Ableitungen*

Die reellen Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 sind durch die folgenden Zuordnungsvorschriften gegeben:

$$f_1\colon (x,y) \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \qquad f_2\colon (x,y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$f_3\colon (u,v) \mapsto e^{uv}, \qquad f_4\colon (r,\varphi) \mapsto r\sqrt{\cos(2\varphi)}.$$

(a) Bestimmen Sie für $i \in \{1,2,3,4\}$ den maximalen Definitionsbereich $D_i \subseteqq \mathbb{R}^2$ der Funktion f_i.

Lösungshinweise hierzu: Die maximalen Definitionsbereiche lauten

$$\begin{aligned}
D_1 &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\\
D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0\},\\
D_3 &= \mathbb{R}^2,\\
D_4 &= \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \colon \cos(2\varphi) \geqq 0\}.
\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie von den gegebenen Funktionen jeweils die ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

Lösungshinweise hierzu: Die partiellen Ableitungen von f_1 lauten

$$\begin{aligned}
\partial_x f_1(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}\\
\partial_y f_1(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}\\
\partial_x^2 f_1(x,y) &= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\
\partial_y^2 f_1(x,y) &= \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
\partial_{xy} f_1(x,y) = \partial_{yx} f_1(x,y) &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von f_2 lauten

$$\begin{aligned}
\partial_x f_2(x,y) &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} \\
\partial_y f_2(x,y) &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \\
\partial_x^2 f_2(x,y) &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\partial_y^2 f_2(x,y) &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\partial_{xy} f_2(x,y) = \partial_{yx} f_2(x,y) &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von f_3 lauten

$$\begin{aligned}
\partial_u f_3(u,v) &= ve^{uv} \\
\partial_v f_3(u,v) &= ue^{uv} \\
\partial_u^2 f_3(u,v) &= v^2 e^{uv} \\
\partial_v^2 f_3(u,v) &= u^2 e^{uv} \\
\partial_{uv} f_3(u,v) &= \partial_{vu} f_3(x,y) = e^{uv} + uve^{uv} = (1+uv)e^{uv}.
\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von f_4 lauten

$$\begin{aligned}
&\partial_r f_4(r,\varphi) = \sqrt{\cos(2\varphi)} \\
&\partial_\varphi f_4(r,\varphi) = \frac{r}{2\sqrt{\cos(2\varphi)}}(-2\sin(2\varphi)) = \frac{-r\sin(2\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} \\
&\partial_r^2 f_4(r,\varphi) = 0 \\
&\partial_\varphi^2 f_4(r,\varphi) = \frac{-2r\cos(2\varphi)\sqrt{\cos(2\varphi)} + r\sin(2\varphi)\frac{-2\sin(2\varphi)}{2\sqrt{\cos(2\varphi)}}}{\cos(2\varphi)} = -2r\sqrt{\cos(2\varphi)} - \frac{r\sin^2(2\varphi)}{\cos^{\frac{3}{2}}(2\varphi)} \\
&\partial_{r\varphi} f_4(r,\varphi) = \partial_{\varphi x} f_4(r,\varphi) = -\frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 26. *Taylorpolynom*

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x,y),(1,1)\big)$ der Funktion

$$f\colon\ (0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}\colon (x,y)\mapsto x^y\,.$$

Lösungshinweise hierzu: Um das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x,y),(1,1)\big)$ zu berechnen, benötigen wir die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f. Wir verwenden

$f(x,y) = x^y = e^{y \ln x}$, um diese zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= y x^{y-1}, \\
\partial_y f(x,y) &= (\ln x) e^{y \ln x} = (\ln x) x^y, \\
\partial_x^2 f(x,y) &= y(y-1) x^{y-2}, \\
\partial_y^2 f(x,y) &= (\ln x)^2 e^{y \ln x} = (\ln x)^2 x^y, \\
\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) &= \frac{1}{x} x^y + (\ln x) y x^{y-1} = (1 + y \ln x) x^{y-1}.
\end{aligned}$$

Damit berechnet sich T_2 wie folgt.

$$\begin{aligned}
T_2\big(f,(x,y),(1,1)\big) &= \frac{f(1,1)}{0!} + \frac{\partial_x f(1,1)}{1!}(x-1) + \frac{\partial_y f(1,1)}{1!}(y-1) \\
&\quad + \frac{\partial_x^2 f(1,1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{\partial_y^2 f(1,1)}{2!}(y-1)^2 + 2\frac{\partial_{xy} f(1,1)}{2!}(x-1)(y-1) \\
&= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) = 1 - y + xy
\end{aligned}$$

(b) Verwenden Sie die Entwicklung aus Teil **(a)**, um $1.05^{1.02}$ näherungsweise zu berechnen. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem exakten Ergebnis.

Lösungshinweise hierzu: Eine Näherung von $1.05^{1.02}$ erhalten wir durch

$$T_2\big(f,(1.05,1.02),(1,1)\big) = 1 - 1.02 + 1.05 \cdot 1.02 = 1.051.$$

Der Fehler, den wir bei dieser Approximation machen, ist

$$1.05^{1.02} - 1.051 \approx 2.509 \cdot 10^{-5}.$$

Aufgabe H 27. *Differenzierbarkeit*

Gegeben ist die Funktion:

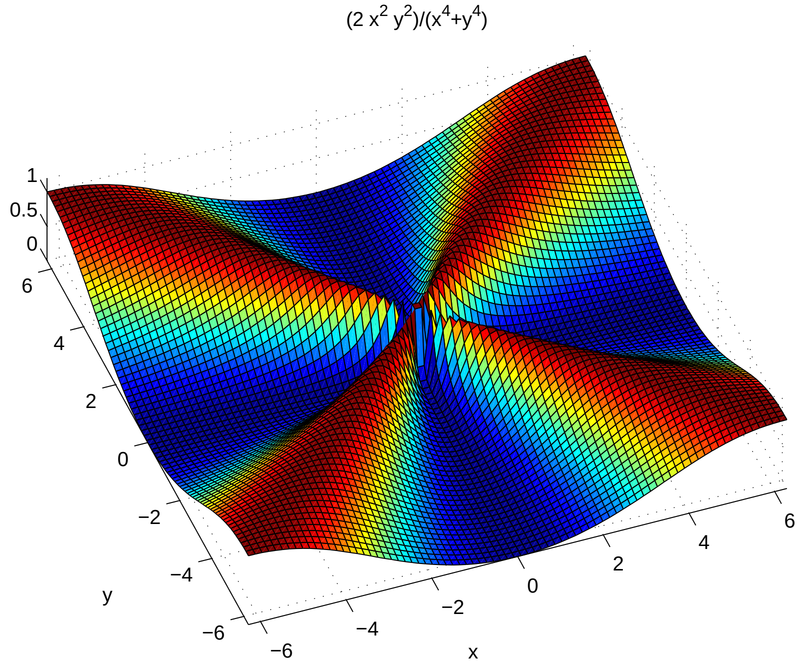
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen:

$$\begin{aligned}
G_0 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x,y) = 0 \right\} \\
G_1 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x,y) = 1 \right\}
\end{aligned}$$

Lösungshinweise hierzu: Zunächst bestimmen wir G_0 und G_1. Es ist

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0 \text{ und} \\
&f(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y \vee x = -y.
\end{aligned}$$



(b) Bestimmen und skizzieren Sie für $c \in \mathbb{R}$ die Niveaulinie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$.

Lösungshinweise hierzu: Für $c \in \mathbb{R}$ gilt $f(x,y) = c \neq 0$ genau für

$$2x^2y^2 = c(x^4+y^4) \Leftrightarrow x^4 + y^4 - \frac{2}{c}x^2y^2 = (x^2-y^2)^2 + \left(2 - \frac{2}{c}\right)x^2y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = \pm xy\sqrt{\frac{2}{c} - 2} \Leftrightarrow y^2 \pm xy\sqrt{\frac{2}{c} - 2} - x^2 = 0$$

Diese Gleichung ist lösbar genau für $\frac{2}{c} \geqq 2$, also für $0 < c \leqq 1$. Das bedeutet, dass die Funktion f nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$y = \frac{\mp x\sqrt{\frac{2}{c}-2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{c}-2\right)x^2 + 4x^2}}{2} = \left(\mp\frac{\sqrt{\frac{2}{c}-2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2+\frac{2}{c}}}{2}\right)x,$$

für jedes $c \in (0,1)$ gibt es damit 4 Ursprungsgeraden als Niveaulinien, für $c \in \{0,1\}$, wie in (a) berechnet, jeweils 2 Ursprungsgeraden.

(c) Bestimmen Sie für alle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ die partiellen Ableitungen $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$, $f_{xy}(x_0,y_0)$, $f_{yx}(x_0,y_0)$, $f_{xx}(x_0,y_0)$ und $f_{yy}(x_0,y_0)$.

Lösungshinweise hierzu: Die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f lauten

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{4xy^2(x^4+y^4)-4x^3 2x^2y^2}{(x^4+y^4)^2} = \frac{4xy^2(y^4-x^4)}{(x^4+y^4)^2},\\
f_y(x,y) &= \frac{4x^2y(x^4-y^4)}{(x^4+y^4)^2},\\
f_{xx}(x,y) &= \frac{(4y^6-20x^4y^2)(x^4+y^4)^2-2(x^4+y^4)4x^3(4xy^6-4x^5y^2)}{(x^4+y^4)^4}\\
&= \frac{4y^2(y^8+3x^8-12x^4y^4)}{(x^4+y^4)^3},\\
f_{yy}(x,y) &= \frac{4x^2(x^8+3y^8-12x^4y^4)}{(x^4+y^4)^3},\\
f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= \frac{8xy(6x^4y^4-x^8-y^8)}{(x^4+y^4)^3}.
\end{aligned}$$

(d) Untersuchen Sie die Funktion f auf totale Differenzierbarkeit.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt $f(0,0)=0$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = 1 \neq 0.$$

Daraus folgt, dass f in $(0,0)$ unstetig, und somit nicht total differenzierbar ist. Die reine Existenz der partiellen Ableitungen reicht also als Kriterium für die totale Differenzierbarkeit nicht aus, sie müssen auch stetig sein.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 28. *Extrema*

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)\,, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f$.

(b) Geben Sie alle kritischen Punkte von f an (d.h. Punkte mit $\operatorname{grad} f = 0$).

(c) Berechnen Sie an allen kritischen Stellen $(\hat{x},\hat{y})$ das Taylorpolynom $T_2(f,(x,y),(\hat{x},\hat{y}))$ und bestimmen Sie den Typ der Schmiegquadrik an den Graph von f in den kritischen Punkten.

(d) Bestimmen Sie alle Extrema von f.

(e) Geben Sie den Wertebereich von f an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Als Gradient erhalten wir

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y)\sin(x+y) + \sin(x)\sin(y)\cos(x+y) \\ \sin(x)\cos(y)\sin(x+y) + \sin(x)\sin(y)\cos(x+y) \end{pmatrix}\,.$$

Mit Additionstheorem 0.4.3, erhalten wir

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \sin(y)\sin(2x+y) \\ \sin(x)\sin(x+2y) \end{pmatrix}.$$

Als Hessematrix erhalten wir

$$\mathrm{H}f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\sin(y)\cos(2x+y), \\ f_{xy} &= \cos(y)\sin(2x+y) + \sin(y)\cos(2x+y) = \sin(2x+2y) = f_{yx}, \\ f_{yy} &= 2\sin(x)\cos(x+2y). \end{aligned}$$

(b) Wir berechnen $\operatorname{grad} f = 0$ und erhalten zwei kritische Punkte von f:

$$P_1 = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \qquad P_2 = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

(c) Die Schmiegquadrik an den Graph von f im Punkt P ist durch die Gleichung $z = T_2(f,(x,y),P)$ gegeben (Spezialfall 4.4.15). Wir berechnen das Taylorpolynom der Stufe 2 in den kritischen Punkten. Für $P_1 = \left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
T_2\left(f,(x,y),\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\right) &= f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) + f_x\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + f_y\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\left(y-\frac{\pi}{3}\right) \\
&+ \frac{1}{2}f_{xx}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + f_{xy}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(y-\frac{\pi}{3}\right) \\
&+ \frac{1}{2}f_{yy}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\left(y-\frac{\pi}{3}\right)^2 \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(y-\frac{\pi}{3}\right) \\
&- \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y-\frac{\pi}{3}\right)^2,
\end{aligned}$$

und damit ist die Schmiegquadrik im Punkt $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ gegeben durch

$$z = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\left(y-\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y-\frac{2\pi}{3}\right)^2.$$

Analog erhalten wir das Taylorpolynom der Stufe 2 in Punkt $P_2 = \left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$:

$$T_2\left(f,(x,y),P_2\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\left(y-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y-\frac{2\pi}{3}\right)^2,$$

Die Schmiegquadrik im Punkt $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ ist durch

$$z = -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\left(y-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y-\frac{2\pi}{3}\right)^2$$

gegeben.

(d) Wir berechnen die Hessematrix in den kritischen Punkten:

$$\mathrm{H}f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $d(P_1) = \det \mathrm{H}f(P_1) = f_{xx}(P_1)f_{yy}(P_1) - f_{xy}(P_1)^2 = \frac{9}{4}$. Wegen $d(P_1) > 0$ und $f_{xx}(P_1) < 0$ liegt bei P_1 ein lokales Maximum vor (Satz 4.5.8). Weiter berechnen wir $f(P_1) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Analog erhalten wir $d(P_2) = \frac{9}{4}$. Wegen $d(P_2) > 0$ und $f_{xx}(P_1) > 0$ liegt bei P_2 ein lokales Minimum vor (Satz 4.5.8). Wir erhalten $f(P_2) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$.
Zum Schluss bestimmen wir den Typ der Schmiegquadrik an den Graphen von f in den kritischen Punkten.
Bei P_1 liegt ein Maximum vor. Die Hesse-Matrix in diesem Punkt ist negativ definit (Satz 4.5.5), deshalb hat die quadratische Form

$$q_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\left(y - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{\pi}{3}\right)^2$$

zwei negative Eigenwerte: $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$ (Lemma 4.5.4). Die Quadrik hat die Form $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2z = 0$ (elliptisches Paraboloid).
Bei P_2 liegt ein Minimum vor. Die Hesse-Matrix in diesem Punkt ist positiv definit (Satz 4.5.5), deshalb hat die quadratische Form

$$q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\left(y - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{\pi}{3}\right)^2$$

zwei positive Eigenwerte: $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$ (Lemma 4.5.4). Die Quadrik hat die Form $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2z = 0$ (elliptisches Paraboloid).

(e) Für den Wertebereich von f erhalten wir $W_f = [f(P_2), f(P_1)] = \left[-\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right]$.

Aufgabe H 29. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Es soll eine Konservendose mit vorgegebenen Volumen $V_0 > 0$ hergestellt werden. Die Dose wird als idealer Zylinder mit Höhe h, Deckel- bzw. Bodenradius r und Volumen V angenommen. Um Materialkosten zu sparen stellt sich folgende Optimierungsaufgabe: Man bestimme r und h so, dass die gesamte Zylinderoberfläche minimal wird unter der Nebenbedingung, dass $V = V_0$ gilt. Zur Lösung dieser Aufgabe soll die Multiplikatormethode nach Lagrange verwendet werden.

(a) Geben Sie die Gesamtoberfläche des Zylinders in Abhängigkeit von r und h an.

Lösungshinweise hierzu:

$$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

(b) Formulieren Sie die Nebenbedingung $V = V_0$ als Nullstellenbedingung $g(r,h) = 0$ mit Hilfe einer Funktion $g(r,h)$ in Abhängigkeit von r und h.

Lösungshinweise hierzu: Für das Volumen eines Zylinders gilt:

$$V = \pi r^2 h.$$

Definiere

$$g(r,h) = \pi r^2 h - V_0.$$

Dann ist $V = V_0$ äquivalent zu $g(r,h) = 0$.

(c) Geben Sie das Gleichungssystem an, auf das die Multiplikatormethode nach Lagrange führt. Berechnen Sie alle reellen Lösungen dieses Gleichungssystems.

Lösungshinweise hierzu: Nach der Multiplikatormethode gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass für ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(r,h) = 0$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(A(r,h) + \lambda g(r,h)\right) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial h}\left(A(r,h) + \lambda g(r,h)\right) = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \pi r^2 h - V_0 &= 0, \\ 4\pi r + 2\pi h + \lambda\, 2\pi r h &= 0, \\ 2\pi r + \lambda\, \pi r^2 &= 0, \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichung die Nebenbedingung selbst ist. Die Lösungen sind

$$r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}, \quad h = 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}, \quad \lambda = -2\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V_0}}.$$

Aufgabe H 30. *Kugel- und Zylinderkoordinaten*

(a) Sei $D_1 = \{(r,\varphi,\psi)^\top | 0 < r < \infty, 0 \leqq \varphi < 2\pi, 0 \leqq \psi \leqq \pi\}$ und

$$f_1 \colon D_1 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\psi) \\ r\sin(\varphi)\sin(\psi) \\ r\cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

Man nennt f_1 Parametrisierung von $\mathbb{R}^3 \smallsetminus (0,0)$ durch Kugelkoordinaten. Berechnen Sie die Jacobimatrix von f_1 und deren Determinante.

Lösungshinweise hierzu: Die Jacobimatrix ist

$$\begin{aligned} \mathrm{J}\, f_1(r,\varphi,\psi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\varphi,\psi) & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}(r,\varphi,\psi) & \frac{\partial f_1}{\partial \psi}(r,\varphi,\psi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\psi) & -r\sin(\varphi)\sin(\psi) & r\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ \sin(\varphi)\sin(\psi) & r\cos(\varphi)\sin(\psi) & r\sin(\varphi)\cos(\psi) \\ \cos(\psi) & 0 & -r\sin(\psi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus errechnet sich die Determinante

$$\det(\mathrm{J}\, f_1(r,\varphi,\psi)) = -r^2\sin(\psi).$$

(b) Sei $D_2 = \{(r,\varphi,z)^\top | 0 < r < \infty, 0 \leqq \varphi < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$ und

$$f_2 \colon D_2 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}.$$

Man nennt f_2 Parametrisierung von $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0)$ durch Zylinderkoordinaten. Berechnen Sie die Jacobimatrix von f_2 und deren Determinante.

Lösungshinweise hierzu: Die Jacobimatrix ist

$$\begin{aligned} \mathrm{J}\, f_2(r,\varphi,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\varphi,z) & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}(r,\varphi,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(r,\varphi,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus errechnet sich die Determinante

$$\det(\mathrm{J}\, f_1(r,\varphi,\psi)) = r.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 31. *Differentiationsregeln*

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Felder direkt und unter Verwendung der Kettenregel. Untersuchen Sie Definitions- und Wertebereich aller dabei auftretenden Funktionen.

(a) $f(x,y,z) = f_2(f_1(x,y,z))$
mit $f_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+1$ und $f_2(t) = \ln(t)$,

(b) $g(x,y,z) = g_2(g_1(x,y,z))$
mit $g_1(x,y,z) = (x+y,\, x-z)^\intercal$ und $g_2(u,v) = (uv,\, \cos(u+v),\, \sin(u-v))^\intercal$,

(c) $h(t) = h_2(h_1(t))$
mit $h_1(t) = (\cos t,\, \sin t)^\intercal$ und $h_2(x,y) = (x^2,\, xy,\, y^2)^\intercal$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Direkt (Definition 4.7.1):

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}f(x,y,z) &= (\operatorname{grad} f(x,y,z))^\intercal = \left(\operatorname{grad}\ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)\right)^\intercal \\
&= \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1},\ \frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1},\ \frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\cdot(2x,\ 2y,\ 2z).
\end{aligned}$$

Kettenregel (4.8.3): mit $f_2(t) = \ln(t)$ und $f_1(x,y) = x^2+y^2+z^2+1$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}f(x,y,z) &= \mathrm{J}(f_2\circ f_1)(x,y) = (\mathrm{J}f_2(f_1(x,y,z)))\cdot(\mathrm{J}f_1(x,y,z)) \\
&= f_2'(f_1(x,y,z))\cdot(\operatorname{grad} f_1(x,y,z))^\intercal = \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1}\cdot(2x,\ 2y,\ 2z).
\end{aligned}$$

Definitionsbereiche und Wertebereiche:

$$\begin{array}{lllllllll}
D_f &=& \mathbb{R}^3, & D_{f_1} &=& \mathbb{R}^3, & D_{f_2} &=& \mathbb{R}^+, \\
W_f &=& \mathbb{R}_0^+, & W_{f_1} &=& 1+\mathbb{R}_0^+, & W_{f_2} &=& \mathbb{R}.
\end{array}$$

(b) Direkt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}g(x,y,z) &= \mathrm{J}\begin{pmatrix}(x+y)(x-z)\\ \cos(x+y+x-z)\\ \sin(x+y-x+z)\end{pmatrix} = \mathrm{J}\begin{pmatrix}x^2+xy-xz-yz\\ \cos(2x+y-z)\\ \sin(y+z)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x+y-z & x-z & -x-y \\ -2\sin(2x+y-z) & -\sin(2x+y-z) & \sin(2x+y-z) \\ 0 & \cos(y+z) & \cos(y+z)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}g(x,y,z) &= \mathrm{J}(g_2\circ g_1)(x,y,z) = \mathrm{J}g_2(g_1(x,y,z))\cdot \mathrm{J}g_1(x,y,z)\\
&= \begin{pmatrix} x-z & x+y\\ -\sin(2x+y-z) & -\sin(2x+y-z)\\ \cos(y+z) & -\cos(y+z)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2x+y-z & x-z & -x-y\\ -2\sin(2x+y-z) & -\sin(2x+y-z) & \sin(2x+y-z)\\ 0 & \cos(y+z) & \cos(y+z)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Definitionsbereiche und Wertebereiche:

$$\begin{array}{rcl rcl rcl}
D_g &=& \mathbb{R}^3, & D_{g_1} &=& \mathbb{R}^3, & D_{g_2} &=& \mathbb{R}^2,\\
W_g &=& \mathbb{R}\times[-1,1]\times[-1,1], & W_{g_1} &=& \mathbb{R}^2, & W_{g_2} &=& \mathbb{R}\times[-1,1]\times[-1,1].
\end{array}$$

(c) Direkt:

$$\mathrm{J}h(t) = \mathrm{J}\begin{pmatrix}(\cos t)^2\\ \cos t\sin t\\ (\sin t)^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\cos t\sin t\\ -(\sin t)^2+(\cos t)^2\\ 2\sin t\cos t\end{pmatrix}.$$

Kettenregel: mit $h_1(t) = (\cos t,\, \sin t)^\mathsf{T}$ und $h_2(x,y) = (x^2,\, xy,\, y^2)^\mathsf{T}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}h(t) = \mathrm{J}(h_2\circ h_1)(t) = \mathrm{J}h_2(h_1(t))\cdot \mathrm{J}h_1(t) &= \begin{pmatrix}2\cos t & 0\\ \sin t & \cos t\\ 0 & 2\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-2\cos t\sin t\\ -(\sin t)^2+(\cos t)^2\\ 2\sin t\cos t\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Definitionsbereiche und Wertebereiche:

$$\begin{array}{rcl rcl rcl}
D_h &=& \mathbb{R}, & D_{h_1} &=& \mathbb{R}, & D_{h_2} &=& \mathbb{R}^2,\\
W_h &=& [0,1]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times[0,1], & W_{h_1} &=& [-1,1]^2, & W_{h_2} &=& \mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+.
\end{array}$$

Aufgabe H 32. *Potential*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2x\ln(y)\\ \alpha^2\dfrac{x^2}{y}+\alpha\beta z e^{-y}\\ e^{-y}\end{pmatrix}$$

mit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(a) Für welche α und β besitzt das Vektorfeld ein Potential?

(b) Bestimmen Sie für die oben bestimmten α und β die Menge *aller* Potentiale.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Jacobimatrix lautet

$$Jf = \begin{pmatrix} 2\ln(y) & 2\dfrac{x}{y} & 0 \\ 2\alpha^2\dfrac{x}{y} & -\alpha^2\dfrac{x^2}{y^2} - \alpha\beta z e^{-y} & \alpha\beta e^{-y} \\ 0 & -e^{-y} & 0 \end{pmatrix}$$

Ein Potential liegt genau dann vor, wenn diese Matrix symmetrisch ist. Also wenn $\alpha = \pm 1$ und $\beta = -\alpha$.

(b) Wir definieren

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &:= 2x\ln(y) \\ f_2(x,y,z) &:= \frac{x^2}{y} - ze^{-y} \\ f_3(x,y,z) &:= e^{-y} \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\int f_1 \,\mathrm{d}\,x = x^2\ln(y) + c(y,z) =: g_1(x,y,z)$$

Diesen Ausdruck leiten wir nach y ab

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + \frac{\partial c(y,z)}{\partial y}$$

und setzen mit f_2 gleich. Es folgt

$$c(y,z) = \int -ze^{-y}\,\mathrm{d}\,y = ze^{-y} + c(z) =: g_2(x,y,z)$$

Nun wird nach z abgeleitet

$$\frac{\partial g_2}{\partial z} = e^{-y} + \frac{\partial c(z)}{\partial z}$$

und mit f_3 gleichgesetzt. Wir erhalten $c(z) = c$.
Die Menge aller Potentiale ist somit

$$U(x,y,z) = x^2\ln(y) + ze^{-y} + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H 33. *Gradient, Jacobi-Matrix und Rotation*

Gegeben ist die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2y^2$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla h(x,y)$.

(b) Berechnen Sie den Funktionswert der Funktion $\tilde{h}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto \nabla h(x,y)$ in den Punkten $(\pm 1, \pm 1)^\intercal$, $(\pm 2, \pm\frac{1}{2})^\intercal$, $(\pm\frac{1}{2}, \pm 2)^\intercal$ und skizzieren Sie damit die Niveaulinie $h(x,y) = 1$.

(c) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{J}\tilde{h}(x,y)$.

(d) Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$ ist die *Rotation* $\operatorname{rot} f$ durch folgende Zuordnung definiert:

$$\operatorname{rot} f(x,y) := \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y)\,.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{rot}\tilde{h}(x,y)$.

Lösungshinweise hierzu:

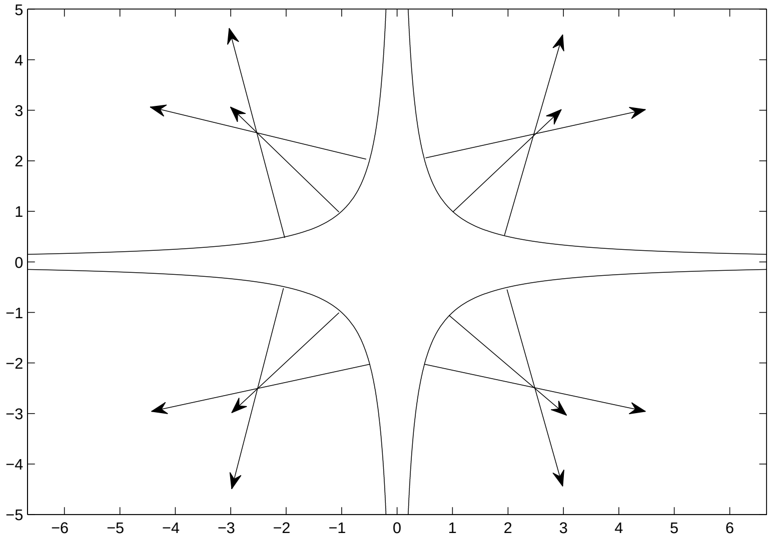
(a) Der Gradient von h lautet

$$\tilde{h}(x,y) := \nabla h(x,y) = (2xy^2, 2x^2y)^\intercal.$$

(b) Die Funktionswerte von $\tilde{h}$ an den angegebenen Stellen sind

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(1,1) &= -\tilde{h}(-1,-1) = (2,2)^\intercal\\
\tilde{h}(1,-1) &= -\tilde{h}(-1,1) = (2,-2)^\intercal\\
\tilde{h}(2,\frac{1}{2}) &= -\tilde{h}(-2,-\frac{1}{2}) = (1,4)^\intercal\\
\tilde{h}(-2,\frac{1}{2}) &= -\tilde{h}(2,-\frac{1}{2}) = (-1,4)^\intercal\\
\tilde{h}(\frac{1}{2},2) &= -\tilde{h}(-\frac{1}{2},-2) = (4,1)^\intercal\\
\tilde{h}(\frac{1}{2},-2) &= -\tilde{h}(-\frac{1}{2},2) = (4,-1)^\intercal.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die folgende Niveaulinie $h(x,y) = 1$:



(c) Die Jacobi-Matrix von $\tilde{h}$ ist gerade die Hesse-Matrix von h und lautet

$$J\tilde{h}(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

(d) Die Rotation von $\tilde{h}$ lautet dann

$$\operatorname{rot} \tilde{h}(x,y) = 4xy - 4xy = 0.$$

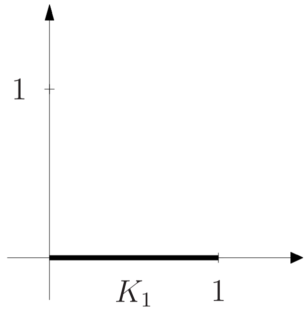
Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

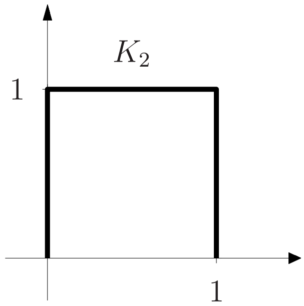
Aufgabe H 34. *Parametrisierung, Kurvenintegrale*

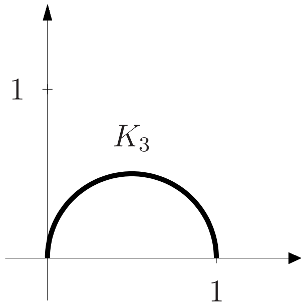
Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}\, s$$

über die unten skizzierten Wege K_1, K_2 und K_3 vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,0)$.







Lösungshinweise hierzu: Eine Parametrisierung von K_1 lautet

$$C_1(t) = (t,0)^\intercal \quad t \in [0,1]$$

Damit gilt

$$\int\limits_{K_1} (x^2+y^2)ds = \int\limits_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Eine Parametrisierung von K_2 lautet

$$C_{2,1}(t) = (0,t)^\intercal,\ C_{2,2}(t) = (t,1)^\intercal,\ C_{2,3}(t) = (1,1-t)^\intercal \quad t \in [0,1].$$

Damit gilt

$$\int\limits_{K_2} (x^2+y^2)ds = \int\limits_0^1 (t^2+1+t^2+1+(1-t)^2)dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + 2t - \frac{(1-t)^3}{3}\right]_0^1 = 3.$$

Eine Parametrisierung von K_3 lautet

$$C_3(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(t), \sin(t))^\intercal \quad t \in [0,\pi]$$

Damit gilt

$$\int\limits_{K_3} (x^2+y^2)ds = \frac{1}{8}\int\limits_0^\pi ((1-\cos(t))^2 + \sin^2(t))dt = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe H 35. *Potential mittels Kurvenintegral*

(a) Gegeben seien die vier Punkte

$$P_1 = (0,0,0), \quad P_2 = (a,0,0), \quad P_3 = (a,b,0), \quad P_4 = (a,b,c)\,.$$

Finden Sie für $i \in \{1,2,3\}$ Parametrisierungen C_i von Kurven, welche vom Punkt P_i zum Punkt P_{i+1} laufen.

Lösungshinweise hierzu: Mögliche Parametrisierungen der Kurven K_i und deren Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= (t,0,0)^\intercal \quad t \in [0,a] \quad C_1'(t) = (1,0,0)^\intercal, \\
C_2(t) &= (a,t,0)^\intercal \quad t \in [0,b] \quad C_2'(t) = (0,1,0)^\intercal, \\
C_3(t) &= (a,b,t)^\intercal \quad t \in [0,c] \quad C_3'(t) = (0,0,1)^\intercal.
\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie ein Potential des Vektorfeldes

$$g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) \to \big(\sin(z),\ 2\,y\,z,\ x\,\cos(z) + y^2\big)^\intercal$$

indem Sie die Wegintegrale über C_1, C_2 und C_3 summieren.

Lösungshinweise hierzu: Ein gesuchtes Potential U berechnet sich dann folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
U(x,y,z) &= \int_0^x g(C_1(t))C_1'(t)dt + \int_0^y g(C_2(t))C_2'(t)dt + \int_0^z g(C_3(t))C_3'(t)dt \\
&= \int_0^x 0dt + \int_0^y 0dt + \int_0^z (x\cos(t) + y^2)dt = zy^2 + [x\sin(t)]_0^z \\
&= x\sin(z) + zy^2.
\end{aligned}$$

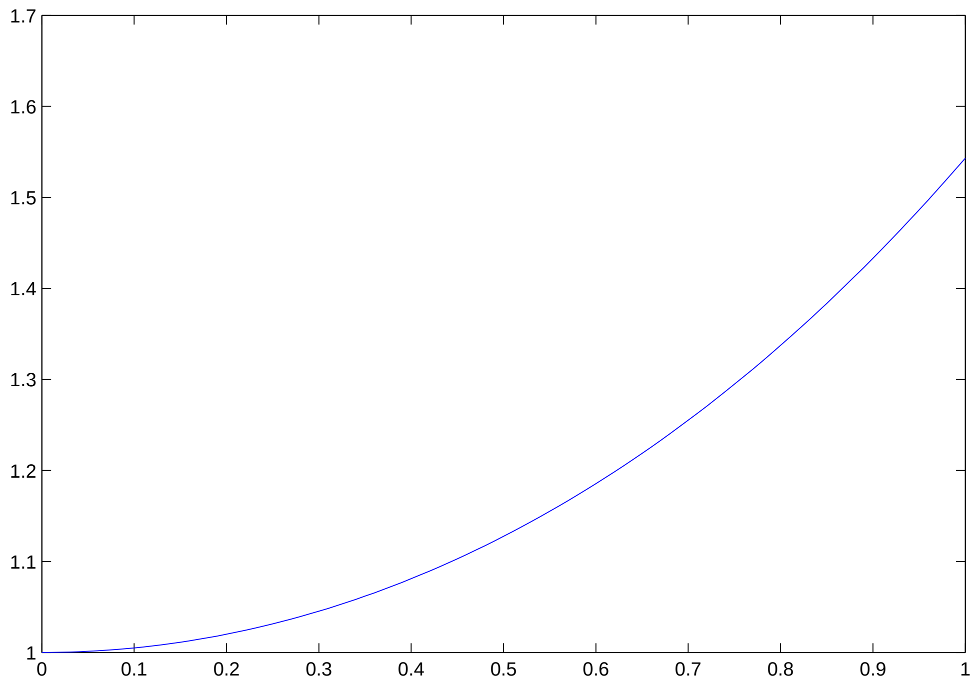
Aufgabe H 36. *Kurvenintegrale*

Bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale längs K:

(a) $\int_K (x_1^2 + x_2)\,\mathrm{d}\,s$ mit $C\colon\ [0,1] \to K \colon t \mapsto \big(\ t\,,\ \ \cosh(t)\ \big)^\intercal$
Zusatz: Skizzieren Sie die Kurve K in einem Koordinatensystem.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_K (x_1^2 + x_2) ds &= \int\limits_0^1 (t^2 + \cosh(t))\sqrt{1+\sinh(t)}dt = \int\limits_0^1 (t^2 + \cosh(t))\cosh(t)dt \\
&= \int\limits_0^1 t^2 \cosh(t)dt + \int\limits_0^1 \cosh^2(t)dt \\
&= [t^2 \sinh(t)]_0^1 - \int\limits_0^1 2t\sinh(t)dt + \left[\frac{\sinh(t)\cosh(t)}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^1 \\
&= \sinh(1) - [2t\cosh(t)]_0^1 + \int\limits_0^1 2\cosh(t)dt + \frac{\sinh(1)\cosh(1)}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \sinh(1) - 2\cosh(1) + [2\sinh(t)]_0^1 + \frac{\sinh(1)\cosh(1)}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 3\sinh(1) - 2\cosh(1) + \frac{1}{2}(1 + \sinh(1)\cosh(1)).
\end{aligned}
$$



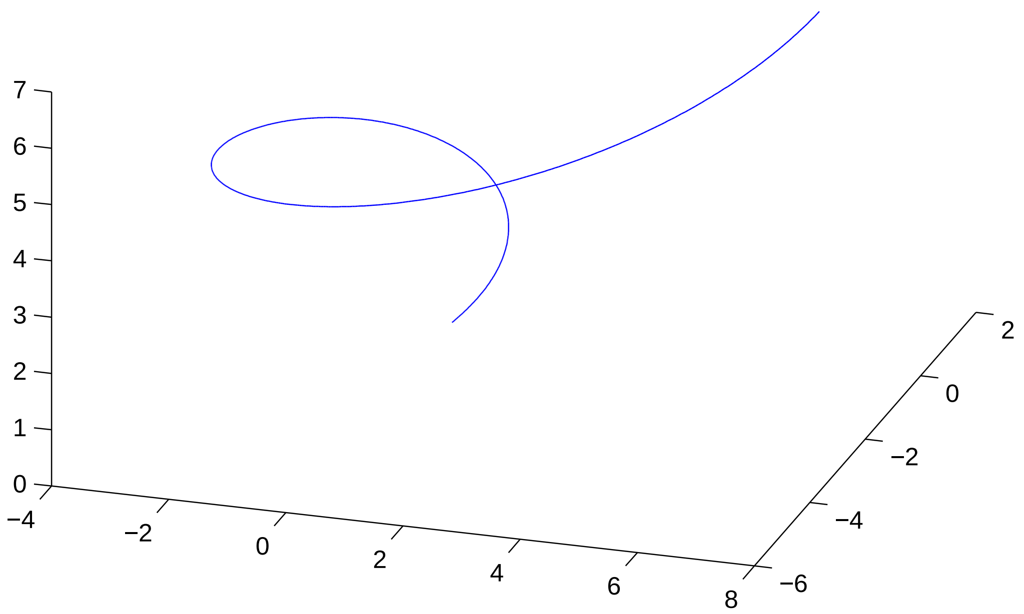
(b) $\int_K \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,\mathrm{d}\,s$ mit $C\colon\ [0, 2\pi] \to K : t \mapsto \left(\ t\ \cos(t)\,,\ \ t\ \sin(t)\,,\ \ t\ \right)^\mathsf{T}$
Zusatz: Skizzieren Sie die Kurve K in einem Koordinatensystem.

Lösungshinweise hierzu: Mit

$$|C'(t)| = \sqrt{\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t - \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2+t^2}$$

berechnet man

$$\begin{aligned}\int\limits_K \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}ds &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2t^2}\sqrt{2+t^2}dt = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{4\pi^2}\sqrt{2+u}du = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(2+u)^3}\right]_0^{4\pi^2} \\ &= \frac{4}{3}(\sqrt{(1+2\pi^2)^3}-1).\end{aligned}$$



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 37. *Potentiale und Kurvenintegrale*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha\frac{z}{x} \\ \frac{z}{y} \\ \ln(xy) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\operatorname{rot} f = (0, -\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x}, 0)^\intercal,$$

sowie

$$\operatorname{div} f = -z\left(\frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right).$$

(b) Bestimmen Sie, für welche Werte von α die Funktion f ein Potential besitzt und berechnen Sie dieses.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt $\operatorname{rot} f = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$. In diesem Fall berechnen wir das Potential wie folgt:

$$U(x, y, z) = \int \frac{z}{x} dx = z\ln(x) + c(y, z).$$

Differentiation nach y liefert

$$\partial_y c(y, z) = \frac{z}{y},$$

und damit

$$c(y, z) = z\ln(y) + \tilde{c}(z).$$

Differentiation nach z liefert

$$\partial_z(z\ln(x) + z\ln(y) + \tilde{c}(z)) = \ln(x) + \ln(y) + \partial_z\tilde{c}(z) = \ln(xy),$$

und damit

$$\tilde{c}(z) = \text{const}.$$

Ein Potential ist damit gegeben durch

$$U(x, y, z) = z\ln(xy).$$

(c) Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von f längs K, wobei K folgende Parametrisierung besitzt:

$$C\colon [-1,1] \to K\colon t \mapsto \begin{pmatrix} e^{(t^2)} \\ 1 \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise hierzu: Da f für $\alpha = 1$ ein Gradientenfeld ist wissen wir, dass

$$\int_K f(x)dx = 0$$

gilt, falls K eine geschlossene Kurve ist. Dies ist wegen $C(-1) = C(1) = (\mathsf{e}, 1, 0)^\mathsf{T}$ erfüllt. Im Fall $\alpha = 0$ besitzt f kein Potential, den Wert des Kurvenintegrals müssen wir also explizit berechnen. Es gilt

$$\int_K f(x)dx = \int_{-1}^{1} (\pi t^2 \cos(\pi t))dt = \pi \left(\left[\frac{t^2}{\pi} \sin(\pi t) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{2t}{\pi} \sin(\pi t) dt \right)$$
$$= \pi \left(\left[\frac{2t}{\pi^2} \cos(\pi t) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi t) dt \right) = -\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} = -\frac{4}{\pi}.$$

Aufgabe H 38. *Wegabhängigkeit von Kurvenintegralen*

Gegeben seien die Vektorfelder

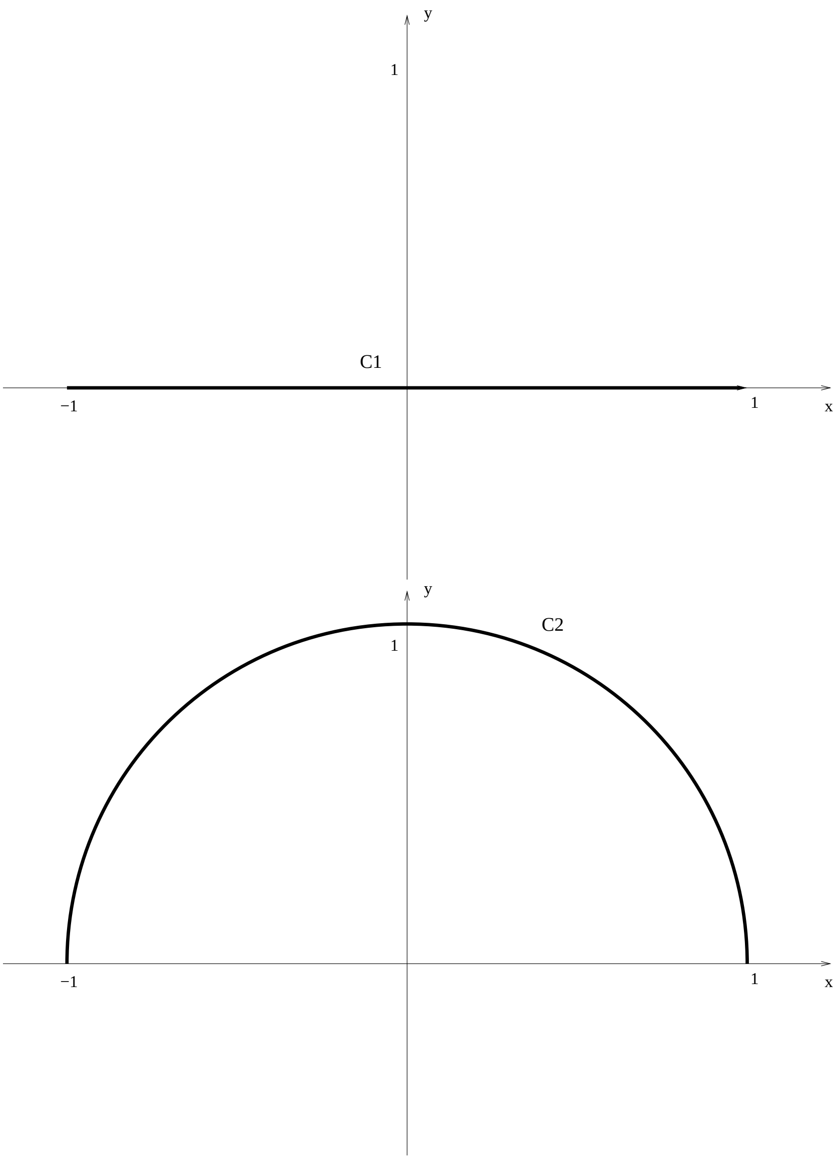
$$f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

sowie die Kurven

$$C_1\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Kurven C_1 und C_2 in der Ebene.

Lösungshinweise hierzu:



(b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale von f_1 längs C_1 bzw. C_2, sowie die Kurvenintegrale von f_2 längs C_1 bzw. C_2. Warum sind die Ergebnisse jeweils verschieden?

Lösungshinweise hierzu:

$$\int_{C_1} f_1(x) \bullet \,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1} f_1(C_1(t)) \cdot C_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{C_2} f_1(x) \bullet \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} -1\,\mathrm{d}t = -\pi$$

$$\int_{C_1} f_2(x) \bullet \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{C_2} f_2(x) \bullet \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin(t))^2 - (\cos(t))^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} 1 - 2(\cos(t))^2\,\mathrm{d}t$$

$$= \pi - 2\left[\tfrac{1}{2}(-\sin(t)\cos(t) + t)\right]_0^{\pi} = 0$$

NR:

$$\int_0^{\pi} (\cos(t))^2\,\mathrm{d}t = [-\sin(t)\cos(t)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (\sin(t))^2\,\mathrm{d}t$$

$$= [-\sin(t)\cos(t)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \left(1 - (\cos(t))^2\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= [-\sin(t)\cos(t) + t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\cos(t))^2\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} (\cos(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,[-\sin(t)\cos(t) + t]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe H 39. *Wahl der Parametrisierung*

Eine Ellipse K habe den Mittelpunkt $(-2, 3)$. Die Länge ihrer großen Halbachse sei 4 und verlaufe parallel zur x_2-Achse. Die Länge ihrer kleinen Halbachse sei 1. Ferner sei das Vektorfeld v definiert durch

$$v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\ (x_1, x_2)^{\intercal} \mapsto \left(2x_1x_2, x_2^2\right)^{\intercal}$$

(a) Parametrisieren Sie die Ellipse durch eine Abbildung $C\colon [0, a] \to \mathbb{R}^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Lösungshinweise hierzu: Man sieht schnell dass die Ellipse durch

$$C^*\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) - 2 \\ 4\sin(t) + 3 \end{pmatrix}$$

parametrisiert wird. Es ist lediglich noch der Definitionsbereicht anzupassen:

$$C\colon [0, a] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{a}t\right) - 2 \\ 4\sin\left(\frac{2\pi}{a}t\right) + 3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_K v \bullet \mathrm{d}\, x$.

Lösungshinweise hierzu: Da das Kurvenintegral unabhängig von der Parametrisierung ist wählen wir nicht C sondern C^*. Es folgt

$$(C^*)' = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 4\cos(t) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_K v \bullet \mathrm{d}\, x &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\,(\cos(t)-2)\,(4\sin(t)+3) \\ 16\,(\sin(t))^2 + 24\sin(t) + 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 4\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t \\
&= \int_0^{2\pi} 56(\sin(t))^2\cos(t) + 90\sin(t)\cos(t) + 16(\sin(t))^2 \\
&+ 12\sin(t) + 36\cos(t)\,\mathrm{d}\, t \\
&= \left[\frac{56}{3}(\sin(t))^2 - 45(\cos(t))^2 + 8t - 4\sin(2t) - 12\cos(t) + 36\sin(t)\right]_0^{2\pi} \\
&= (16\pi - 57) - (-57) = 16\pi
\end{aligned}$$