O. Alaya, R. Bauer
K. Sanei Kashani,
F. Kissling, B. Krinn,
J. Schmid, T. Vassias

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\,3^n}{(5+(-1)^n)^n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^3}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2+1}{n^3+2n}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}\cdot\lim_{n\longrightarrow\infty}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)^{-1}\\ &= \frac{1}{e}\cdot 1 = e^{-1} \neq 0\end{aligned}$$

ist die Reihe divergent. Wurzel- und damit erst recht Quotientenkriterium liefern hier übrigens – wie man sofort sieht (es gilt ja $\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{(n/(n+1))^n} = 1$) – keine Aussage.

(b) Wegen

$$\Big(\frac{n^3\,3^n}{(5+(-1)^n)^n}\Big)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n^3}\,\frac{3}{5+(-1)^n} \leqq \sqrt[n]{n^3}\,\frac{3}{4} \quad (n\in\mathbb{N})$$

gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big(\frac{n^3\,3^n}{(5+(-1)^n)^n}\Big)^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{3}{4} < 1$$

und damit ist die Reihe absolut konvergent nach dem Wurzelkriterium. Das Quotientenkriterium ist hier übrigens nicht anwendbar, denn für $b_n := \frac{3^n}{(5+(-1)^n)^n}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{b_{2n+1}}{b_{2n}} &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\Big(\frac{3}{4}\Big)^{2n+1}\Big/\Big(\frac{3}{6}\Big)^{2n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{3}{4}\Big(\frac{3}{2}\Big)^{2n} = \infty\\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{b_{2n+2}}{b_{2n+1}} &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\Big(\frac{3}{6}\Big)^{2n+2}\Big/\Big(\frac{3}{4}\Big)^{2n+1} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{2n+1} = 0.\end{aligned}$$

(c) Wegen

$$\frac{\sqrt{n}+1}{n^3} \leqq \frac{2\sqrt{n}}{n^3} = \frac{2}{n^{\frac{5}{2}}} \leqq \frac{2}{n^2} \quad (n\in\mathbb{N})$$

ist die Reihe absolut konvergent nach dem Majorantenkriterium. Wurzel- und damit erst recht Quotientenkriterium liefern hier übrigens – wie man leicht sieht (es gilt ja $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\sqrt{n}+1)/n^3} = 1$) – keine Aussage.

(d) Wegen

$$\frac{3n^2+1}{n^3+2n} = \frac{3n^2}{n^3+2n} + \frac{1}{n^3+2n} = \frac{3}{n+\frac{2}{n}} + \frac{1}{n^3+2n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\frac{3}{n+\frac{2}{n}} \searrow 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{sowie} \quad \frac{1}{n^3+2n} \searrow 0 \quad (n \to \infty)$$

ist die Reihe konvergent nach dem Leibnizkriterium. (Dass die zweite Folge monoton gegen 0 fällt, ist klar. Dass die erste Folge monoton gegen 0 fällt, folgt daraus, dass die Nenner-Folge $(c_n) := (n + \frac{2}{n})$ monoton wachsend ist und die Folge im Zähler konstant ist.) Wegen

$$\frac{3n^2+1}{n^3+2n} \geqq \frac{3n^2+1}{n^3+2n^3} \geqq \frac{3n^2}{3n^3} = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ist die Reihe aber nicht absolut konvergent.

Aufgabe H 2. *Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+\cos(n\pi))^n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}$ **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^{\ln n}}$

Hinweis: Beachten Sie für Aufgabenteil **(d)**, dass $e^2 \leqq 9$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen

$$\left(\frac{1}{n(3+\cos(n\pi))^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \, \frac{1}{3+(-1)^n} \leqq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \, \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n(3+\cos(n\pi))^n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{2} < 1$$

und damit konvergiert die Reihe absolut nach dem Wurzelkriterium. Wie in Aufgabe H 1 (b) sieht man, dass das Quotientenkriterium hier nicht anwendbar ist.

(b) Wegen

$$\left(\frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\,\frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leqq \frac{1}{n} \longrightarrow 0 < 1 \quad (n \to \infty)$$

konvergiert die Reihe absolut nach dem Wurzelkriterium. Alternativ könnte man auch das Quotientenkriterium anwenden, denn

$$\frac{((n+1)!)^{n+1}}{(n+1)^{(n+1)^2}} \, \frac{n^{n^2}}{(n!)^n} = \frac{(n!)^{n+1}(n+1)^{n+1}n^{n^2}}{(n!)^n(n+1)^{n^2+2n+1}} \leqq n! \, \frac{(n+1)^{n^2+n+1}}{(n+1)^{n^2+2n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n}$$
$$\leqq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \quad (n \to \infty).$$

(c) Wegen

$$\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2)}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \longrightarrow e^{-1} < 1 \quad (n \to \infty)$$

ist die Reihe absolut konvergent nach dem Wurzelkriterium.

(d) Wegen

$$\frac{1}{9^{\ln n}} \leqq \frac{1}{(e^2)^{\ln n}} = \frac{1}{\left(e^{\ln n}\right)^2} = \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ist die Reihe absolut konvergent nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe H 3. *Grenzwerte von Reihen*

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{11^n}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{9^n}$, **(c)** Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(x))^{2n}$ konvergiert und geben Sie den Wert der Reihe an.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\,(n+1)\,(n+2)}$

Hinweis: Finden Sie Konstanten $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ so, dass $\frac{2}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Reihe ist eine geometrische Reihe mit $q = -6/11$. Da $|q| < 1$ ist, konvergiert die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-6}{11}\right)^n = -1 + \frac{1}{1-(-6/11)} = -1 + \frac{1}{17/11} = -1 + \frac{11}{17} = -\frac{6}{17}.$$

(b) Reihe kann in die geometrischen Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{9}\right)^n$ aufgespalten werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{9}\right)^n = \frac{1}{1-2/9} - 1 + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{28}\,.$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass die Summation bei $n = 1$ beginnt.

(c) Für $x \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$ ist $(\cos(x))^2 < 1$. Also ist die Summe in diesem Fall eine geometrische Reihe und besitzt den Wert

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(x))^{2n} = -1 + \frac{1}{1-(\cos(x))^2} = -1 + \frac{1}{(\sin(x))^2} = (\cot(x))^2.$$

Für $x \in \pi\mathbb{Z}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(x))^{2n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$.

(d) Für die Partialbruchzerlegung machen wir den Ansatz

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

und erhalten nach beidseitiger Erweiterung mit $n(n+1)(n+2)$ und Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$2A = 2, \qquad A + B + C = 0, \qquad 3A + 2B + C = 0$$

mit der eindeutigen Lösung $(A, B, C) = (1, -2, 1)$.

Da wir also gezwungen sind, mit (divergenten) harmonischen Reihen zu rechnen, deren Glieder wir gegeneinander verrechnen möchten, betrachten wir als nächstes die Partialsummen $s_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ und $t_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$, um das zunächst bestehende Problem der Umsortierung dieser Reihen zu umgehen. Mit diesen Bezeichnungen und unter Verwendung von $t_{k+1} = t_k + \frac{1}{k+1}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{k\longrightarrow\infty} s_k &= \lim_{k\longrightarrow\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(2\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - 4\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1} + 2\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(2\underbrace{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}}_{=t_k} - 4\underbrace{\sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{n}}_{=t_{k+1}-1} + 2\underbrace{\sum_{n=2}^{k+2} \frac{1}{n}}_{=t_{k+2}-1-\frac{1}{2}} \right) \\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(2\underbrace{(t_k - 2t_{k+1} + t_{k+2})}_{=-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}} + 1 \right) \\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(\frac{-2}{(k+1)(k+2)} + 1 \right) = 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 4. *Stetigkeit*

Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_j\colon D_j \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, 4$:

$$f_1(x) = \begin{cases} x\cos(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqq 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-x}, & |x| \neq 1 \\ 1, & |x| = 1 \end{cases} \qquad f_4(x) = \sqrt{\sin(x)}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_j \subseteqq \mathbb{R}$, für den die angegebene Abbildungsvorschrift sinnvoll ist. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_j.

(b) Finden Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$f_3(U_\delta(1) \cap D_3) \subseteqq U_\varepsilon(f_3(1)).$$

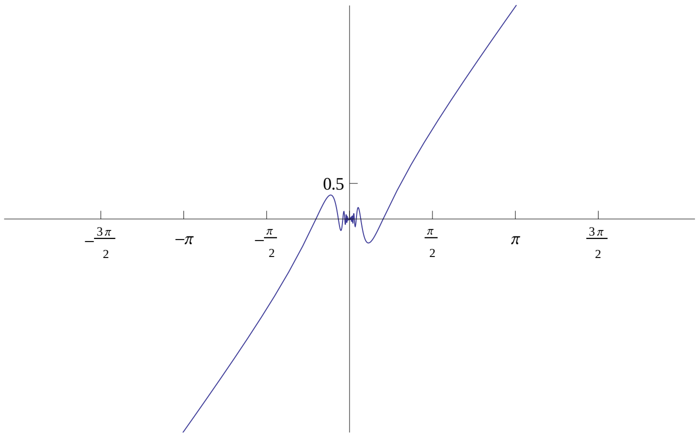
(c) Untersuchen Sie, ob zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass $f_2(U_\delta(0) \cap D_2) \subseteqq U_\varepsilon(f_2(0))$ gilt.

(d) Untersuchen Sie die Funktionen f_j auf Stetigkeit in jedem Punkt von D_j.

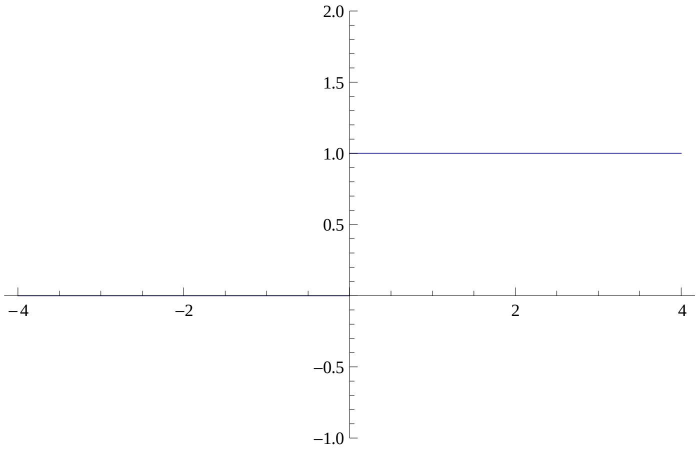
Lösungshinweise hierzu:

(a)

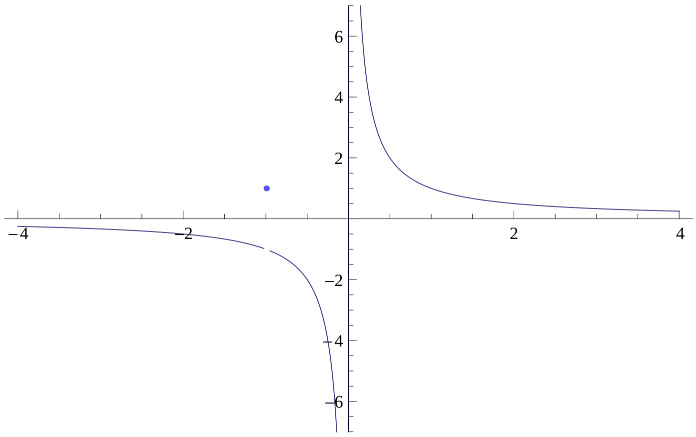
- Das Schaubild von f_1



- Das Schaubild von f_2

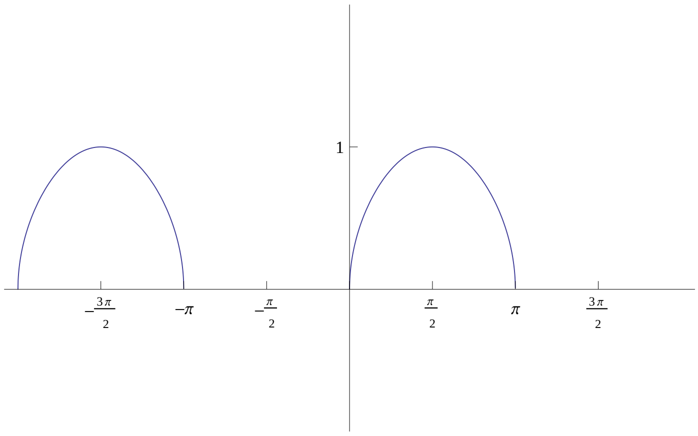


- Das Schaubild von f_3



An der Stelle $x = -1$ ist der Funktionswert 1.

- Das Schaubild von f_4



Die Funktionen f_1 und f_2 können auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden, d.h. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$. Die Funktion f_3 kann man in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ schreiben als

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \ x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\} \\ 1, \ x = -1 \end{cases} .$$

Daher ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ihr maximaler Definitionsbereich. Die Funktion f_4 ist genau dort definiert, wo der Sinus nicht negativ wird. Man erhält daher den maximalen Definitionsbereich

$$D_4 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sin(x) \geqq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{Z} : 2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi\right\} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi, (2k+1)\pi].$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < 1$. Wenn dann $x \in U_\delta(1) \cap D_3 = (1-\delta, 1+\delta)$ ist, so gilt

$$|f_3(x) - f_3(1)| = \frac{|x-1|}{x} < \frac{\delta}{1-\delta} = \varepsilon,$$

mit anderen Worten $f_3(U_\delta(1) \cap D_3) \subseteqq U_\varepsilon(f_3(1))$, wie gewünscht.

(c) Weil für alle $x \in (0,\infty)$

$$|f_2(x) - f_2(0)| = |f_2(x)| = 1$$

gilt, existiert beispielsweise zu $\varepsilon := 1$ (allgemeiner: zu $\varepsilon \in (0,1]$) kein $\delta > 0$ mit $f_2(U_\delta(0) \cap D_2) \subseteqq U_\varepsilon(f_2(0))$.

(d)
- Die Funktion f_1 ist als Verkettung und Produkt der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \ni x \mapsto g_1(x) := x$, $\mathbb{R} \ni x \mapsto g_2(x) := \cos(x)$ und $\mathbb{R}\backslash\{0\} \ni x \mapsto g_3(x) := \frac{1}{x}$ stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Für $x \to 0$ ergibt sich

  $$\lim_{x \longrightarrow 0-0} f_1(x) = 0, \qquad \lim_{x \longrightarrow 0+0} f_1(x) = 0$$

  d.h. f_1 ist bei 0 links- und rechtsseitig stetig (und damit stetig).
- Die Funktion f_2 ist als stückweise konstante Funktion mit einziger Sprungstelle 0 stetig in jedem Punkt von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Für $x \to 0$ ergibt sich

  $$\lim_{x \longrightarrow 0-0} f_2(x) = 0 = f_2(0), \qquad \lim_{x \longrightarrow 0+0} f_2(x) = 1$$

  d. h. f_2 ist bei $x = 0$ linksseitig stetig aber nicht rechtsseitig stetig (und damit unstetig).
- Die Funktion f_3 ist stetig in jedem Punkt von $D_3\backslash\{-1\} = \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$, weil $f_3(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$. Im Punkt -1 ist f_3 unstetig, denn

  $$\lim_{x \to -1} f_3(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x} = -1 \neq 1 = f_3(-1).$$

- Die Funktion f_4 ist als Verkettung der stetigen Funktionen $[0,\infty) \ni x \mapsto g_1(x) := \sqrt{x}$ und $D_4 \ni x \mapsto \sin(x) \in [0,\infty)$ stetig auf D_4.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 5. *Stetigkeit*

Gegeben ist die Menge

$$L := \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

und die folgenden Abbildungen:

$$f\colon \mathbb{R} \smallsetminus L \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x}{\sin(2x)} \qquad g\colon \mathbb{R} \smallsetminus L \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|}\cos(x)$$

$$h\colon \mathbb{R} \smallsetminus L \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left(\frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|} + 1 \right) \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen der gegebenen Funktionen.

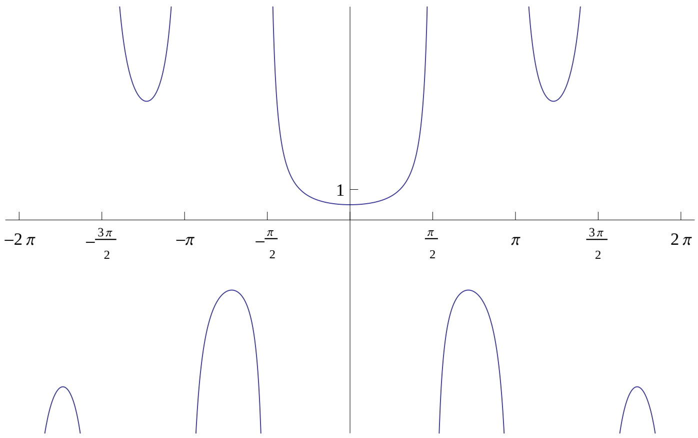
(b) Untersuchen Sie die Funktionen auf Stetigkeit.

(c) Untersuchen Sie für f, g und h an allen Stellen $x_0 \in L$ die rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerte.

(d) An welchen Stellen $x_0 \in L$ lassen sich f, g und h linksseitig stetig ergänzen, wo rechtsseitig? An welchen Stellen kann man sie stetig ergänzen?

Lösungshinweise hierzu:

- Das Schaubild von f:



Die Funktion f ist auf ihrem Definitionsbereich als Verkettung und Multiplikation von stetigen Funktionen stetig (Satz 1.12.14). Für die Definitionslücken $x_0 = k\frac{\pi}{2} \in L$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x \to k\pi/2+0} \frac{x}{\sin(2x)} \begin{cases} \to \infty & k \text{ gerade} \\ \to -\infty & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to k\pi/2-0} \frac{x}{\sin(2x)} \begin{cases} \to -\infty & k \text{ gerade} \\ \to \infty & k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich damit für die Definitionslücken $x_0 = -k\frac{\pi}{2} \in L$ mit $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \to -k\pi/2+0} \frac{x}{\sin(2x)} \begin{cases} \to \infty & k \text{ ungerade} \\ \to -\infty & k \text{ gerade} \end{cases}$$

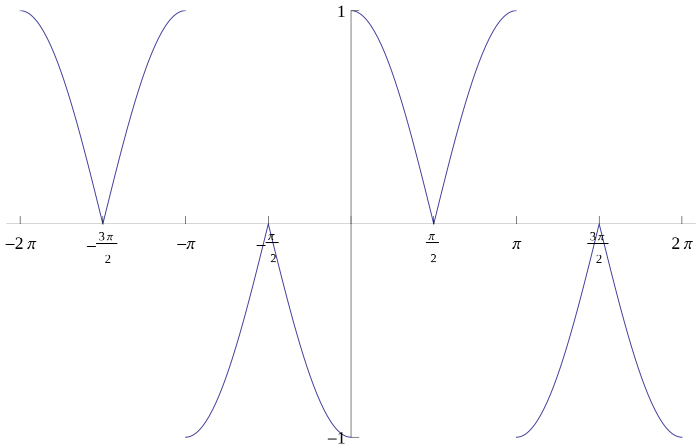
$$\lim_{x \to -k\pi/2-0} \frac{x}{\sin(2x)} \begin{cases} \to -\infty & k \text{ ungerade} \\ \to \infty & k \text{ gerade} \end{cases}.$$

An keiner der Sprungstellen $k\pi/2 \in L \setminus \{0\}$ kann man die Funktion f also stetig ergänzen. Für die Definitionslücke $x_0 = 0 \cdot \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$\lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{x}{\sin(2x)} = \frac{1}{2}$$

und damit ist f in 0 (beidseitig) stetig fortsetzbar.

- Das Schaubild von g:



Die Funktion g ist auf ihrem Definitionsbereich als Verkettung und Multiplikation von stetigen Funktionen stetig. Es gilt

$$\frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|} = \begin{cases} -1 & x \in ((2k-1)\pi/2, k\pi) \\ 1 & x \in (k\pi, (2k+1)\pi/2) \end{cases}.$$

Damit gilt für die Grenzwerte Folgendes

$$\lim_{x \to (2k+1)\pi/2 \pm 0} \frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|} \cos(x) = 0.$$

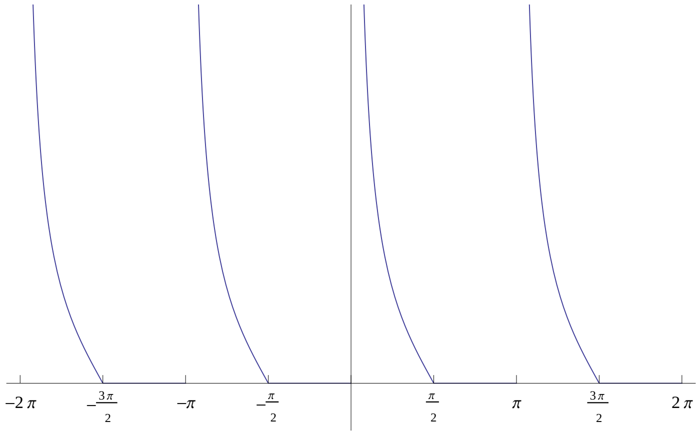
Die Funktion g lässt sich in den Stellen $(2k+1)\pi/2 \in L$ stetig (d.h. links- und rechtsseitig) durch Null ergänzen. Wegen

$$\lim_{x \to k\pi+0} \frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|} \cos(x) = \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ -1 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to k\pi-0} \frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|} \cos(x) = \begin{cases} -1 & k \text{ gerade} \\ 1 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

liegen an den $k\pi$-Stellen Sprünge vor. Somit kann die Funktion g entweder nur rechtsseitig oder nur linksseitig stetig ergänzt werden.

- Das Schaubild von h:



Die Funktion h ist auf ihrem Definitionsbereich als Verkettung und Multiplikation von stetigen Funktionen (plus eine Verschiebung) stetig.

$$\lim_{x\to(2k+1)\pi/2\pm0}\left(\frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|}+1\right)\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=0,$$
$$\lim_{x\to k\pi+0}\left(\frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|}+1\right)\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\to\infty,$$
$$\lim_{x\to k\pi-0}\left(\frac{\sin(2x)}{|\sin(2x)|}+1\right)\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=0.$$

Somit lässt sich die Funktion h an den $k\pi$-Stellen nur linksseitig stetig ergänzen aber nicht rechtsseitig. An den $(2k+1)\pi/2$-Stellen kann man die Funktion beidseitig stetig durch Null ergänzen.

Aufgabe H 6. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte, ohne die Regel von l'Hospital zu verwenden:

(a) $\lim\limits_{x\to-1-0}\frac{x+1}{x^3-3x-2}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2-x^2}-(\pi-e)^x+2^{\frac{1}{x}}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ **(d)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(2x)^2}$

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen aus (a) und (c).

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch Einsetzen sieht man zunächst, dass $x=-1$ eine Nullstelle des Nenners ist. Nach Polynomdivision und Lösen der zugehörigen quadratischen Gleichung stell sich heraus, dass $x=-1$ eine doppelte Nullstelle des Nenners ist und $x=2$ eine einfache. Die Faktorzerlegung des Nenners lautet also

$$x^3-3x-2 \;=\; (x+1)^2(x-2).$$

Somit lässt sich der Bruch innerhalb seines Definitionsbereiches schreiben als

$$\frac{x+1}{x^3-3x-2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)}.$$

Der Zähler besitzt in dieser Darstellung keine Nullstellen mehr. Da die Auswertung von $\frac{1}{x-2}$ in $x=-1$ existiert und negativ ist und die Auswertung von $\frac{1}{x+1}$ links von $x=-1$ negativ ist, rechts aber positiv, erhalten wir, dass

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \infty, \qquad \lim_{x\to -1+0} \frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\infty.$$

(b) Da alle 3 Teilgrenzwerte existieren, dürfen wir sie einzeln berechnen und danach entsprechend miteinander verrechnen. Der erste Ausdruck ist eine rationale Funktion, wobei Zähler und Nenner Polynome desselben Grades sind. Der Grenzwert ist damit der Quotient der Leitkoeffizienten dieser Polynome, d.h. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2-x^2} = \frac{1}{-1} = -1$. Alternativ kann man auch folgendermaßen argumentieren: man erweitert Zähler und Nenner mit $\frac{1}{x^2}$ und erhält den Ausdruck

$$\frac{1}{-1+\frac{1}{x^2}}.$$

Nach den Grenzwertsätzen ist dann

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 1}{\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Beim zweiten Term bemerken wir zuerst, dass $0 < \pi - e < 1$ und schreiben $(\pi - e)^x = e^{x\ln(\pi-e)}$. Da $\ln(\pi-e) < 0$ ist der Grenzwert dieses Ausdruckes für $x\to\infty$ offensichtlich null.

Zuletzt bemerken wir bei dem Term $2^{\frac{1}{x}}$, dass der Exponent für $x\to\infty$ gegen 0 strebt und erhalten aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion und der Darstellung $2^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{\ln(2)}{x})$ den Grenzwert $2^0=1$.

(c) Wir erweitern mit $(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})$ und erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) &= \lim_{x\to-\infty} x\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}\\ &= \frac{2}{\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}\\ &= \frac{2}{-1+(-1)}\\ &= -1\end{aligned}$$

(d) Hier erweitern wir mit $\cos(x)+1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(2x)^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^2-1}{\sin(2x)^2(\cos(x)+1)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^2-1}{\sin(2x)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)+1} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)^2}{(2\sin(x)\cos(x))^2} \\
&= -\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)^2} \\
&= -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Aufgabe H 7. *Gleichheitsproblem*

(a) Besitzt die Gleichung $2^x = 5x$ mehrere reelle Lösungen?

(b) Seien die Funktionen $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := (x-2)(2-x)\ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und} \quad g(x) := 2x^3-15x^2+24x.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x)=g(x)$ im Intervall $(0,\infty)$ mindestens drei Lösungen hat. Sie dürfen dabei benutzen, dass $\ln$ stetig ist auf $(0,\infty)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Ja. Seien nämlich $f(x) := 2^x = e^{(\ln 2)x}$ und $g(x) := 5x$ für $x\in\mathbb{R}$. Wegen

$$f(0)=1>0=g(0), \quad f(1)=2<5=g(1), \quad f(5)=32>25=g(5)$$

hat die stetige (!) Abbildung $f-g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mindestens zwei Vorzeichenwechsel und damit hat $f-g$ nach dem Zwischenwertsatz mindestens zwei Nullstellen in $\mathbb{R}$. (Außerdem – dies nur nebenbei – sieht man durch Ableiten von $f-g$ mithilfe der Injektivität von $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dass $h := f-g$ genau ein lokales Minimum x_0 hat und dass $h|_{(-\infty,x_0]}$ streng monoton fallend (insbesondere injektiv) und $h|_{[x_0,\infty)}$ streng monoton wachsend (insbesondere injektiv) ist. Also hat $f-g$ auch nicht mehr als zwei Nullstellen.)

(b) Wir zeigen, dass die stetige (!) Abbildung $f-g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mindestens drei Vorzeichenwechsel hat. Wegen $\ln y \longrightarrow -\infty$ $(y\to 0+)$ und wegen $\ln y\longrightarrow\infty$ $(y\to\infty)$ gilt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} -(x-2)^2\ln\left(\frac{x}{2}\right) = -(0-2)^2\cdot(-\infty) = \infty > 0 = \lim_{x\to 0+} g(x)$$

sowie

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -(x-2)^2\ln\left(\frac{x}{2}\right) = -\infty\cdot\infty = -\infty < \infty = \lim_{x\to\infty} g(x)$$

Außerdem gilt wegen $\frac{3}{2} \leqq e$ und der Monotonie von $\ln$, dass

$$f(2) = 0 < 4 = g(2) \quad \text{sowie} \quad f(3) = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) \geqq -\ln e = -1 > -9 = g(3).$$

Also haben wir: $f(x) - g(x)$ ist größer 0 für x nahe 0, kleiner 0 für $x = 2$, größer 0 für $x = 3$, kleiner 0 für x nahe bei ∞ – mit anderen Worten: die stetige Abbildung $f - g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ hat mindestens drei Vorzeichenwechsel und damit nach dem Zwischenwertsatz auch mindestens drei Nullstellen, wie behauptet.

Aufgabe H 8. *Zwischenwertsatz beim Zugfahren*

Ein Zug benötigt für 500 km genau 10 Stunden, fährt also mit 50 km/h Durchschnittsgeschwindigkeit. Auf der Strecke fährt er mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass es mindestens einen Zeitraum von einer Stunde gibt, in dem der Zug genau 50 km zurücklegt.
Hinweis: Sei $f(t)$ die zum Zeitpunkt t zurückgelegte Strecke. Betrachten Sie $f(t+1) - f(t)$ für $t \in [0, 9]$.

Lösungshinweise hierzu: Sei $f(t)$ die zum Zeitpunkt $t \in [0, 10]$ zurückgelegte Strecke (Kilometerstand) und sei

$$g(t) := f(t+1) - f(t) \quad (t \in [0, 9])$$

die zwischen dem Zeitpunkt t und dem Zeitpunkt $t + 1$ zurückgelegte Strecke. Wir müssen zeigen, dass ein Zeitpunkt $t_0 \in [0, 9]$ existiert, sodass $g(t_0) = 50$ ist, und das machen wir mithilfe des Zwischenwertsatzes. Zunächst mal ist die Abbildung f stetig, weil sie – als Kilometerstandsfunktion – monoton wachsend ist und keine Sprungstellen hat (es gibt keine Stelle $s \in [0, 10]$, sodass $\lim_{t\to s-} f(t) < \lim_{t\to s+} f(t)$, denn natura – classice – non facit saltus). Also ist auch g stetig und um den Zwischenwertsatz auf g anwenden zu können, müssen wir daher nur noch zeigen, dass $t_1, t_2 \in [0, 9]$ existieren, sodass

$$1.\ g(t_1) \leqq 50 \quad \text{und} \quad 2.\ g(t_2) \geqq 50.$$

Aber dies einzusehen ist leicht. Angenommen nämlich solche t_1, t_2 existierten nicht. Dann gälte

$$1.\ g(t) > 50 \quad \text{für alle } t \in [0, 9] \quad \text{oder} \quad 2.\ g(t) < 50 \quad \text{für alle } t \in [0, 9].$$

Insbesondere gälte eine dieser beiden Ungleichungen also für alle $k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und damit (teleskopierende Summen!)

$$f(10) - f(0) = \sum_{k=0}^{9} f(k+1) - f(k) = \sum_{k=0}^{9} g(k) > \sum_{k=0}^{9} 50 = 500$$

oder

$$f(10) - f(0) = \sum_{k=0}^{9} f(k+1) - f(k) = \sum_{k=0}^{9} g(k) < \sum_{k=0}^{9} 50 = 500.$$

Aber beides kann nicht sein, weil nach Voraussetzung die insgesamt zurückgelegte Strecke $f(10) - f(0)$ eben *gleich* (und nicht größer oder kleiner) 500 ist. Widerspruch und wir sind fertig.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 9. *Konvergenzradien von Potenzreihen*

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für

(i) $a_n = (1 - 2/n)^{n^2}$

(ii) $a_n = n^{-n}$

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen und skizzieren Sie die Konvergenzkreise. Untersuchen Sie, für welche Werte von $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren bzw. divergieren.

(i) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7z)^n}{n(n+1)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1-2/n)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (1-2/n)^n = e^{-2}$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\rho = e^2$.

(ii) Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-n}} = 0$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\rho = \infty$.

(b) **(i)** Der Konvergenzradius für diese Reihe lautet:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n^2}}{(1+\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Die Potenzreihe divergiert damit auf $\mathbb{R}\backslash[0,2]$ und konvergiert auf $(0,2)$. Die Randpunkte $\{0,2\}$ des Konvergenzkreises müssen separat betrachtet werden. In $z=0$ erhalten wir die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}},$$

die nach dem Leibnizkriterium konvergiert (denn $(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}})$ konvergiert ja monoton fallend gegen 0). In $z=2$ findet man die harmonische Reihe als untere Abschätzung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{\sqrt{n^2+1}} \geqq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Also hat man Konvergenz in $z=0$ und Divergenz in $z=2$.

(ii) Wir bestimmen zunächst den Konvergenzradius:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7^n}{n(n+1)}}{\frac{7^{n+1}}{(n+2)(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{7n} = \frac{1}{7}.$$

Damit divergiert die Potenzreihe auf $\mathbb{R}\backslash[-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}]$ und konvergiert auf $(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$. Es müssen noch die Randpunkte $\{-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\}$ betrachtet werden. Für $z = -\frac{1}{7}$ gilt:

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}\Big| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1.\end{aligned}$$

In $z = \frac{1}{7}$ hat man:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Damit folgt die Konvergenz auf beiden Randpunkten.

Aufgabe H 10. *Summe und Produkte von Potenzreihen*

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n := \begin{cases} \frac{1}{1+n^2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{\sqrt{3^n+n}} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(b) Seien die Abbildungen $f : U_{\rho_f}(0) \to \mathbb{C}$ und $g : U_{\rho_g}(0) \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n \quad \text{und} \quad g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Bestimmen Sie die Konvergenzradien ρ_f von f und ρ_g von g. Schreiben Sie $f \cdot g$ als Potenzreihe und geben Sie deren Konvergenzradius an. Was hat diese Potenzreihe zu tun mit der Funktion

$$h\colon \mathbb{C} \smallsetminus \left\{1, \frac{1}{3}\right\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{1}{1-4z+3z^2} \quad ?$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Weil

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \max\left\{ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ \sqrt[2k]{|a_{2k}|},\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ \sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|}\right\}$$

und weil aufgrund des Sandwichsatzes und wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für $c \in (0,\infty)$

$$\sqrt[n]{1+n^2} = \sqrt[n]{n^2\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)} = \big(\sqrt[n]{n}\big)^2 \sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty)$$

sowie

$$\sqrt[n]{\sqrt{3^n+n}} = \Big(3^n\big(1+\frac{n}{3^n}\big)\Big)^{\frac{1}{2n}} = \Big(3\sqrt[n]{1+\frac{n}{3^n}}\Big)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \sqrt{3} \quad (n\to\infty)$$

gilt, ergibt sich

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \max\left\{1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} = 1$$

und mithin $\rho = (\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} = 1$.

(b) Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = 3$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ gilt

$$\rho_f = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \rho_g = 1.$$

Außerdem ist die Potenzreihe von $f\cdot g$ nach Satz 1.14.11 gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\ z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} 3^k\cdot 1^{n-k}\ z^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3^{n+1}-1)z^n,$$

wobei wir im zweiten Schritt die geometrische Summenformel benutzt haben, nach der

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Wegen

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}\ 3\ \sqrt[n]{3-\frac{1}{3^n}} \longrightarrow 3 \quad (n\to\infty)$$

(benutze wie in Aufgabenteil a) den Sandwichsatz und $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c} = 1$ für $c \in (0,\infty)$), ergibt sich der Konvergenzradius $\rho_{f\cdot g}$ der Potenzreihe von $f\cdot g$ zu

$$\rho_{f\cdot g} = \frac{1}{3}.$$

(Alternativ könnte man den Konvergenzradius $\rho_{f\cdot g}$ der Potenzreihe von $f\cdot g$ auch folgendermaßen bestimmen: aufgrund von Satz 1.14.11 ist $\rho_{f\cdot g}$ mindestens so groß wie $\min\{\rho_f, \rho_g\} = \frac{1}{3}$ und tatsächlich ist $\rho_{f\cdot g}$ auch nicht größer als $\min\{\rho_f, \rho_g\} = \frac{1}{3}$, das heißt, $\rho_{f\cdot g} = \frac{1}{3}$, denn die Potenzreihe von $f \cdot g$ ist – wie eben gesehen – die Summe der beiden Potenzreihen

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} z^n \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

(mit Konvergenzradius $\frac{1}{3}$ bzw. 1) und damit divergiert die Potenzreihe von $f \cdot g$ für alle reellen Zahlen $z \in (\frac{1}{3}, 1)$, das heißt: der Konvergenzradius der Potenzreihe von $f \cdot g$ kann nicht größer als $\frac{1}{3}$ sein.)

Was hat nun die Potenzreihe von $f \cdot g$, deren Koeffizienten wir oben bestimmt haben, mit der angegebenen Funktion h zu tun? Weil die Potenzreihe von $f \cdot g$ die Summe zweier (im wesentlichen) geometrischer Reihen ist, können wir deren Werte mithilfe der geometrischen Summenformel explizit ausrechnen, und zwar gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\, z^n &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \frac{3}{2}\frac{1}{1-3z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(3z-1)(z-1)} = h(z)\end{aligned}$$

für alle $z \in U_{\frac{1}{3}}(0) = U_{\rho_{f\cdot g}}(0)$. Also ist die Potenzreihe von $f \cdot g$ auf ihrem Konvergenzkreis $U_{\rho_{f\cdot g}}(0)$ nichts anderes als $h|_{U_{\rho_{f\cdot g}}(0)}$. (Alternativ könnte man dies auch folgendermaßen einsehen: aufgrund von Satz 1.14.11 stellt die Potenzreihe von $f \cdot g$ auf $U_{\min\{\rho_f,\rho_g\}}(0) = U_{\frac{1}{3}}(0)$ die Produktfunktion $f \cdot g$ dar und die Produkte $f(z) \cdot g(z)$ kann man für $z \in U_{\frac{1}{3}}(0)$ explizit mithilfe der geometrischen Summenformel berechnen, wobei sich eben $h(z)$ ergibt.)

Aufgabe H 11. *Wie hängt $\rho_{f\cdot g}$ mit ρ_f und ρ_g zusammen?*

Seien die Abbildungen $f : U_{\rho_f}(0) \to \mathbb{C}$ und $g : U_{\rho_g}(0) \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mit

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n = 0 \\ -\frac{1}{2^{n+1}} & \text{für } n \geqq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad b_n := \begin{cases} 2 & \text{für } n = 0 \\ 1 & \text{für } n \geqq 1 \end{cases}.$$

(a) Berechnen Sie die Konvergenzradien ρ_f von f, ρ_g von g und $\rho_{f\cdot g}$ von $f \cdot g$.

(b) Schreiben Sie f und g als Quotient von Polynomen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n+1}} = 2\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 2$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ gilt

$$\rho_f = 2 \quad \text{und} \quad \rho_g = 1.$$

Wir berechnen nun die Koeffizienten der Potenzreihe zu $f\cdot g$, um deren Konvergenzradius bestimmen zu können. Aufgrund von Satz 1.14.11 ist die Potenzreihe zu $f\cdot g$ gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n$$

und für die Koeffizienten c_n ergibt sich

$$\begin{aligned}
c_n &= a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} + a_n b_0 = \frac{1}{2}\cdot 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\big(-\frac{1}{2^{k+1}}\big)\cdot 1 + \big(-\frac{1}{2^{n+1}}\big)\cdot 2 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^n} = 0 \qquad \text{für } n \geqq 1, \\
c_0 &= \sum_{k=0}^{0} a_k b_{0-k} = a_0 b_0 = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.
\end{aligned}$$

Also erhalten wir für die Potenzreihe von $f\cdot g$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 1 \quad \text{und} \quad \rho_{f\cdot g} = \big(\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\big)^{-1} = \infty.$$

(Wir sehen damit insbesondere, dass – analog zur Situation für den Konvergenzradius von Summenpotenzreihen (Aufgabe P 10) – der Konvergenzradius einer Produktpotenzreihe mitnichten immer gleich $\min\{\rho_f,\rho_g\}$ ist, sondern locker auch echt größer als $\max\{\rho_f,\rho_g\}$ sein kann.)

(b) Wir wollen die Potenzreihen f und g als rationale Funktionen schreiben. Die Idee dabei ist, dass f und g im wesentlichen geometrische Reihen sind, sodass wir also mithilfe der geometrischen Summenformel die Werte der beiden Potenzreihen explizit bestimmen können.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{2} - \frac{z}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}z^{n-1} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n = \frac{1}{2} - \frac{z}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1-z}{2-z}$$

und

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 2 + z\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 2 + \frac{z}{1-z} = \frac{2-z}{1-z}$$

für alle $z\in U_2(0)$ bzw. alle $z\in U_1(0)$. (Dass $f(z)$ und $g(z)$ invers zueinander sind für $z\in U_1(0)$ ist natürlich kein Zufall. Aufgrund von Satz 1.14.11 ist $f(z)g(z)$ für $z\in U_{\min\{\rho_f,\rho_g\}}(0)$ ja gleich dem Wert der Produktpotzenreihe h an der Stelle z und, wie wir oben gesehen haben, ist h ja konstant gleich 1.)

O. Alaya, R. Bauer
M. Fetzer, K. Sanei Kashani
B. Krinn, J. Schmid

4. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 12. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f. Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f' und von f''. Berechnen Sie f' und f''.

(a) $f(x) = x^{(x^2)}$

(b) $f(x) = \ln(\tan(x))$

(c) $f(x) = \big(\ln(\sqrt{x})\big)^2$

(d) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+1}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $f(x) = \exp(x^2\ln(x))$ gilt erstmal für den Definitionsbereich $\mathbb{D} = [0,\infty)$ und die Ableitungen berechnen sich wie folgt:

$$f'(x) = \Big(\exp(x^2\ln(x))\Big)' = \exp(x^2\ln(x))\Big(2x\ln(x) + x\Big) = x^{(x^2)}\Big(2x\ln(x) + x\Big)$$

$$f''(x) = \Big(x^{(x^2)}\big(2x\ln(x) + x\big)\Big)' = x^{(x^2)}\big(2x\ln(x) + x\big)^2 + x^{(x^2)}\big(2\ln(x) + 3\big)$$

Die Funktionen f' und f'' haben den Definitonsbereich $\mathbb{D} = (0,\infty)$.

(b) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{D}_f = \{x \in (k\pi, (2k+1)\pi/2) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Es gilt $\big(\tan(x)\big)' = \big(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\big)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Wir bekommen für die Ableitungen folgendes.

$$f'(x) = \frac{1}{\tan(x)}\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$$

$$f''(x) = \Big(\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\Big)' = \frac{-\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}$$

Die Funktionen f' und f'' haben jeweils $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{D}_f = \mathbb{D}_f$ als Definitionsbereich.

(c) $f'(x) = 2\ln(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$
$f''(x) = \frac{\frac{1}{2} - \ln(\sqrt{x})}{x^2}$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ ist der gültige Definitionsbereich von f, f' und f''.

(d) Mit der Quotientenregel erhält man:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x-2}{\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{\sqrt{x+1}-(x-2)\left(\sqrt{x+1}\right)'}{x+1} \\
&= \frac{\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}(x-2)\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{x+1-\frac{1}{2}(x-2)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{x+4}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \\
f''(x) &= \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}-(x+4)\left(2\sqrt{x+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}\right)}{4(x+1)^3} \\
&= -\frac{x+10}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

Der Definitionsbereich von f und f' ist $\mathbb{D}_f = (-1,\infty)$, der von f'' ist $\mathbb{D}_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \cap \mathbb{D}_f = (-1,\infty)$.

Aufgabe H 13. *Ableitungen*

(a) Untersuchen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktion in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$. Erstellen Sie Skizzen für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$.

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^n & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$$

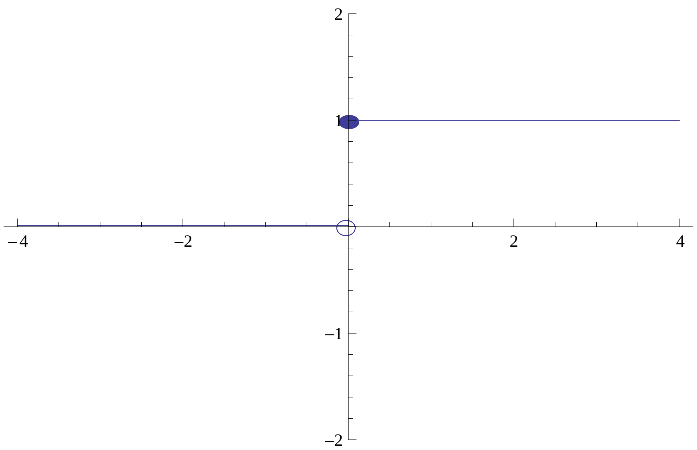
(b) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten: Ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar? Ist die Funktion g an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ differenzierbar? Skizzen!

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2} & \text{für } x \geqq 0 \\[2ex] \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

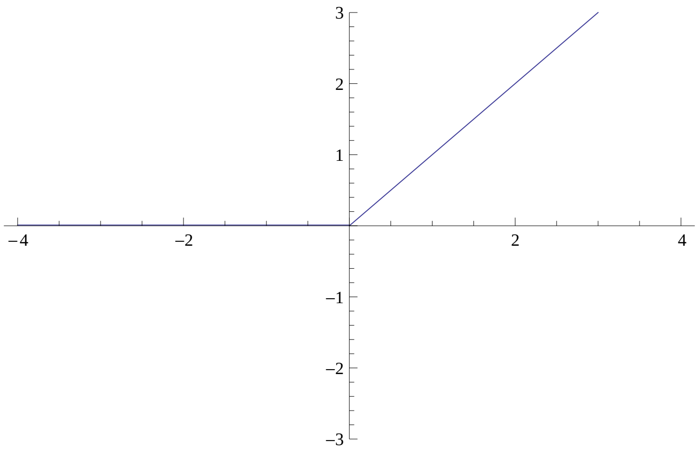
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x|x| + |x-1|$$

Lösungshinweise hierzu:

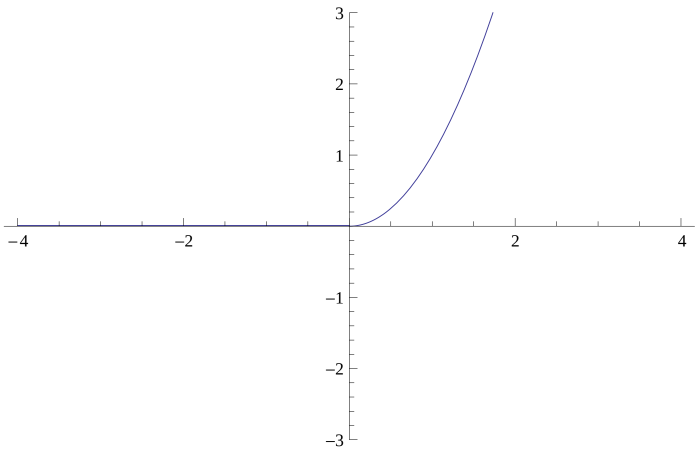
(a) Das Schaubild von f_0:



Das Schaubild von f_1:



Das Schaubild von f_2:



Die Funktionen f_n sind auf $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ als Polynome laut Vorlesung stetig differenzierbar. Es bleibt die Differenzierbarkeit im Punkt 0 zu untersuchen.

Für $n = 0$ erhalten wir für den linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f_0(x) - f_0(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{0 - 1}{x - 0} = +\infty \, .$$

Folglich ist f_0 in 0 nicht differenzierbar.
Für $n = 1$ erhalten wir von links

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x-0} \;=\; \lim_{x\to 0-0} \frac{0-0}{x-0} \;=\; 0$$

und von rechts

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x-0} \;=\; \lim_{x\to 0+0} \frac{x-0}{x-0} \;=\; 1\,.$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten nicht übereinstimmen, existiert kein Grenzwert, und somit ist f_1 in 0 nicht differenzierbar.
Für $n \geqq 2$ erhalten wir von links

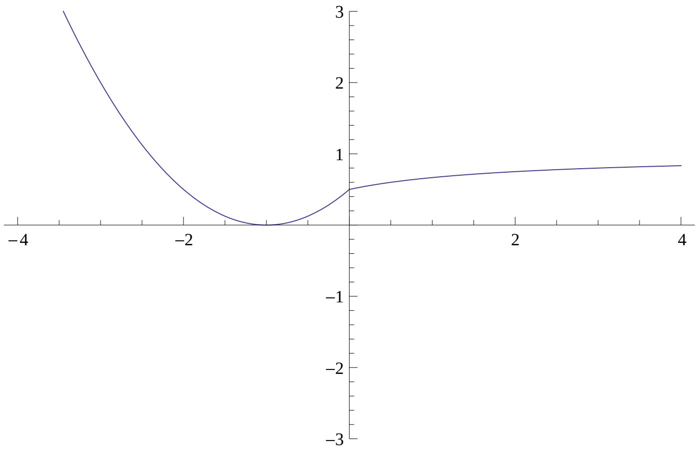
$$\lim_{x\to 0-0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x-0} \;=\; \lim_{x\to 0-0} \frac{0-0}{x-0} \;=\; 0$$

und von rechts

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x-0} \;=\; \lim_{x\to 0+0} \frac{x^n-0}{x-0} \;=\; 0\,.$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten übereinstimmen, existiert ein Grenzwert, und somit ist f_n in 0 differenzierbar.

(b) Das Schaubild von f:



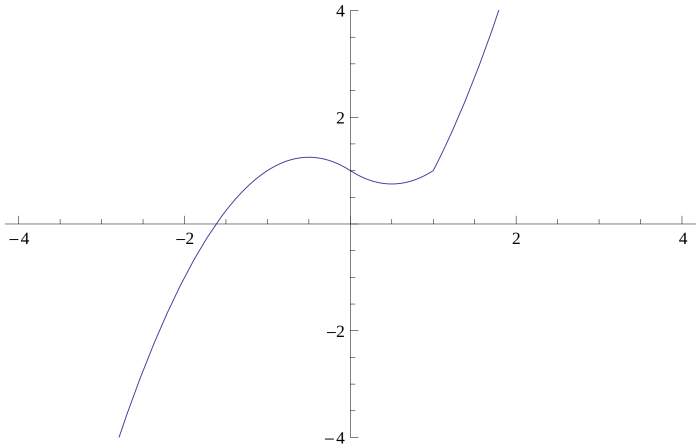
Betrachtet wird der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten von f an der Stelle $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-0} \frac{\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{2}x + 1 = 1$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert berechnen wir

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{x+1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{x}{2(x+2)}}{x} = \frac{1}{4}.$$

Grenzwerte also stimmen nicht überein, die Funktion ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.
Das Schaubild von g:



Die Funktion g lässt sich abschnittsweise ohne Beträge schreiben:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1 & \text{für} \quad x \leqq 0 \\ x^2 - x + 1 & \text{für} \quad 0 < x \leqq 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{für} \quad 1 < x \end{cases}$$

Für den Differenzenquotienten an $x_1 = 0$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{-x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0-0} -x - 1 = -1$$
$$\lim_{x\to 0+0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0+0} x - 1 = -1\,,$$

also die Funktion ist an $x_1 = 0$ differenzierbar. Die selbe Rechnung für $x_2 = 1$ ergibt

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1$$
$$\lim_{x\to 1+0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2 + x - 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 1+0} x + 2 = 3\,,$$

also die Funktion ist an $x_2 = 1$ nicht differenzierbar.

Aufgabe H 14. *Formel von Euler und de Moivre*

Schreiben Sie f mithilfe der Formel von Euler und de Moivre als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(ax)$ und Funktionen der Form $\cos(bx)$, wobei $a,\, b \in \mathbb{N}_0$.

(a) $f(x) = \cos(x)^3$

(b) $f(x) = \sin(5x)\cos(2x)$

(c) $f(x) = \sin(x)^6 \cos(x)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der binomischen Formel $(a+b)^n = \sum_{k \leqq n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\cos(x)^3 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{8}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + 3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})) \\
&= \frac{1}{8}(2\cos(3x) + 6\cos(x)) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x).
\end{aligned}
$$

(b) Es ist

$$
\begin{aligned}
\sin(5x)\cos(2x) &= \frac{\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2} \\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{7\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-7\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}(2\mathrm{i}\sin(7x) + 2\mathrm{i}\sin(3x)) \\
&= \frac{1}{2}(\sin(7x) + \sin(3x)).
\end{aligned}
$$

(c) Wir verwenden wieder die binomische Formel und bemerken zunächst, dass

$$
\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 1, \qquad \binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15 \qquad \text{und} \qquad \binom{6}{3} = 5.
$$

Damit berechnen wir, dass

$$
\begin{aligned}
\sin(x)^6 \cdot \cos(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^6 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \\
&= \frac{1}{2^7\mathrm{i}^6}\Bigg(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x} - \binom{6}{1}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + \binom{6}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \binom{6}{3} \\
&\qquad + \binom{6}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - \binom{6}{1}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}\Bigg) \cdot (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{2^7\mathrm{i}^6}\Bigg(\mathrm{e}^{7\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - 6\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} - 6\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 15\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 15\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \\
&\qquad - 20\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 20\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 15\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 15\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} \\
&\qquad - 6\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - 6\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-7\mathrm{i}x}\Bigg) \\
&= \frac{1}{64} \cdot (-\cos(7x) + 5\cos(5x) - 9\cos(3x) + 5\cos(x)).
\end{aligned}
$$

Aufgabe H 15. *Komplexe Wurzeln*

Gegeben sei die Funktion $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die z auf diejenige komplexe Quadratwurzel von z abbildet, deren Argument kleiner als π ist.

(a) Berechnen Sie $w(z)$ für die Stellen $z \in \{0, 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.

(b) Suchen Sie in der komplexen Zahlenebene zu jedem $\delta > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 1| < \delta$ und $|w(z) - w(1)| > 1$.

(c) Ist w stetig?

Hinweis: Eine interaktive Darstellung des komplexen Wurzelziehens finden Sie unter
http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/

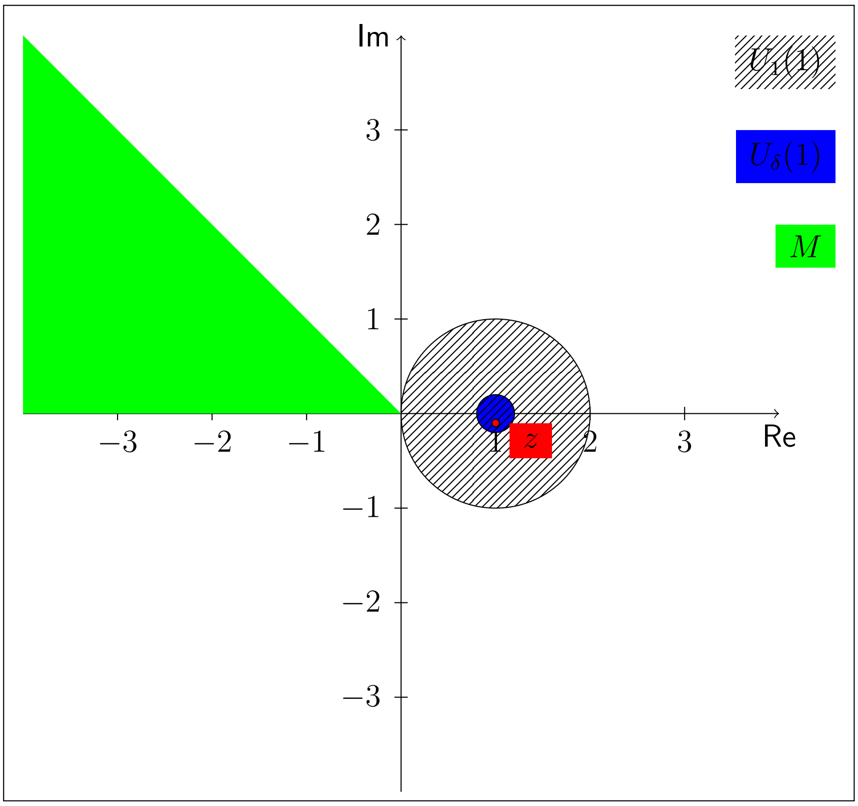
Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir schreiben die Zahlen zunächst um; es ist $1 = \mathrm{e}^{0i}$, $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{2}}$, $-1 = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}}$ und $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{3\pi \mathrm{i}}{2}}$. Daher erhalten wir

$$w(1) = \mathrm{e}^{\frac{0\mathrm{i}}{2}} = 1, \qquad w(\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i}),$$
$$w(-1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}, \qquad w(-\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\frac{3\pi \mathrm{i}}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Die Zahl $z_1 = 0$ besitzt die eindeutige Wurzel $z_2 = 0$. Allerdings ist hier die Frage falsch gestellt, da 0 kein eindeutiges Argument zugewiesen werden kann.

(b) Wir suchen eine komplexe Zahl z mit $z \in U_\delta(1)$ und $w(z) \notin U_1(1)$. Wir wählen $z = 1 - \frac{\delta}{2}\mathrm{i}$. Damit ist $|1 - z| = \frac{\delta}{2} < \delta$.



Das Argument von z liegt dann im Intervall $\left(\frac{3}{2}\pi\,,\,2\pi\right)$ (im Bild liegt $w(z)$ also in der Menge M). Damit liegt das Argument von $w(z)$ im Intervall $\left(\frac{3}{4}\pi\,,\,\pi\right)$. Der Realteil von $w(z)$ ist damit negativ. Damit gilt

$$\begin{aligned}
|w(z) - w(1)| &= |w(z) - 1| \\
&= \sqrt{(\mathrm{Re}(w(z)) - 1)^2 + (\mathrm{Im}(w(z)) - 0)^2} \\
&> \sqrt{(\mathrm{Re}(w(z)) - 1)^2} \\
&= |\mathrm{Re}(w(z)) - 1| \\
&> 1
\end{aligned}$$

(c) Die Abbildung hat eine Unstetigkeit in $z = 1$, was direkt aus b) folgt. Alternativ: Es ist

$$\lim_{\varphi \to 2\pi - 0} w(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \lim_{\varphi \to 2\pi - 0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1,$$

aber

$$w\left(\lim_{\varphi \to 2\pi - 0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) = w(1) = 1.$$

Im Allgemeinen ist die Funktion in keinem Punkt der Halbgeraden $(0, \infty)$ stetig.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 16. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

Es sei

$$f\colon\ [1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \operatorname{arcosh}(x)$$

die Umkehrfunktion von

$$g\colon\ [0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cosh(x)\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und von g.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ unter Verwendung von Satz 2.3.1.

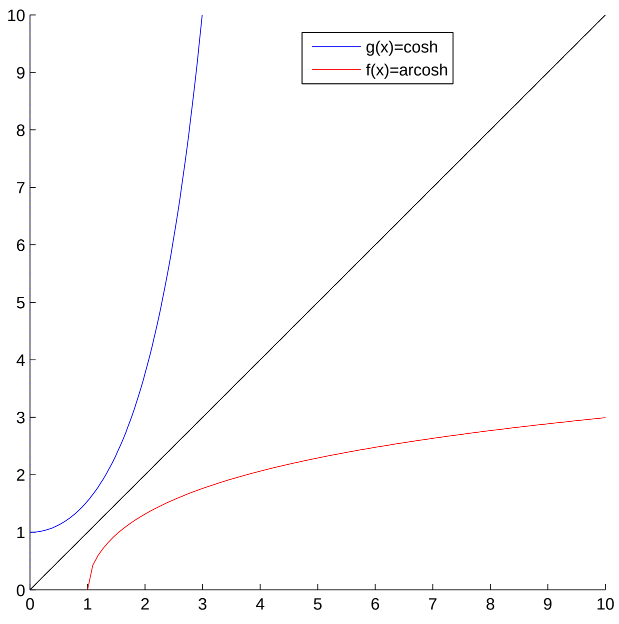
(c) Bestimmen Sie eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right) \quad \text{für } x \geqq 1\,.$$

(d) Berechnen Sie nochmals die Ableitung von f, indem Sie Teil (c) verwenden, und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (b).

Lösungshinweise hierzu:

(a)



(b) Es gilt:

$$(\cosh(y))^2 - (\sinh(y))^2 = \frac{(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y})^2}{4} - \frac{(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})^2}{4} = \frac{2\mathrm{e}^y\, 2\mathrm{e}^{-y}}{4} = 1$$

also auch

$$(\sinh(y))^2 = (\cosh(y))^2 - 1$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Ist nun $y \in \mathbb{R}_0^+$, so folgt $\sinh(y) \in \mathbb{R}_0^+$, also erhält man in diesen Fällen

$$\sinh(y) = \sqrt{(\cosh(y))^2 - 1}\,.$$

Mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion (2.3.1) liefert dies

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}(x)\Big|_{x=x_0} &= \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cosh(y)\Big|_{y=\operatorname{arcosh}(\mathrm{x}_0)}} = \frac{1}{\sinh(y)|_{y=\operatorname{arcosh}(\mathrm{x}_0)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\cosh(y))^2-1}\Big|_{y=\operatorname{arcosh}(\mathrm{x}_0)}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2-1}}\,.\end{aligned}$$

(c) Für $y \in [1, \infty)$ erhält man aus

$$y = \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + 1/\mathrm{e}^x}{2}$$

durch die Substitution $\tilde{x} := \mathrm{e}^x$ und nach Multiplikation mit $\tilde{x}$

$$\tilde{x}y = \frac{\tilde{x}^2+1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}\tilde{x}^2 - y\tilde{x} + \frac{1}{2} = 0.$$

Letztere Gleichung lässt sich mit der Mitternachtsformel lösen. Es ergeben sich Lösungen

$$\tilde{x} = \frac{y+\sqrt{y^2-1}}{1} \quad \text{oder} \quad \tilde{x} = \frac{y-\sqrt{y^2-1}}{1}.$$

Wir zeigen nun, dass nur die erste Lösung im Betracht kommen kann.
Wir nehmen einerseits ein beliebiges $y > 1$. Andererseits folgt aus $x \geqq 0$, dass $\tilde{x} := \mathrm{e}^x \geqq 1$.
Setzen wir für $\tilde{x}$ die zweite Lösung ein, so bekommen wir die Ungleichung

$$y - \sqrt{y^2-1} \geqq 1 \text{ d.h. } y - 1 \geqq \sqrt{y^2-1} > 0.$$

Durch Quadrieren der beiden Terme der Ungleichung erhalten wir

$$(y-1)^2 \geqq y^2 - 1$$

also auch

$$y^2 - 2y + 1 \geqq y^2 - 1$$

Dies liefert

$$2 \geqq 2y > 2,$$

was zu einem Widerspruch führt. Somit ist

$$x = \operatorname{arcosh}(y) = \ln(\tilde{x}) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)\,.$$

Insgesamt gilt also $a = -1$.

(d) Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x)\bigg|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\bigg|_{x=x_0} = \frac{1+\frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2-1}}}{x_0+\sqrt{x_0^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2-1}}$$

was der berechneten Ableitung aus Teil (b) entspricht.

Aufgabe H 17. *Differentialquotient und Mittelwertsatz*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei differenzierbar und genüge für alle $x, y \in \mathbb{R}$ der Gleichung $f(x-y) = f(x) - f(y)$.

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) $f(0) = 0$

(ii) $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(iii) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

(iv) $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass f' konstant ist.

(c) Verwenden Sie den Mittelwertsatz um zu zeigen, dass eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die ersten drei Aussagen sind korrekt.

(i) Es gilt für beliebige $x \in \mathbb{R}$:

$$f(0) = f(x-x) = f(x) - f(x) = 0.$$

(ii) Es gilt für beliebige $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = f(0-x) = f(0) - f(x) = -f(x).$$

(iii) Es gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f((x+y)-y) = f(x+y) - f(y).$$

Daraus folgt

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(iv) Die Aussage ist falsch. Dazu bilden wir ein Gegenbeispiel.
Sei $g(x) = 2x$. $g(x)$ ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ und es gilt

$$g(x-y) = 2(x-y) = 2x - 2y = g(x) - g(y)$$

Aber für $x \neq 0, y \neq 0$ ist

$$g(xy) = 2xy \neq 2x\,2y = 4xy = g(x)g(y).$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist jedoch unabhängig vom gewählten x. Somit ist auf ganz $\mathbb{R}$ die Ableitung konstant.

(c) Sei $a := f'(x_0)$, dann gilt nach dem Mittelwertsatz für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) = f(x_0) + a(x - x_0) = ax + c$$

mit der Konstanten $c := f(x_0) - ax_0$.
Allerdings muss gelten:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ a(x+y) + c &= ax + c + ay + c \\ &= a(x+y) + 2c \end{aligned}$$

Folglich muss $c = 0$ sein, weshalb

$$f(x) = ax$$

bewiesen ist.

Aufgabe H 18. *Monotonie via Ableitung*
Zeigen Sie, dass die folgenden Ungleichungen gelten. Skizze!

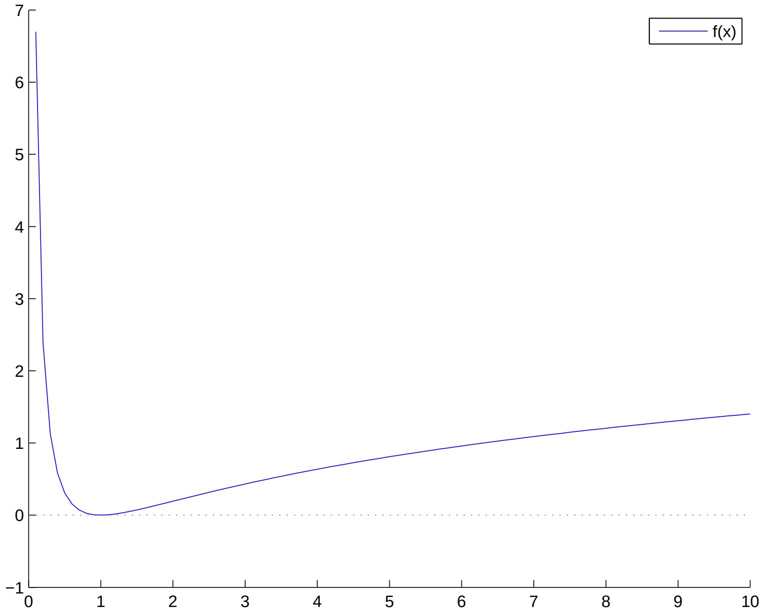
(a) $\ln(x) \geqq 1 - \frac{1}{x}$ für $x \in (0, +\infty)$

(b) $(x+1)\ln(x) \geqq 2x - 2$ für $x \in [1, +\infty)$

(c) $(x+1)\ln(x) \leqq 2x - 2$ für $x \in (0, 1]$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Aussage ist gleichbedeutend mit $f(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} \geqq 0$ für $x \in (0, +\infty)$. Die Skizze der Funktion $f(x)$ bestätigt diese Aussage.



Wir berechnen erst einmal die Ableitung der Funktion $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

In der Skizze sehen wir, dass die Funktion $f(x)$ für $x \in (0,1]$ monoton fallend ist. Dies wird auch bestätigt durch die Untersuchung des Vorzeichens der Ableitung.

$$f'(x) \leqq 0 \text{ für } x \in (0,1]\,.$$

Es gilt also wegen der Monotonie

$$f(1) \leqq f(x) \text{ für alle } x \in (0,1]\,.$$

Andererseits sehen wir in der Skizze auch, dass die Funktion $f(x)$ für $x \in [1,+\infty)$ monoton steigend ist. Dies wird auch bestätigt durch die Untersuchung des Vorzeichens der Ableitung.

$$f'(x) \geqq 0 \text{ für } x \in [1,+\infty)\,.$$

Es gilt also wegen der Monotonie

$$f(1) \leqq f(x) \text{ für alle } x \in [1,+\infty)\,.$$

Zusammengefasst gilt also

$$0 = f(1) \leqq f(x) \text{ für alle } x \in (0,+\infty)\,.$$

Somit gilt also

$$\ln(x) \geqq 1 - \frac{1}{x}$$

für $x \in (0,+\infty)$.

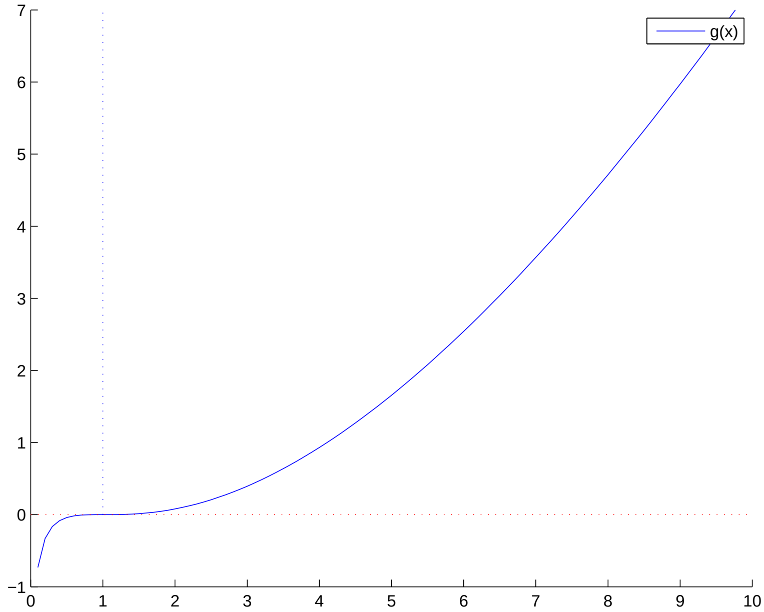
(b) Die Aussagen von Teil (b) und Teil (c) sind gleichbedeutend mit

$$g(x) = (x+1)\ln(x) - 2x + 2 \geqq 0 \text{ für } x \in [1, +\infty)$$

und

$$g(x) \leqq 0 \text{ für } x \in (0, 1]\,.$$

Die Skizze der Funktion $g(x)$ bestätigt diese Aussage.



Wir berechnen erst einmal die Ableitung der Funktion $g(x)$:

$$g'(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = f(x) \overbrace{\geqq}^{\text{(a)}} 0 \text{ für alle } x \in (0, +\infty)\,.$$

Sowohl das Vorzeichen der Ableitung als auch die Skizze der Funktion zeigen, dass die Funktion $g(x)$ monoton steigend ist.
Für $x \in [1, +\infty)$ bedeutet dies insbesondere, dass

$$0 = g(1) \leqq g(x).$$

Daraus folgt also

$$(x+1)\ln(x) \geqq 2x - 2 \text{ für } x \in [1, +\infty)\,.$$

(c) Analog gilt für $x \in (0, 1]$, dass

$$0 = g(1) \geqq g(x).$$

Daraus folgt also

$$(x+1)\ln(x) \leqq 2x - 2 \text{ für } x \in (0, 1]\,.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 19. *Funktionsgrenzwerte und Regel von l'Hospital*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(3x)}{\tan(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\pi}{x\sin(x)} - \dfrac{\pi}{x^2}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x\,(\mathrm{e}^x+1) - 2\,(\mathrm{e}^x-1)}{x^3}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x^2)+x^2}{x^2+\mathrm{e}^{(-x^2)}}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln(x)\ln(1-x)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Ausdruck ist von der Form "$\frac{\infty}{\infty}$". Die Regel von l'Hospital dreimal angewandt liefert

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3(\cos(x))^2}{(\cos(3x))^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{6\cos(x)(-\sin(x))}{2\cos(3x)(-3\sin(3x))} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)\sin(x)}{\cos(3x)\sin(3x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(x))^2-(\sin(x))^2}{3((\cos(3x))^2-(\sin(3x))^2)} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2(\cos(x))^2-1}{3(2(\cos(3x))^2-1)} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Der Ausdruck ist von der Form "$\frac{0}{0}$". Die Regel von l'Hospital dreimal angewandt liefert

$$\begin{aligned}
\pi\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin(x)}-\frac{1}{x^2}\right) &= \pi\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^2\sin(x)} = \pi\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{2x\sin(x)+x^2\cos(x)} \\
&= \pi\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2\sin(x)+4x\cos(x)-x^2\sin(x)} \\
&= \pi\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{6\cos(x)-6x\sin(x)-x^2\cos(x)} = \pi\frac{1}{2+4} = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

(c) Der Ausdruck ist von der Form "$\frac{0}{0}$". Die Regel von l'Hospital dreimal angewandt liefert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-e^x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2e^x+xe^x-e^x}{6}\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(d) Bei diesem Ausdruck lässt sich die Regen von l'Hospital nicht gewinnbringend anwenden. Stattdessen erweitert man den Bruch mit $\frac{1}{x^2}$. Dies liefert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x^2)+x^2}{x^2+\mathrm{e}^{(-x^2)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\cos(x^2)}{x^2}+1}{1+\frac{\mathrm{e}^{(-x^2)}}{x^2}} = 1,$$

denn $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(x^2)}{x^2}=0$ und $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{(-x^2)}}{x^2}=0$.

(e) Der Ausdruck ist von der Form "$0\cdot\infty$", so dasss man nicht unmittelbar die Regel von l'Hospital anwenden kann. Man formt daher wie folgt um: $\ln(x)\ln(1-x)=\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\ln(1-x)}}$, was von der Form "$\frac{\infty}{\infty}$" ist. Daher gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-0}\ln(x)\ln(1-x) &= \lim_{x\to 1-0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\ln(1-x)}}\\ &= \lim_{x\to 1-0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(1-x)(\ln(1-x))^2}}\\ &= \lim_{x\to 1-0}\frac{(1-x)(\ln(1-x))^2}{x}\end{aligned}$$

Hier geht der Nenner gegen 1. Daher ist nur der Grenzwert des Zählers zu betrachten. Dieser ist von der Form "$0\cdot\infty$". Man verwendet daher dieselbe Strategie wie oben und bringt den Ausdruck auf die Form "$\frac{\infty}{\infty}$", so dass die Regel von l'Hospital anwendbar ist.

$$\begin{aligned}&= \lim_{x\to 1-0}\frac{(\ln(1-x))^2}{\frac{1}{1-x}}\\ &= \lim_{x\to 1-0}\frac{2\ln(1-x)\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}}\\ &= \lim_{x\to 1-0}2(1-x)\ln(1-x)\\ &= 0,\end{aligned}$$

denn $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln(x)=0$.

Aufgabe H 20. *Taylorentwicklung*

Gegeben ist die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x^2)$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom von h der Stufe 2 im Entwicklungspunkt $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(b) Finden Sie eine reelle Zahl a so, dass

$$|h(x) - T_2(h, x, x_0)| \leqq a\,|x - x_0|^3$$

für alle $x \in [0, 2]$ gilt.

(c) Bestimmen Sie Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ so, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \cos(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Hier gilt:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \cos(x^2),\\
h'(x) &= -2x\sin(x^2),\\
h''(x) &= -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2),\\
h'''(x) &= -12x\cos(x^2) + 8x^3\sin(x^2)
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Taylorentwicklung

$$T_2\left(h, x, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) - \left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2$$

(b) Der Fehler lässt sich durch das Restglied abschätzen, welches von der Form $a|x - x_0|^3$ ist. a sollte daher die folgende Bedingung erfüllen

$$\left|\frac{h'''(\xi)}{3!}\right| \leqq a \qquad \text{für alle } \xi \in [0, 2].$$

Man schätzt daher ab:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h'''(\xi)}{3!}\right| &= \frac{1}{6}\left|-12\xi\cos(\xi^2) + 8\xi^3\sin(\xi^2)\right|\\
&\leqq \frac{1}{6}(|-12\xi\cos(\xi^2)| + |8\xi^3\sin(\xi^2)|)\\
&\leqq \frac{1}{6}(12\xi + 8\xi^3)\\
&\leqq \frac{88}{6} \text{ ,da } \xi \in [0, 2]\\
&\leqq \frac{44}{3}.
\end{aligned}$$

Setze somit $a = \frac{44}{3}$.

(c) Einsetzen von x^2 in die Reihe für den Cosinus liefert

$$\cos(x^2) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{4j}}{(2j)!}.$$

Das heißt

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ nicht durch 4 teilbar ist} \\ \frac{(-1)^{k/4}}{(k/2)!} & \text{falls } k \text{ durch 4 teilbar ist} \end{cases}$$

Aufgabe H 21. *Taylorreihen*

Sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die für $x \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $h''(x) = 4h(x)$ und die Anfangsbedingungen $h(0) = 1$, $h'(0) = 0$ erfüllt.

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(h, x, 0)$ von h zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Überprüfen Sie, ob $T(h, x, 0) = h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Hinweis: Vergleichen Sie mit 2.6.11 .

(c) Bestimmen Sie reelle Konstanten a, b, c und d so, dass $h(x) = a\sinh(bx) + c\cosh(dx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Induktiv zeigt man, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$h^{(2n)}(x) = 4^n h(x)$$
$$h^{(2n+1)}(x) = 4^n h'(x).$$

Daher gilt $h^{(2n)}(0) = 4^n \cdot 1 = 4^n$ und $h^{(2n+1)}(0) = 4^n \cdot 0 = 0$. Die Koeffizienten der Taylorreihen haben also die Form

$$a_k = \begin{cases} \frac{2^k}{k!} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Taylorreihe lässt sich kompakter schreiben als

$$T(h, x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}.$$

(b) Wegen $0 < \vartheta_{x,0} < 1$ gilt genau wie in 2.6.11 $\vartheta_{x,0}x \in [-|x|, |x|]$. Da h als differenzierbare Funktion stetig ist, bestitzt h auf diesem Intervall nach dem Satz vom Maximum und Minimum 1.13.12 ein Maximum m_x. Insbesondere gilt $|h(\vartheta_{x,0}x)| \leqq m_x$. Daher gilt

$$|R_n(h, x, 0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\vartheta_{x,0}x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leqq \left| \frac{2^n f(\vartheta_{x,0}x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leqq m_x \frac{2^n |x|^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(c) Die Koeffizienten a_k der Taylorreihe des Sinus Hyperbolicus mit Entwicklungspunkt 0 sind für gerade k Null. Dasselbe gilt daher auch für $a\sinh(bx)$. In der der Taylorreihe für h sind die Koeffizienten mit geradem Index aber nicht 0. Somit gilt $a = b = 0$. Ein Vergleich der Taylorreihen von h und $\cosh$ liefert unmittelbar $c = 1$ und $d = 2$, also $h(x) = \cosh(2x)$.

O. Alaya, R. Bauer
M. Fetzer, K. Sanei Kashani
B. Krinn, J. Schmid

7. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 22. *Kurvendiskussion*

Die Funktion f sei gegeben durch die Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = \ln(3 \cdot 10^{-4}x^2 + 2 \cdot 10^{-2}x + 1).$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f in $\mathbb{R}$ und untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit.

(b) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie und bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 2\ln(x))$.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(d) Bestimmen Sie die Extremalstellen von f, sowie jeweils deren Typ und die zugehörigen Funktionswerte.

(e) Bestimmen Sie die Wendepunkte von f.

(f) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Definitionsbereich:
Wir erhalten

$$3 \cdot 10^{-4}x^2 + 2 \cdot 10^{-2}x + 1 = 3\left(10^{-2}x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0\,,$$

und damit ist der Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.
Die Funktion f ist auf dem gesammten Definitionsbereich stetig, da sie ein Verkettung von stetigen Funktionen ist. ($\ln$ ist stetig; Polynome sind stetig.)

(b) Symmetrien:
Wir erhalten $f(-x) = \ln(3 \cdot 10^{-4}x^2 - 2 \cdot 10^{-2}x + 1)$. Die Funktion f ist nicht gerade, weil $f(-x) \neq f(x)$, und f ist nicht ungerade, da $f(-x) \neq -f(x)$, deshalb ist f nicht symmetrisch. Aber die verschobene Funktion $g(x) := f\left(x - \frac{10^2}{3}\right)$ ist gerade, denn

$$g(x) = f\left(x - \frac{10^2}{3}\right) = \ln\left(3 \cdot 10^{-4}x^2 + \frac{2}{3}\right) = g(-x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2\ln(x)) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(3 \cdot 10^{-4}x^2 + 2 \cdot 10^{-2}x + 1) - \ln(x^2)\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{3 \cdot 10^{-4}x^2 + 2 \cdot 10^{-2}x + 1)}{x^2}\right)\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{3 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-2}\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{1}\right)\right) \\
&= \ln(3 \cdot 10^{-4})
\end{aligned}$$

(c) Nullstellen:

$$\ln(3\cdot 10^{-4}x^2+2\cdot 10^{-2}x+1) = 0 \Rightarrow 3\cdot 10^{-4}x^2+2\cdot 10^{-2}x = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2\cdot 10^2}{3}, \quad x_2 = 0.$$

(d) Extremalstellen:

$$f'(x) = \frac{6\cdot 10^{-4}x + 2\cdot 10^{-2}}{3\cdot 10^{-4}x^2 + 2\cdot 10^{-2}x + 1} = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{10^2}{3}.$$

Zugehörige Funktionswerte:

$$f\left(-\frac{100}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

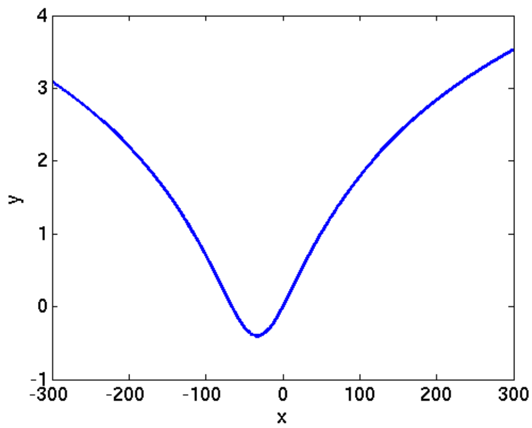
Extrema: $x_3 = -\dfrac{100}{3}$ ist ein globales Minimum, weil $f'(x) < 0$ für $x \in (-\infty, -\frac{100}{3})$ und $f'(x) > 0$ für $x \in (-\frac{100}{3}, +\infty)$.

(e) Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{-18\cdot 10^{-4}(10^{-4}x^2 + \frac{2}{3}\cdot 10^{-2}x - \frac{1}{9})}{(3\cdot 10^{-4}x^2 + 2\cdot 10^{-2}x + 1)^2} = 0$$
$$\Rightarrow x_4 = \left(-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)10^2, \quad x_5 = \left(-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)10^2.$$

Die Wendepunkte heißen $\left((-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3})10^2, \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ und $\left((-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3})10^2, \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)$, da $f''(x) < 0$ für $x \in (-\infty, x_4)$, $f''(x) > 0$ für $x \in (x_4, x_5)$ und $f''(x) < 0$ für $x \in (x_5, \infty)$ gilt (Definition 2.7.4).

(f)



Aufgabe H 23. *partielle Integration*

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\int 3x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\int (\ln(x))^2\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\int \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\int \arctan(x)\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned}
\int 3x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x &= \left[\frac{3}{2}x^2\sin(2x)\right] - \int 3x\sin(2x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{3}{2}x^2\sin(2x) - \frac{3}{2}x(-\cos(2x))\right] - \int \frac{3}{2}(-\cos(2x))\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{3}{2}x^2\sin(2x) + \frac{3}{2}x\cos(2x) - \frac{3}{4}\sin(2x)\right]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int (\ln(x))^2\,\mathrm{d}\,x &= [\ln(x)\,(x\ln(x)-x)] - \int (x\ln(x)-x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \\
&= [\ln(x)\,(x\ln(x)-x)] - \int \ln(x)-1\,\mathrm{d}\,x \\
&= [\ln(x)\,(x\ln(x)-x)] - [x\ln(x)-2x] \\
&= \left[x\,(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x\right]
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\,\mathrm{d}\,x &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\right] + \int \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x}(\sin(3x))\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\right] + \left[\frac{3}{4}\mathrm{e}^{2x}\sin(3x)\right] - \frac{9}{4}\int \mathrm{e}^{2x}(\cos(3x))\,\mathrm{d}\,x \\
\frac{13}{4}\int \mathrm{e}^{2x}(\cos(3x))\,\mathrm{d}\,x &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cos(3x)\right] + \left[\frac{3}{4}\mathrm{e}^{2x}\sin(3x)\right] \\
\int \mathrm{e}^{2x}(\cos(3x))\,\mathrm{d}\,x &= \left[\frac{2}{13}\mathrm{e}^{2x}\cos(3x) + \frac{3}{13}\mathrm{e}^{2x}\sin(3x)\right]
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int \arctan(x)\,\mathrm{d}\,x &= [x\arctan(x)] - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= [x\arctan(x)] - \int \frac{1}{2(1+u)}\,\mathrm{d}\,u \\
&= \left[x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right]
\end{aligned}$$

Aufgabe H 24. *Integration durch Substitution*

Bestimmen Sie Stammfunktionen zu

(a) $f\colon (0,\sqrt{\pi}) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\cot(x^2)$

(b) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{a^x + a^{-x}}, \quad a > 0,\ a \neq 0$

und berechnen Sie die folgenden Integrale

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+(\sin(x))^2}}\,\mathrm{d}\,x$ **(e)** $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x.$

Hinweis: $x(t) = \sinh(t)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) 1. Substitution $t = x^2$, $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = 2x$.

$$\int x\cot(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int \cot(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}\,t$$

2. Substitution $u = \sin(t)$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} = \cos(t)$.

$$\frac{1}{2}\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{1}{2}\ln|u|\right] = \left[\frac{1}{2}\ln|\sin(x^2)|\right]$$

(b) Substitution $u = a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \ln(a)\mathrm{e}^x$.

$$\int \frac{1}{a^x + a^{-x}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\ln(a)}\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{1}{\ln(a)}\arctan(u)\right] = \left[\frac{1}{\ln(a)}\arctan(a^x)\right]$$

(c) Substitution $u = \sqrt{1+x} \Rightarrow x = u^2 - 1$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}\,u = \left[2\arctan(u)\right] = \left[2\arctan(\sqrt{1+x})\right]$$

(d) 1. Substitution $u = \sin(x)$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \cos(x)$. und 2. Substitution $t = 1 + u^2$, $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u} = 2u$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+(\sin(x))^2}}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}\,t = [\sqrt{t}]_1^2 = \sqrt{2} - 1$$

(e) Substitution $x = \sinh(t)$, $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \cosh(t)$.

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Mit partieller Integration, $u = \cosh(t)$ und $v' = \cosh(t)$, erhält man

$$\int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}\,t = -\int \sinh^2(t)\,\mathrm{d}\,t + [\sinh(t)\cosh(t)].$$

Mit Hilfe der Identität $\sinh^2(t) = \cosh^2(t) - 1$ folgt

$$\int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}[x] + \frac{1}{2}[\sinh(t)\cosh(t)].$$

Rücksubstitution und die Identität $\cosh(\operatorname{arcsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$ ergibt

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2}[\operatorname{arcsinh}(x)] + \frac{1}{2}[x\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))]\\ &= \frac{1}{2}[\operatorname{arcsinh}(x)] + \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+1}].\end{aligned}$$

Aufgabe H 25.

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon\ (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)2^n} x^n\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ und die zweite Ableitung von f.

(b) Benutzen Sie die Formel für die geometrische Reihe, um einen geschlossenen Ausdruck (ohne unendliche Summe) für f'' zu finden.

(c) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion f ist von der Form $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)2^n}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+1-1)2^{n+1}}}{\dfrac{1}{n(n-1)2^n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)}{(n+1)2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Also beträgt der Konvergenzradius 2.
Die ersten beiden Ableitungen sind

$$f'\colon\ (-2,2) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)2^n} x^{n-1}$$

und

$$f''\colon\ (-2,2) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n-2}\,.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n-2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(j+2)}} x^j \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} x^j \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^j \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

(c) Integrieren ergibt

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + C$$

und

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}x + Cx + D$$

mit noch zu bestimmenden reellen Konstanten C und D. Einsetzen ergibt

$$f(0) = f'(0) = 0\,.$$

Daraus folgt $C = 0$ und $D = 0$. Der Ausdruck lautet also

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}x$$

.

O. Alaya, R. Bauer
M. Fetzer, K. Sanei
Kashani, F. Kissling,
B. Krinn, J. Schmid

8. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Dr. M. Künzer
Prof. Dr. M. Stroppel

Sommersemester 2013

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 26. *Integration durch Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} \frac{x^7}{(x^2+1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+2)^3}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^{3x}\cosh(x)^2}\,\mathrm{d}\,x$ *Hinweis:* Substitution.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned}\int_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} \frac{x^7}{(x^2+1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} x^3-2x^2+2x-2+\frac{3x^3+2x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int_{-1/\sqrt{3}}^{+1/\sqrt{3}} x^3-2x^2+2x-2+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+x^2-2x+3\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2}\arctan(x)\right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\\ &= -\frac{107}{54}\sqrt{3}+3\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{(1-x+x^2)(1+x+x^2)}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \int \frac{A+Bx}{1-x+x^2}+\frac{C+Dx}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

die Partialbruchzerlegung ergibt folgendes LGS

$$\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

d.h. $A=C=D=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$. Wir erhalten

$$\int \frac{1}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int \frac{1-x}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}\,x+\frac{1}{2}\int \frac{1+x}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2.$$

Mit Lemma 3.4.8 und 3.4.9 können wir die Integrale I_1 und I_2 bestimmen. Für I_1 ist $\beta = -1$, $\gamma = 1$, $\Delta = \frac{3}{4}$ und $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[-\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

Für I_2 ist $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\Delta = \frac{3}{4}$ und $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}(I_1+I_2) \\ &= \left[\frac{1}{4}\left(\ln|x^2+x+1| - \ln|x^2-x+1|\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right] \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-1}{(x^2+x+2)^3}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{(x^2+x+2)^2} - \frac{x+3}{(x^2+x+2)^3}\,\mathrm{d}\,x \\ &=: I_1 - I_2 \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.4.9 gilt $\beta = 1$ und $\gamma = 2$, d. h. $\Delta = \frac{7}{4}$ und $u = \frac{2}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{2})$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1 = \int \frac{1}{(x^2+x+2)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{8}{7\sqrt{7}}\left[\frac{1}{2}\arctan(u) + \frac{u}{2(u^2+1)}\right] \\ &= \left[\frac{4}{7\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}(2x+1)\right) + \frac{2x+1}{7(x^2+x+2)}\right] \end{aligned}$$

und mit Lemma 3.4.7 und Lemma 3.4.8

$$\begin{aligned} I_2 = \int \frac{x+3}{(x^2+x+2)^3}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^3}\,\mathrm{d}\,x + \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+2)^3}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[-\frac{1}{4(x^2+x+2)^2}\right] + \frac{5}{2}I_3. \end{aligned}$$

Das letzte Integral lässt sich berechnen, indem man zweimal Lemma 3.4.9 anwendet

$$I_3 = \int \frac{1}{(x^2+x+2)^3}\,\mathrm{d}\,x = \frac{4^2\cdot 2}{7^2\sqrt{7}}\left(\frac{3}{4}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,u + \left[\frac{u}{4(u^2+1)^2}\right]\right)$$
$$= \left[\frac{4^2\cdot 2}{7^2\sqrt{7}}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\arctan(u) + \frac{u}{2(u^2+1)}\right) + \frac{u}{4(u^2+1)^2}\right)\right]$$
$$= \left[\frac{3}{49}\cdot\frac{(2x+1)}{(x^2+x+2)} + \frac{12}{49\cdot\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}(2x+1)\right) + \frac{1}{14}\cdot\frac{(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}\right].$$

Fasst man I_1, I_2 und I_3 zusammen, so erhält man

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+2)^3}\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \left[-\frac{2\cdot\sqrt{7}}{343}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}(2x+1)\right) - \frac{2x+1}{98(x^2+x+2)} + \frac{1-5x}{14(x^2+x+2)^2}\right].$$

(d)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\mathrm{e}^{3x}\cosh(x)^2}\,\mathrm{d}\,x &= 4\int \frac{1}{\mathrm{e}^{5x}+2\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}\,x\\ &= 4\int \frac{1}{t^5+2t^3+t}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t\\ &= 4\int \frac{1}{t^2(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}\,t\end{aligned}$$

Wir benutzen den Ansatz

$$\frac{1}{t^2(1+t^2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} + \frac{Et+F}{(1+t^2)^2}$$

und erhalten

$$1 = At(1+t^2)^2 + B(1+t^2)^2 + (Ct+D)t^2(1+t^2) + (Et+F)t^2$$

das heißt

$$1 = A(t+2t^3+t^5) + B(1+2t^2+t^4) + C(t^5+t^3) + D(t^4+t^2) + Et^3 + Ft^2$$

Koeffizientenvergleich bei t^0 liefert $B=1$. Bei t^1 erhalten wir $A=0$. Bei t^5 erhalten wit $C=0$. Bei t^3 erhalten wir dann $E=0$. Bei t^4 ergibt sich $D=-1$. Bei t^2 erhalten wir $F=-1$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\mathrm{e}^{3x}\cosh(x)^2}\,\mathrm{d}\,x &= 4\int \frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}\,t\\ &= 4\left[-\frac{1}{t} - \arctan(t) - \frac{1}{2}\left(\arctan(t) + \frac{t}{t^2+1}\right)\right] \text{ (mit 3.4.14)}\\ &= 4\left[-\mathrm{e}^{-x} - \arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{1}{2}\left(\arctan(\mathrm{e}^x) + \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right)\right]\\ &= \left[-4\mathrm{e}^{-x} - 6\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right]\end{aligned}$$

Aufgabe H 27. *Universalsubstitution für trigonometrische Integrale*

(a) Rechnen Sie nach, dass für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bei Verwendung der „*Universalsubstitution*" $u\colon x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ gilt:

$$u'(x) = \frac{1+\big(u(x)\big)^2}{2}\,, \qquad \sin(x) = \frac{2u(x)}{1+\big(u(x)\big)^2}\,, \qquad \cos(x) = \frac{1-\big(u(x)\big)^2}{1+\big(u(x)\big)^2}\,.$$

(b) Verwenden Sie die Resultate der Universalsubstitution aus Teilaufgabe (a), um folgende Integrale zu berechnen:

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x \qquad \int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x \qquad \int \frac{1}{\sin(x)^2\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir verwenden die gegebene Substitution $u : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}$.
Mit der Quotientenregel gilt

$$u'(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}\right) = \frac{1}{2}(1+(u(x))^2).$$

Des Weiteren gilt

$$\frac{2u(x)}{1+(u(x))^2} = \frac{2\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1+\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \sin(x),$$

wobei für die letzte Identität $2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = \sin(x)$ verwendet wurde.
Mit $\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = \cos(x)$ folgt

$$\frac{1-(u(x))^2}{1+(u(x))^2} = \frac{1-\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{1+\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(x).$$

(b) Einsetzen der Resultate aus Teilaugabe (a) ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1+u(x)^2}{1-(u(x))^2}\cdot\frac{2}{1+(u(x))^2}\,\mathrm{d}\,u\\ &= \int \frac{2}{1-(u(x))^2}\,\mathrm{d}\,u = \int \frac{2}{(1-u(x))(1+u(x))}\,\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

mit Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{(1-u(x))} + \frac{1}{(1+u(x))}\,\mathrm{d}\,u\\ &= \left[-\ln|u(x)-1| + \ln|u(x)+1|\right] = \left[\ln\left|\frac{u(x)+1}{u(x)-1}\right|\right]\\ &= \left[\ln\left|\frac{\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-1}\right|\right].\end{aligned}$$

Für das zweite Integral gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1+(u(x))^2}{2u(x)} \cdot \frac{1+(u(x))^2}{1-(u(x))^2} \cdot \frac{2}{1+(u(x))^2}\,\mathrm{d}\,u \\ &= \int \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{1+(u(x))^2}{1-(u(x))^2}\,\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

mit Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{u(x)} - \frac{1}{u(x)-1} - \frac{1}{u(x)+1}\,\mathrm{d}\,u \\ &= [\ln|u(x)| - \ln|u(x)-1| - \ln|u(x)+1|] \\ &= [\ln|u(x)| - \ln|(u(x)+1)(u(x)-1)|] \\ &= \left[\ln|u(x)| - \ln|(u(x)^2-1)|\right] \\ &= \left[\ln\left|\frac{u(x)}{u(x)^2-1}\right|\right] \\ &= \left[\ln\left|\frac{\tan(x/2)}{\tan(x/2)^2-1}\right|\right].\end{aligned}$$

Für das dritte Integral gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)^2\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{(1+u(x))^3}{(2u(x))^2(1-u(x))^2} \cdot \frac{2}{1+(u(x))^2}\,\mathrm{d}\,u \\ &= \int \frac{(1+u(x))^2}{2(u(x))^2((u(x))^2-1)}\,\mathrm{d}\,u\end{aligned}$$

mit Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{u(x)} + \frac{1}{2(u(x))^2} + \frac{2}{(u(x)-1)^2}\,\mathrm{d}\,u \\ &= \left[\frac{1}{2}u(x) + \ln|u(x)| - \frac{1}{2u(x)} - \frac{2}{u(x)-1}\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \frac{1}{2}\cot\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{\tan(\frac{x}{2})-1}\right].\end{aligned}$$

Aufgabe H 28. *Approximation von Integralen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\left(-x^2\right)}.$$

(a) Berechnen Sie einen Näherungswert für $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x$, indem Sie $\int_1^3 T_2(f,x,2)\,\mathrm{d}\,x$ berechnen.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Restglieds eine obere Schranke für den Fehler

$$\left|\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_1^3 T_2(f,x,2)\,\mathrm{d}\,x\right|.$$

(c) Verbessern Sie Ihren Näherungswert aus Teil (a), indem Sie das Intervall in 2 gleich große Teilintervalle zerlegen und in den beiden Teilstücken jeweils f durch das Taylorpolynom der Stufe 2 ersetzen, das die Teilintervallmitte als Entwicklungspunkt hat. Berechnen Sie mit Hilfe von Restgliedern eine obere Schranke für den Fehler. Vergleichen Sie mit P 24 (b).

Hinweis: Zur Bestimmung von Funktionswerten können Sie elektronische Hilfsmittel einsetzen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen zunächst die benötigten Ableitungen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\mathrm{e}^{\left(-x^2\right)} \\ f''(x) &= \left(4x^2-2\right)\mathrm{e}^{\left(-x^2\right)} \\ f^{(3)}(x) &= \left(-8x^3+12x\right)\mathrm{e}^{\left(-x^2\right)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$T_2(f,x,2) = \mathrm{e}^{-4} - 4\mathrm{e}^{-4}(x-2) + 7\mathrm{e}^{-4}(x-2)^2$$

und

$$\int_1^3 T_2(f,x,2)\,\mathrm{d}\,x = \left[\mathrm{e}^{-4}x - 2\mathrm{e}^{-4}(x-2)^2 + \frac{7}{3}\mathrm{e}^{-4}(x-2)^3\right]_1^3 = \frac{20}{3}\mathrm{e}^{-4}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \left|\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_1^3 T_2(f,x,2)\,\mathrm{d}\,x\right| &= \left|\int_1^3 R_2(f,x,2)\,\mathrm{d}\,x\right| \\ &= \left|\int_1^3 \frac{f^{(3)}(2+\vartheta_{x,x_0}(x-2))}{3!}(x-2)^3\,\mathrm{d}\,x\right| \\ &\leqq \int_1^3 \left|\frac{f^{(3)}(2+\vartheta_{x,x_0}(x-2))}{3!}(x-2)^3\right|\mathrm{d}\,x \\ &\leqq \int_1^3 \left|\frac{\max\limits_{y\in[1,3]}\left(-8y^3+12y\right)\mathrm{e}^{\left(-y^2\right)}}{3!}(x-2)^3\right|\mathrm{d}\,x \end{aligned}$$

Um das Maximum zu bestimmen suchen wir nach kritischen Stellen der Funktion

$$g\colon\ [1,3] \to \mathbb{R}\colon y \mapsto \left(-8y^3 + 12y\right) \mathrm{e}^{\left(-y^2\right)}.$$

Dazu berechnen wir die Ableitung.

$$g'(y) = \left(16y^4 - 48y^2 + 12\right) \mathrm{e}^{\left(-y^2\right)}$$

Nullsetzen ergibt die zu lösende Gleichung $4y^4 - 12y^2 + 3 = 0$. Die Substitution $z = y^2$ liefert die Gleichung $4z^2 - 12z + 3 = 0$, die die Lösungen $\frac{3\pm\sqrt{6}}{2}$ hat. Resubstitution liefert die 4 Lösungen

$$y_1 = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{6}}}{2}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{6+2\sqrt{6}}}{2}, \quad y_3 = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{6}}}{2}, \quad y_4 = -\frac{\sqrt{6-2\sqrt{6}}}{2},$$

Nur y_1 liegt im Intervall $[1,3]$. Vergleich der Funktionswerte ergibt, dass

$$|g(1)| > |g(y_1)| \quad \text{und} \quad |g(1)| > |g(3)|$$

gilt. Damit nimmt g sein Maximum an der Stelle $y = 1$ an und wir bekommen

$$\begin{aligned}
\left| \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_1^3 T_2(f,x,2)\,\mathrm{d}\,x \right| &\leqq \int_1^3 \frac{4}{6\mathrm{e}} \left|(x-2)^3\right| \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{4}{6\mathrm{e}} 2 \int_2^3 \left|(x-2)^3\right| \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{4}{6\mathrm{e}} 2 \int_2^3 (x-2)^3\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{4}{6\mathrm{e}} 2 \left[\frac{1}{4}(x-2)^4\right]_2^3 \\
&= \frac{2}{6\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_1^2 T_2(f,x,\frac{3}{2})\,\mathrm{d}\,x + \int_2^3 T_2(f,x,\frac{5}{2})\,\mathrm{d}\,x &= \int_1^2 \mathrm{e}^{-9/4} - 3\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}(x-\frac{3}{2}) + \frac{7}{2}\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}(x-\frac{3}{2})^2\,\mathrm{d}\,x \\
&\quad + \int_2^3 \mathrm{e}^{-\frac{25}{4}} - 5\mathrm{e}^{-\frac{25}{4}}(x-\frac{5}{2}) + \frac{23}{2}\mathrm{e}^{-\frac{25}{4}}(x-\frac{5}{2})^2\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\mathrm{e}^{-9/4}x - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}(x-\frac{3}{2})^2 + \frac{7}{6}\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}(x-\frac{3}{2})^3\right]_1^2 \\
&\quad + \left[\mathrm{e}^{-\frac{25}{4}}x - \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-\frac{25}{4}}(x-\frac{5}{2})^2 + \frac{23}{2}\mathrm{e}^{-\frac{25}{12}}(x-\frac{5}{2})^3\right]_2^3 \\
&= \frac{31}{24}\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}} + \frac{47}{24}\mathrm{e}^{-\frac{25}{4}}
\end{aligned}$$

Als Fehler ergeben sich

$$
\begin{aligned}
F_1 := \left| \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_1^2 T_2(f,x,\tfrac{3}{2})\,\mathrm{d}\,x \right| &= \left| \int_1^2 R_2(f,x,\tfrac{3}{2})\,\mathrm{d}\,x \right| \\
&\leqq \int_1^2 \left| \frac{\max\limits_{y\in[1,2]} (-8y^3+12y)\,\mathrm{e}^{(-y^2)}}{3!} \left(x-\frac{3}{2}\right)^3 \right| \mathrm{d}\,x \\
&\leqq \int_1^2 \frac{4}{6\mathrm{e}} \left| \left(x-\frac{3}{2}\right)^3 \right| \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{8}{6\mathrm{e}} \int_{\frac{3}{2}}^2 \left(x-\frac{3}{2}\right)^3 \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{8}{384\mathrm{e}} = \frac{1}{48\mathrm{e}}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
F_2 := \left| \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_2^3 T_2(f,x,\tfrac{5}{2})\,\mathrm{d}\,x \right| &= \left| \int_2^3 R_2(f,x,\tfrac{3}{2})\,\mathrm{d}\,x \right| \\
&\leqq \int_2^3 \left| \frac{\max\limits_{y\in[2,3]} (-8y^3+12y)\,\mathrm{e}^{(-y^2)}}{3!} \left(x-\frac{5}{2}\right)^3 \right| \mathrm{d}\,x \\
&\leqq \int_2^3 \frac{-30}{\mathrm{e}^9} \left| \left(x-\frac{5}{2}\right)^3 \right| \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{-30}{\mathrm{e}^9} \int_{\frac{5}{2}}^2 \left(x-\frac{5}{2}\right)^3 \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{15}{16\mathrm{e}^9}\,,
\end{aligned}
$$

also insgesamt ein Fehler von höchstens $\frac{1}{48\mathrm{e}} + \frac{15}{16\mathrm{e}^9} \approx 0.007779851716$. Dies liegt innerhalb der Schranke aus Aufgabe P 24.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 29. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x+1}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x = \left[\ln\left|\frac{\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-1}\right|\right].$$

Nach Aufgabe H 27 b). Daher konvergiert

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{a\to\frac{\pi}{2}} \left[\ln\left|\frac{\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-1}\right|\right]_0^a \\
&= \lim_{a\to\frac{\pi}{2}} \ln\left|\frac{\tan(a/2)+1}{\tan(a/2)-1}\right| - \ln\left|\frac{\tan(0)+1}{\tan(0)-1}\right| \\
&= \ln\left|\lim_{a\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(a/2)+1}{\tan(a/2)-1}\right|
\end{aligned}$$

nicht, da $\tan(a/2)-1$ gegen 0 geht.

(b) Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{A+Bx}{x^2+1} + \frac{C+Dx}{(x^2+1)^2}$$

führt auf

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[\arctan(x) - \left(\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{x}{x^2+1}\right)\right] \quad \text{nach 3.4.14} \\
&= \left[\frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{x}{x^2+1}\right]
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{a\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\arctan(a) - \frac{a}{a^2+1}\right) - 0 = \frac{\pi}{4}$$

und, da die Funktion symmetrisch ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}$$

(c) Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{x-1}{x^3+4x^2+4x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3x+1}$$

führt auf

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x+1}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{2}{x+1} - 2\frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[2\ln|x+1| - \ln\left|x^2+3x+1\right|\right] .\end{aligned}$$

Damit das Integral konvergiert, müssen die Teilintegrale

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x+1}\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x+1}\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x+1}\,\mathrm{d}\,x$$

und

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x+1}\,\mathrm{d}\,x$$

alle konvergieren. Jedoch existiert

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x+1}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{a\to-1}\left[2\ln|x+1| - \ln\left|x^2+3x+1\right|\right]_{-2}^{a} \\ &= \lim_{a\to-1}\left(2\ln|a+1| - \ln\left|a^2+3a+1\right|\right) - \ln(1) + \ln(1) \\ &= \left(2\ln\left|\lim_{a\to-1}\frac{a+1}{a^2+3a+1}\right|\right)\end{aligned}$$

nicht.

(d) Es gilt

$$\int x\ln(x)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right] - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2\right].$$

Also ist

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}\,x &= \lim a\to 0\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2\right]_a^1\\ &= \lim_{a\to 0}\left(0-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}a^2\ln(a) - \frac{1}{4}a^2\right)\\ &= -\frac{1}{4} + \lim_{a\to 0}\frac{1}{2}a^2\ln(a)\,.\end{aligned}$$

Nach 2.5.8 gilt $\lim\limits_{a\to 0} a\ln(a) = 0$. Damit gilt auch $\lim\limits_{a\to 0} a^2\ln(a) = 0$. Insgesamt ergibt sich also $\int\limits_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}\,x = -\frac{\pi}{4}$.

Aufgabe H 30. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie auf Konvergenz:

(a) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^3+x+11}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{(x^2+2)/(x^3+x+11)} = 1\,.$$

Also haben $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^3+x+11}\,\mathrm{d}\,x$ und $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$ dasselbe Konvergenzverhalten bei $+\infty$. Da letzteres Integral wegen $\lim_{\beta\to+\infty}[\ln(x)]_1^\beta = +\infty$ divergiert, divergiert auch ersteres.

(b) Wir definieren

$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+3x+1)/\mathrm{e}^x}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = 0$$

Und das Integral

$$\int\limits_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}\,x$$

konvergiert. Da beide Funktionen im Intervall $(0,\infty)$ positiv sind, folgt nach 3.7.11 die Konvergenz von $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$.

(c) Da sowohl 0 als auch $+\infty$ uneigentliche Stellen des Integrals $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$ sind, ist die Konvergenz des Integrals $\int_0^{+\infty}$ äquivalent zur Konvergenz der beiden Integrale $\int_0^1$ und $\int_1^{+\infty}$.

Wir wollen die Divergenz von $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$ belegen.

Mit l'Hôpital wird

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^{-2}}{\arctan(x)/x^3} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{\arctan(x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1/(x^2+1)} = 1\,.$$

Also haben $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$ und $\displaystyle\int\limits_0^1 x^{-2}\,\mathrm{d}\,x$ dasselbe Konvergenzverhalten bei 0. Und letzteres divergiert wegen $\lim_{\alpha\to 0+0}[-x^{-1}]_\alpha^1 = +\infty$. Also divergiert auch ersteres.

Alles in allem zeigt dies die Divergenz von $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$

Alternativlösung mit Stammfunktion:
Es gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x &= \left[-\frac{1}{2}\frac{\arctan(x)}{x^2}\right] + \int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[-\frac{1}{2}\frac{\arctan(x)}{x^2}\right] + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[-\frac{\arctan(x)}{2x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\arctan(x)\right]
\end{aligned}$$

Das Integral $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert nicht, da mit l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^2}{\arctan(x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{2x}{1/(1+x^2)} = 0\,,$$

also

$$\lim_{x\to 0+0} -\frac{\arctan(x)}{2x^2} = -\infty\,,$$

und da
$$\lim_{x\to 0+0} -\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\arctan(x) \;=\; -\infty.$$

Daher konvergiert auch $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$ nicht.

(d) Nach 3.8.1 haben $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ und $\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}\,x$ dasselbe Konvergenzverhalten. Das Integral
$$\begin{aligned}\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int\limits_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}\,u \\ &= \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln(2)}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\end{aligned}$$
konvergiert.

(Hierbei ist aber natürlich $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \neq \frac{1}{\ln(2)}$!)

Aufgabe H 31. Γ*-Funktion und Stirling-Formel*

Die Γ-Funktion (siehe 3.7.12) ist definiert durch $\Gamma\colon\ (0,+\infty) : \mathbb{R}\colon x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t$.

(a) Zeigen Sie, dass Γ für alle $x \in (1,+\infty)$ die Gleichung $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ erfüllt.

(b) Folgern Sie, dass für jede natürliche Zahl n die Gleichung $\Gamma(n) = (n-1)!$ gilt. Skizzieren Sie den Graphen von Γ.

(c) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt:
$$\int\limits_2^{n} \ln(x-1)\,\mathrm{d}\,x \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leqq \int\limits_1^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$$

(d) Verifizieren Sie, dass für jede natürliche Zahl n gilt: $\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leqq n! \leqq \mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$

Hinweis: Dies ist eine (leicht vereinfachte) Version der sogenannten Stirling-Formel, die oft in der Form $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ auftaucht.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \left[-\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(x-1)t^{x-2}\,\mathrm{d}\,t \\ &= 0 + (x-1)\int_0^{+\infty} t^{x-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = (x-1)\Gamma(x-1).\end{aligned}$$

(b) Wir beweisen die Formel mit vollständiger Induktion:

IA Der Werte von $\Gamma(1)$ beträgt

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1 = 0!.$$

IH Sei $\Gamma(n) = (n-1)!$

IS

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) && \text{nach } \textbf{(a)} \\ &= n(n-1)! && \text{nach } \textbf{IH} \\ &= n!\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen Untersumme der Funktion

$$f\colon\ [1,n] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(x).$$

Bezüglich der Partition $P := \left\{k\in\mathbb{N}\,\middle|\, 1 \leqq k \leqq n\right\}$ des Intervalls $[1,n]$:

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,P) &= \sum_{k=1}^{n-1} \inf\left\{\ln(x)\,\middle|\, x\in[k,k+1]\right\}\cdot((k+1)-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k)\cdot 1 \qquad \text{(da der Logarithmus monoton strigend ist)}\end{aligned}$$

Wir berechnen Obersumme der Funktion

$$g\colon\ [2,n] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(x-1)$$

bezüglich der Partition $Q := \left\{k\in\mathbb{N}\,\middle|\, 2 \leqq k \leqq n\right\}$ des Intervalls $[2,n]$::

$$\begin{aligned}\overline{S}(g,Q) &= \sum_{k=2}^{n-1} \sup\left\{\ln(x-1)\,\middle|\, x\in[k,k+1]\right\}\cdot((k+1)-k) \\ &= \sum_{k=2}^{n-1}\ln(k)\cdot 1 \qquad \text{(wieder aufgrund der Monotonie)}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_2^{n+1} \ln(x-1)\,\mathrm{d}\,x \leqq & \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqq & \int_1^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}\,x \\
[(x-1)\ln(x-1)-(x-1)]_2^{n+1} \leqq & \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqq & [x\ln(x)-x]_1^{n+1} \\
n\ln(n)-n+1 \leqq & \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqq & (n+1)\ln(n+1)-(n+1)+1 \\
\mathrm{e}^{n\ln(n)-n+1} \leqq & \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n}\ln(k)} \leqq & \mathrm{e}^{(n+1)\ln(n+1)-(n+1)+1} \\
n^n \cdot \mathrm{e}^{-n} \cdot \mathrm{e} \leqq & \mathrm{e}^{\ln(n!)} \leqq & (n+1)^{(n+1)} \cdot \mathrm{e}^{-(n+1)\cdot \mathrm{e}} \\
\mathrm{e}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqq & n! \leqq & \mathrm{e}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe H 32. *Graph einer Funktion*
Wir betrachten $f\colon D \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sqrt{4-2x^2-y^2}$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteqq \mathbb{R}^2$ und den Wertebereich W von f.

(b) Zeichnen Sie die achsenparallelen Schnitte für $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, sowie die Niveaulinien zur Höhe c für $c \in \{0, 1/2, 1, 2\}$.

(c) Skizzieren Sie den Graph $\Gamma(f)$ und markieren Sie die Menge

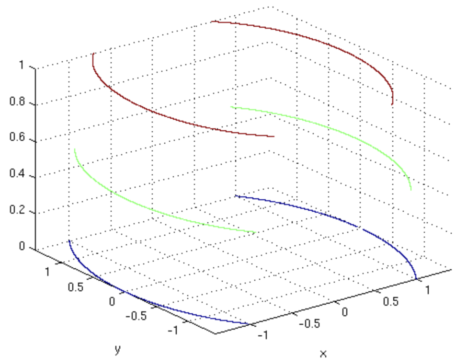
$$\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ y=-x,\ 0 \leqq z \leqq f(x,y)\} .$$

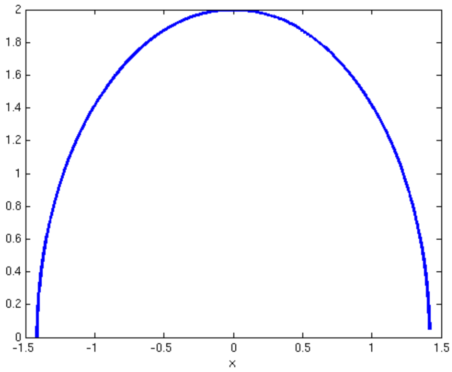
Lösungshinweise hierzu:

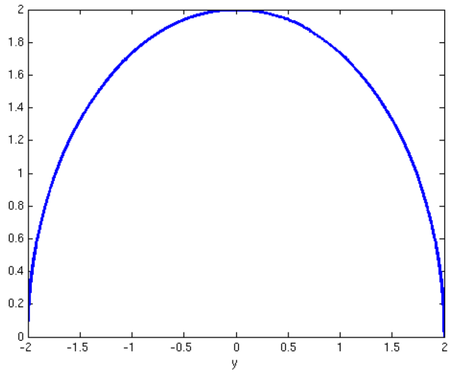
(a) $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ und $-2 \leqq -\sqrt{4-2x^2} \leqq y \leqq \sqrt{4-2x^2} \leqq 2$
$W = [0,2]$

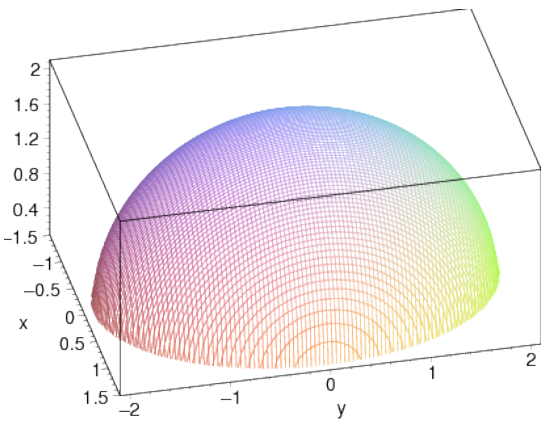
(b) Niveaulinien achsenparallele Schnitte

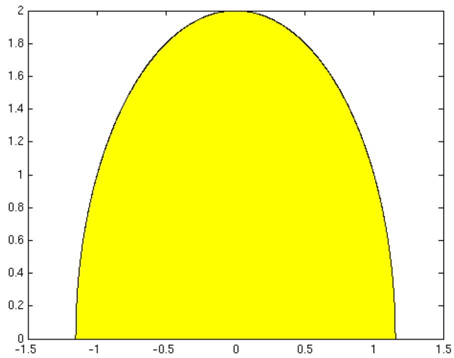
(c) Graph $\Gamma(f)$ und Menge S


x
y


x


y


x
y



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 33. *Differenzierbarkeit*

(a) Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto 2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

auf Stetigkeit sowie partielle und totale Differenzierbarkeit.

(b) Sei die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+4y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\lim\limits_{t\to 0} g(\alpha t, \beta t)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie $\lim\limits_{y\to 0} g(y^3, y)$. Wo ist g stetig? Wo ist g partiell differenzierbar? Berechnen Sie dort den Gradienten von g.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach 4.2.8 ist $f(x,y)$ als Komposition zweier stetiger Funktionen (die Wurzelfunktion verkettet mit einem Polynom) stetig auf $\mathbb{R}^2$.
Die Funktion $f(x,y)$ ist als Komposition von differenzierbaren Funktionen für alle $(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{(0,0)^\intercal\right\}$ differenzierbar und hat die partiellen Ableitungen:

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion selbst und all ihrer partiellen Ableitungen ist $f(x,y)$ für alle $(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{(0,0)^\intercal\right\}$ nach Satz 4.4.4 auch total differenzierbar.

Für $(x,y)^\intercal = (0,0)^\intercal$ ist f nicht partiell differenzierbar und somit auch nicht total differenzierbar. Dies folgt ebenfalls aus Satz 4.4.4. oder auch ad hoc daraus, dass der folgende Grenzwert nicht existiert:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

(b) Um $\lim\limits_{t\to 0} g(\alpha t, \beta t)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zu bestimmen betrachten wir als Erstes die Sonderfälle:

- Für $\alpha = 0$ gilt $\lim\limits_{t\to 0} g(\alpha t, \beta t) = \lim\limits_{t\to 0} g(0, \beta t) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{0}{4a^6t^6} = 0$.

- Für $\beta = 0$ gilt $\lim\limits_{t\to 0} g(\alpha t, \beta t) = \lim\limits_{t\to 0} g(\alpha t, 0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{0}{\alpha^2 t^2} = 0$.
- Für $\alpha = \beta = 0$ gilt $g(\alpha t, \beta t) = g(0,0) = 0$.

Für $\alpha\beta \neq 0$ erhalten wir

$$\lim_{t\to 0} g(\alpha t, \beta t) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^3 t^4}{\alpha^2 t^2 + 4\beta^6 t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^3 t^2}{\alpha^2 + 4\beta^6 t^4} = 0.$$

Für $\lim\limits_{y\to 0} g(y^3, y)$ gilt:

$$\lim_{y\to 0} g(y^3, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{5y^6} = \frac{1}{5}.$$

Der Gradient lautet:

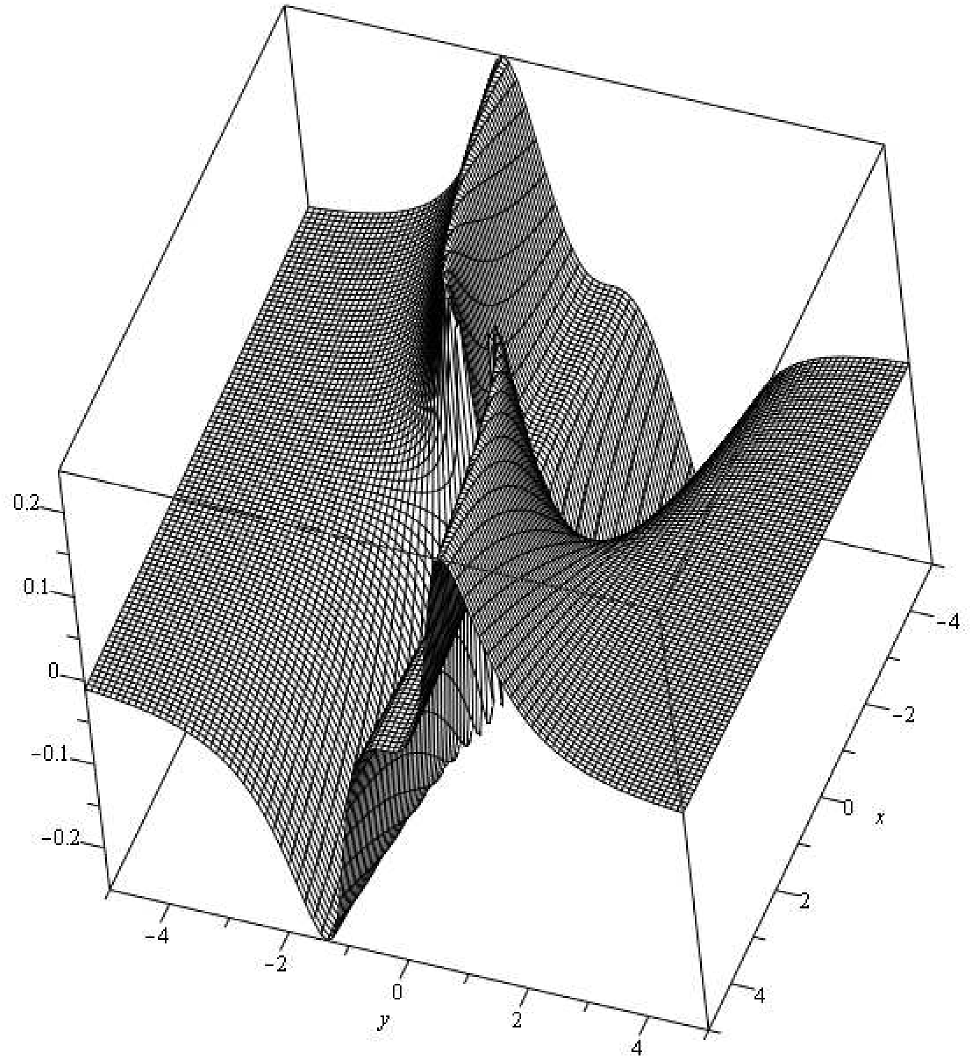
$$\operatorname{grad} g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y^3\left(4y^6 - x^2\right)}{\left(x^2 + 4y^6\right)^2} \\ \dfrac{3xy^2\left(x^2 - 4y^6\right)}{\left(x^2 + 4y^6\right)^2} \end{pmatrix}$$

Die Funktion g ist wegen 4.2.10 für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{(0,0)^\intercal\right\}$ stetig. Sie ist dort auch partiell differenzierbar, da der Quotient differenzierbarer Funktionen $\dfrac{g_1(x,y)}{g_2(x,y)}$ wieder differenzierbar ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $g_2(x,y) \neq 0$.
Die Funktion g ist an der Stelle $(0,0)$ unstetig und somit auch nicht partiell differenzierbar, weil $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ gar nicht existiert.
Bemerkung: Hier wird bestätigt, dass die Stetigkeit von $g(x,0)$ und $g(0,y)$ nicht ausreichend für die Stetigkeit der Funktion $g(x,y)$ ist.
Laut 4.7.2 ist die Stetigkeit von g an der Stelle $(0,0)$ äquivalent zu:
Für alle Folgen $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, die gegen $(0,0)$ konvergieren, ist

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = 0 = g(0,0).$$

Für die Folge $(x_n, y_n) = \left(\alpha\frac{1}{n}, \beta\frac{1}{n}\right)$ gilt zwar $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\alpha\frac{1}{n}, \beta\frac{1}{n}\right) = 0 = g(0,0)$.

Für die Folge $(x_n, y_n) = \left(\left(\frac{1}{n}\right)^3, \frac{1}{n}\right)$ gilt aber $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5} \neq g(0,0)$.



Aufgabe H 34. *Existenz von Extremstellen*

Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto x+\mathrm{e}^y-5$. Sei $M:=\{(x,y)\in\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+ \mid xy=1\}\subseteqq\mathbb{R}^2$.

(a) Ist M abgeschlossen? Ist M kompakt? Ist M konvex? Ist $(1,1)\in M^\circ$? Skizze!

(b) Hat f auf M ein Maximum? Hat f auf M ein Minimum?

(c) Sei v ein Vektor der Länge 1 in Richtung der Tangente an M in $(1,1)$. Bestimmen Sie $\nabla f(1,1)$, $\partial_v f(1,1)$ und $\partial_{-v} f(1,1)$. Hat f auf M bei $(1,1)$ ein Minimum?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es sei $g\colon\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto xy$, dann ist $M=g^{-1}(\{1\})$. g ist als Polynom stetig, daher ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge wiederum abgeschlossen. Da jede endliche Menge im $\mathbb{R}^n$ (und damit insbesondere auch $\{1\}$) abgeschlossen ist, ist M somit abgeschlossen.

M ist jedoch nicht kompakt, da nicht beschränkt, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(n, \frac{1}{n}) \in M$. Dieser Punkt liegt aber in einem Kreis, dessen Radius echt größer ist als n, daher ist M nicht beschränkt.

M ist auch nicht konvex. Es liegen $(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)$ in M. Wäre M konvex, so müsste jeder Punkt auf der Strecke zwischen diesen Punkten ebenfalls in M liegen. Insbesondere müsste auch der Mittelpunkt dieser Strecke $(\frac{5}{4}, \frac{5}{4})$ in M liegen, was nicht der Fall ist, da $\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \neq 1$.

Die Menge M° ist leer, denn für keinen Punkt $m \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die ganze Kreisscheibe $U_\varepsilon(m) \subsetneqq M$ ist. Es sei nämlich x_m die Projektion von m auf die erste Komponente. Dann existiert in jeder solchen Umgebung unendlich viele Punkte der Form (x_m, y). Es ist aber M der Graph der Funktion $h\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$. Daher kann es zu einem x-Wert nur einen y-Wert geben, der in M liegt.

(b) Es seien $a_n = (n, \frac{1}{n}), b_n = (\frac{1}{n}, n)$ Folgen in M. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} (n + \mathrm{e}^{1/n} - 5) = \infty$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} + \mathrm{e}^{n} - 5) = \infty.$$

Daher besitzt f auf M kein Maximum.

Aus $xy = 1$ folgt $x = \frac{1}{y}$. Daher ist die Suche von Minima von f auf M äquivalent zur Suche von Minima der Funktion $k\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{1}{y} + \mathrm{e}^y - 5$. Es gilt

$$k'(x) = -\frac{1}{y^2} + \mathrm{e}^y$$
$$k''(x) = \frac{2}{y^3} + \mathrm{e}^y.$$

Es gilt sicherlich $k''(x) > 0$. Ferner ist $k'(0{,}1) < 0$ und $k'(1) > 0$. Da $k'(x)$ aber stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwersatz ein x_0, so dass $k'(x_0) = 0$. Da $k''(x_0) > 0$, besitzt k an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Dies ist das einzige Minimum (und somit ein globales Minimum), da k' streng monoton wachsend ist, weil $k''(x) > 0$ für alle x.

(c) Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^y \end{pmatrix}$$

und daher

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e} \end{pmatrix}.$$

Der Vektor v ist entweder $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^\mathsf{T}$ oder $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^\mathsf{T}$. Im Folgenden betrachten wir den ersten Fall. Es gilt $\partial_v f(1,1) = \nabla f(1,1) \bullet v$, daher gilt

$$\partial_v f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{e})$$

$$\partial_{-v} f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{e}-1).$$

Somit hat f auf M in $(1,1)$ kein Minimum.

Aufgabe H 35. *Taylorpolynom*

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zur Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y)^\intercal \mapsto x^2 \sin\left(\frac{xy}{2}\right)$$

um den Entwicklungspunkt $(1,\pi)^\intercal$.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zur Funktion

$$g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x,y)^\intercal \mapsto 2x^2 + xy - y^2 + x + y + 1$$

um den Punkt $(-1,1)^\intercal$. Begründen Sie, dass das zugehörige Restglied verschwindet. Schreiben Sie g in der Form

$$g(x,y) = a + b_0(x+1) + b_1(y-1) + \sum_{j=0}^{2} c_j (x+1)^j (y-1)^{2-j}, \qquad \text{mit } a, b_0, b_1, c_j \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Benutzen Sie 4.4.19 .

Lösungshinweise hierzu:

(a) Um das Taylorpolynom der Stufe 2 zur Funktion f zu bestimmen berechnen wir erstmal den Gradient von f

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x\,\sin\left(\frac{x\,y}{2}\right) + \frac{x^2\,y\,\cos\left(\frac{x\,y}{2}\right)}{2} \\ \frac{x^3\,\cos\left(\frac{x\,y}{2}\right)}{2} \end{pmatrix}$$

und werten ihn an der Stelle $(1,\pi)$ aus. Dies ergibt

$$\operatorname{grad} f(1,\pi) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen wir die Hesse-Matrix

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,\sin\left(\frac{x\,y}{2}\right) + 2\,x\,y\,\cos\left(\frac{x\,y}{2}\right) - \frac{x^2\,y^2\,\sin\left(\frac{x\,y}{2}\right)}{4} & \frac{3\,x^2\,\cos\left(\frac{x\,y}{2}\right)}{2} - \frac{x^3\,y\,\sin\left(\frac{x\,y}{2}\right)}{4} \\ \frac{3\,x^2\,\cos\left(\frac{x\,y}{2}\right)}{2} - \frac{x^3\,y\,\sin\left(\frac{x\,y}{2}\right)}{4} & -\frac{x^4\,\sin\left(\frac{x\,y}{2}\right)}{4} \end{pmatrix}$$

und werten sie an der Stelle $(1, \pi)$ aus. Dies ergibt

$$\mathrm{H}f(1,\pi) = \begin{pmatrix} 2\left(1-\frac{\pi^2}{8}\right) & -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Außerdem werten wir die Funktion f an der Stelle $(1, \pi)^{\mathsf{T}}$: $f(1,\pi) = 1$.
Das Taylorpolynom der Stufe 2 ergibt sich nach 4.4.14 als:

$$\begin{aligned} T_2\left(f, (x,y)^{\mathsf{T}}, (1,\pi)^{\mathsf{T}}\right) &= f(1,\pi) + (x-1,\ y-\pi)^{\mathsf{T}} \bullet \operatorname{grad} f(1,\pi) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x-1,\ y-\pi)\mathrm{H}f(1,\pi)(x-1,\ y-\pi)^{\mathsf{T}} \\ &= 1 + (x-1,\ y-\pi)^{\mathsf{T}} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}(x-1,\ y-\pi) \begin{pmatrix} 2\left(1-\frac{\pi^2}{8}\right) & -\frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} (x-1,\ y-\pi)^{\mathsf{T}} \\ &= 1 + 2(x-1) + \left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right)(x-1)^2 - \frac{\pi}{4}(x-1)(y-\pi) - \frac{1}{8}(y-\pi)^2 \end{aligned}$$

(b) Um das Taylorpolynom der Stufe 2 zur Funktion g um den Entwicklungspunkt $(-1,\ 1)$ zu bestimmen berechnen wir erstmal den Gradient von f

$$\operatorname{grad} g(x,y) = \begin{pmatrix} 4\,x + y + 1 \\ x - 2\,y + 1 \end{pmatrix}$$

und werten ihn an der Stelle $(-1,\ 1)$ aus. Dies ergibt

$$\operatorname{grad} g(-1,\ 1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen wir die Hesse-Matrix

$$\mathrm{H}g(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Das heißt also auch

$$\mathrm{H}g(-1,\ 1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Außerdem werten wir die Funktion g an der Stelle $(-1,\ 1)^{\mathsf{T}}$: $g(-1,\ 1) = 1$.

Das Taylorpolynom der Stufe 2 ergibt sich nach 4.4.14 als:

$$\begin{aligned}
T_2\left(g,(x,y),(-1,\ 1)\right) &= g(-1,\ 1)+(x+1,\ y-1)^{\intercal}\bullet\operatorname{grad} g(-1,\ 1)\\
&\quad+\frac{1}{2}(x+1,\ y-1)\mathrm{H}g(-1,\ 1)(x+1,\ y-1)^{\intercal}\\
&= 1+(x+1,\ y-1)^{\intercal}\bullet\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\\
&\quad+\frac{1}{2}(x+1,\ y-1)\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}(x+1,\ y-1)^{\intercal}\\
&= 1-2(x+1)-2(y-1)+2(x+1)^2-(y-1)^2+(x+1)(y-1)
\end{aligned}$$

Es gilt, dass $T_2\left(g,(x,y),(-1,\ 1)\right)=g(x,y)$. Das zugehörige Restglied verschwindet, weil $g(x,y)$ als Polynom vom zweiten Grad durch das Taylorpolynom der Stufe 2 exakt beschrieben wird. Alle patriellen Ableitungen dritter Ordnung sind gleich null und somit gibt es keine Terme dritter Ordnung.
Nach 4.4.19 ist die Taylorentwicklung eindeutig. Das bedeutet, dass die Umschreibung von $g(x,y)$ in der Form

$$g(x,y)=a+b_0(x+1)+b_1(y-1)+\sum_{j=0}^{2}c_j(x+1)^j(y-1)^{2-j},\qquad \text{mit } a,b_0,b_1,c_j\in\mathbb{R}$$

nichts anders als das Bestimmen des Taylorpolynoms zweiter Stufe bedeutet.
Es gilt also

$$\begin{aligned}
a &= 1\\
b_0 &= -2\\
b_1 &= -2\\
c_0 &= -1\\
c_1 &= 1\\
c_2 &= 2
\end{aligned}$$

Auf dem gleichen Ergebnis kommt man durch die Substitution von $u=x+1$ (also $x=u-1$) und $v=y-1$ (also $y=v+1$) in der Funktion $g(x,y)$ Es gilt dann

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= g(u-1,v+1)\\
&= 2(u-1)^2+(u-1)(v+1)-(v+1)^2+(u-1)+(v+1)+1\\
&= u+v+(u-1)\ (v+1)+2\,(u-1)^2-(v+1)^2+1\\
&= 2\,u^2+u\,v-2\,u-v^2-2\,v+1\\
&= 1-2(x+1)-2(y-1)-(y-1)^2+(x+1)(y-1)+2(x+1)^2
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 36. *Lokale Extrema*

Bestimmen Sie jeweils alle kritischen Stellen von f. Bestimmen Sie deren Typ: welche sind lokale Maximalstellen, welche sind lokale Minimalstellen, welche sind Sattelpunkte?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \exp(x^2 + y^2 + xy)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto yx^2(4 - x - y)$.

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + xyz$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) &= e^{x^2+x\,y+y^2}\begin{pmatrix} 2\,x + y \\ x + 2\,y \end{pmatrix}, \\ \mathrm{H}f(x,y) &= e^{x^2+x\,y+y^2}\begin{pmatrix} 4\,x^2+4\,x\,y+y^2+2 & 2\,x^2+5\,x\,y+2\,y^2+1 \\ 2\,x^2+5\,x\,y+2\,y^2+1 & x^2+4\,x\,y+4\,y^2+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nullsetzen des Gradienten ergibt die kritische Stelle $(0, 0)$. Einsetzen in die Hessematrix ergibt

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Da $\det \mathrm{H}f(0,0) = 3 > 0$ und da die Diagonaleinträge positiv sind, erhalten wir ein lokales Minimum bei $(0, 0)$.

(b) Es ist:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -x\,y\,(3\,x + 2\,y - 8) \\ -x^2\,(x + 2\,y - 4) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\,y\,(3\,x + y - 4) & -x\,(3\,x + 4\,y - 8) \\ -x\,(3\,x + 4\,y - 8) & -2\,x^2 \end{pmatrix}.$$

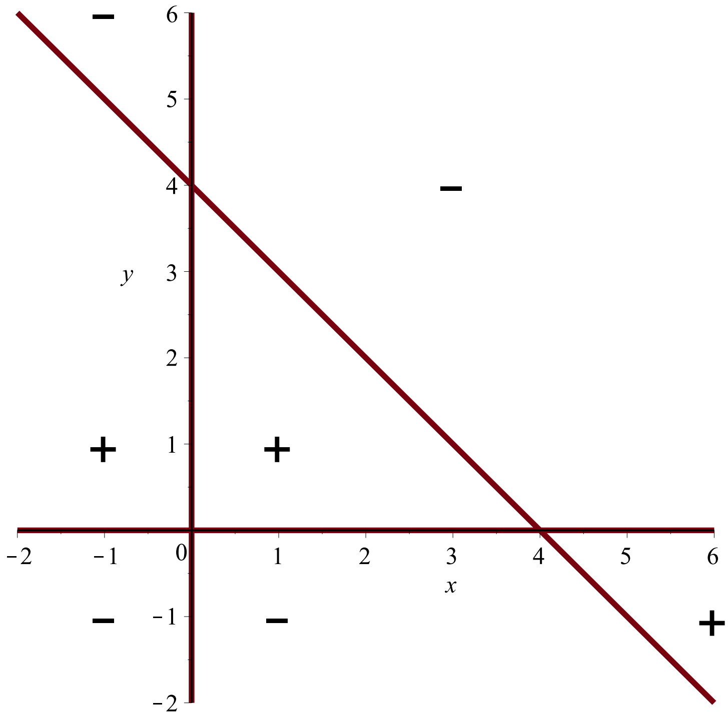
Nullsetzen des Gradienten ergibt die kritischen Stellen $(4, 0)$, $(2, 1)$ und $(0, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Einsetzen in die Hessematrix ergibt

$$\mathrm{H}f(0,t) = \begin{pmatrix} -2\,t\,(t-4) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Es ist $\det \mathrm{H}f(0,t) = 0$, also ist mit der Hessematrix keine Aussage über den Typ der kritischen Stelle möglich. Wir müssen uns anderweitig behelfen.

Die Nullstellenmenge von f mitsamt Vorzeichenverteilung hat folgende Gestalt.

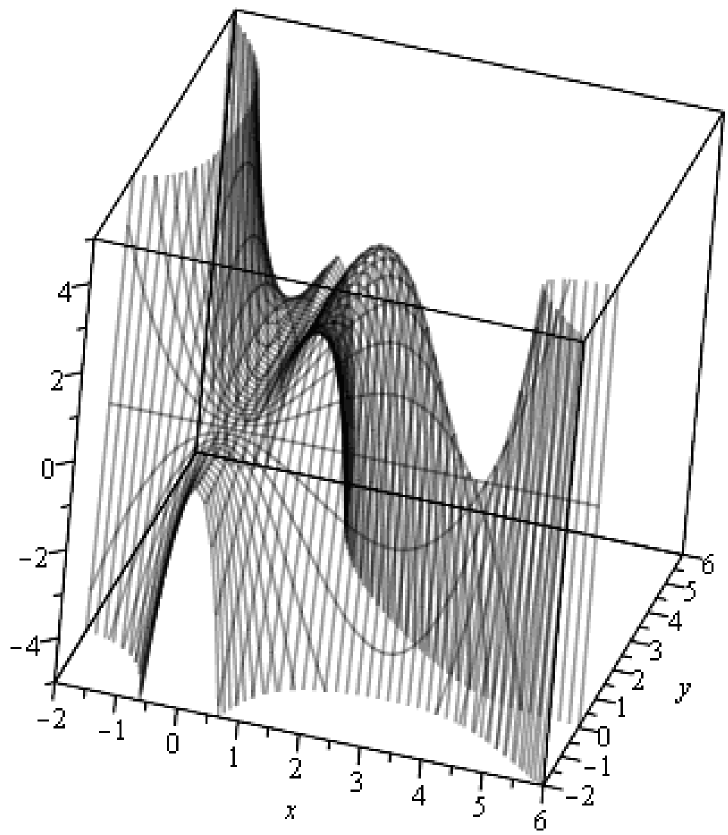


Also liegt bei $(0,t)$ ein lokales Minimum vor für $t \in (0,4)$, ein lokales Maximum vor für $t \in (-\infty,0) \cup (4,+\infty)$ und ein Sattelpunkt vor für $t \in \{0,4\}$.

Wir erkennen aus obiger Nullstellenmenge mitsamt Vorzeichen auch den Sattelpunkt bei $(4,0)$ und das lokale Maximum bei $(2,1)$. Letzteres, da das in der Skizze erkennbare Dreieck kompakt ist, die Funktion auf diesem Dreieck also wenigstens ein Maximum hat, welches nicht am Rand des Dreiecks liegen kann, da am Rand der Funktionswert nicht positiv ist; dieses Maximum im Innern des Dreiecks hat dann in der Liste der kritischen Punkte aufzutreten, wofür nur der kritische Punkt $(2,1)$ in Frage kommt.

(Bei den kritischen Stellen $(0,4)$ und $(2,1)$ hätte man auch die Hessematrix zur Typbestimmung verwenden können.)

Der zugehörige Graph hat übrigens folgende Gestalt.



(c) Es ist:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\,x + y\,z \\ 2\,y + x\,z \\ 2\,z + x\,y \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{H}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & z & y \\ z & 2 & x \\ y & x & 2 \end{pmatrix}.$$

Beim Nullsetzen des Gradienten machen wir eine Fallunterscheidung.

Ist $x = 0$, dann ist dank zweiter und dritter Gleichung $y = 0$ und $z = 0$. Das gibt diesenfalls die kritische Stelle $(0,0,0)$.

Ist $x \neq 0$, dann ist dank erster Gleichung $y \neq 0$ und $z \neq 0$. Diesenfalls multiplizieren wir die erste Gleichung mit x, die zweite mit y und die dritte mit z. Gleichsetzen liefert $2x^2 = 2y^2 = 2z^2 = -xyz$. Also ist $|x| = |y| = |z|$. Die erste Gleichung gibt nun $2|x| = |yz| = |x|^2$, also $|x| = 2$. Somit ist $|x| = |y| = |z| = 2$. Da ferner $-xyz > 0$, sind eine ungerade Anzahl der Variablen x, y, z negativ. Somit erhalten wir diesenfalls die kritischen Stellen $(-2,2,2)$, $(2,-2,2)$, $(2,2,-2)$ und $(-2,-2,-2)$.

Zusammen haben wir also die kritischen Stellen $(0,0,0)$, $(-2,2,2)$, $(2,-2,2)$, $(2,2,-2)$ und $(-2,-2,-2)$.
Einsetzen in die Hessematrix ergibt:

$$\mathrm{H}f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} : \quad \text{Eigenwert } 2\text{, also positiv definit: lokales Minimum.}$$

$$\mathrm{H}f(-2,2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} : \quad \text{Eigenwerte } -2,\ 4\text{, also indefinit: Sattelpunkt.}$$

$$\mathrm{H}f(2,-2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} : \quad \text{Eigenwerte } -2,\ 4\text{, also indefinit: Sattelpunkt.}$$

$$\mathrm{H}f(2,2,-2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} : \quad \text{Eigenwerte } -2,\ 4\text{, also indefinit: Sattelpunkt.}$$

$$\mathrm{H}f(-2,-2,-2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} : \quad \text{Eigenwerte } -2,\ 4\text{, also indefinit: Sattelpunkt.}$$

Aufgabe H 37. *Jacobi-Matrix*
Seien

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2x \end{pmatrix} \\ h &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x+3 \\ xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von f, von h und von $g := f \circ h$ bei $(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{J}g(x,y) - \mathrm{J}f(h(x,y)) \cdot \mathrm{J}h(x,y)$.

(c) Bestimmen Sie $u := f \circ f \circ f$. Berechnen Sie $\mathrm{J}u(1,1)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir erhalten:

$$\mathrm{J}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{J}h(x,y) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Die Verkettung von f und h lautet:

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} (5x+3)^2 + x^2y^2 \\ 10x+6 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\mathrm{J}(f \circ h)(x,y) = \begin{pmatrix} 50x + 30 + 2xy^2 & 2yx^2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Aus obigen Rechungen ergibt sich

$$\mathrm{J}f(h(x,y)) = \begin{pmatrix} 10x+6 & 2xy \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt für das Produkt

$$\mathrm{J}f(h(x,y)) \cdot \mathrm{J}h(x,y) = \begin{pmatrix} 50x + 30 + 2xy^2 & 2x^2y \\ 10 & 0 \end{pmatrix},$$

welches mit $\mathrm{J}g(x,y)$ übereinstimmt.
Diese Übereinstimmung kann man auch direkt mit 4.8.3. begründen. Es gilt also

$$\mathrm{J}g(x,y) - \mathrm{J}f(h(x,y)) \cdot \mathrm{J}h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt

$$f \circ f = \begin{pmatrix} (x^2+y^2)^2 + 4x^2 \\ 2x^2 + 2y^2 \end{pmatrix},$$

und daher

$$u = f \circ f \circ f = \begin{pmatrix} ((x^2+y^2)^2 + 4x^2)^2 + (2x^2+2y^2)^2 \\ 2((x^2+y^2)^2 + 4x^2) \end{pmatrix}.$$

Dieser Ausdruck ist offenbar kompliziert, daher wollen wir die Kettenregel verwenden um $\mathrm{J}u(1,1)$ berechnen. Es gilt

$$\mathrm{J}u(1,1) = \mathrm{J}(f \circ f \circ f)(1,1) = \mathrm{J}f((f \circ f)(1,1)) \cdot \mathrm{J}f(f(1,1)) \cdot \mathrm{J}f(1,1).$$

Man berechnet $f(1,1) = (2,2)^\intercal$ und $(f \circ f)(1,1) = (8,4)^\intercal$. Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{J}f(1,1) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathrm{J}f((f(1,1)) = \mathrm{J}f(2,2) &= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathrm{J}f((f \circ f)(1,1)) = \mathrm{J}f(8,4) &= \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\mathrm{J}u(1,1) = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 288 & 160 \\ 32 & 16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 38. *Multiplikatormethode nach Lagrange*

(a) Konstruieren Sie einen quaderförmigen Karton ohne oberen Deckel, der bei vorgegebenem Volumen eine minimale Oberfläche besitzt.

(b) Konstruieren Sie eine Flasche, die aus einem Zylinder mit einem aufgesetzten Kegel mit Öffnungswinkel $\frac{\pi}{2}$ besteht, so, dass diese Flasche bei vorgegebener Oberfläche maximales Volumen besitzt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bezeichnen Länge, Breite und Höhe des Kartons mit l, b und h aus $\mathbb{R}^+$. Das vorgegebene Volumen sei V_0. Dann gilt $V_0 = lbh$. Die Oberfläche ist $lb + 2bh + 2lh$. Wir wollen also die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (l,b,h) \mapsto lb + 2bh + 2lh$$

unter der Nebenbedingung $g(l,b,h) = 0$ mit

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (l,b,h) \mapsto lbh - V_0$$

minimieren. Die Lagrange-Gleichungen lauten

$$\operatorname{grad}(f) + \lambda \operatorname{grad}(g) = 0 \text{ und } g = 0\,,$$

das heißt

$$\begin{aligned} b + 2h + \lambda bh &= 0 \\ l + 2h + \lambda lh &= 0 \\ 2b + 2l + \lambda lb &= 0 \\ lbh = V_0 \end{aligned}$$

Subtraktion der ersten beiden Gleichungen führt auf

$$(b-l)(1+\lambda h)=0$$

Daraus folgt $b=l$ oder $\lambda=-\frac{1}{h}$. Einsetzen von $\lambda=-\frac{1}{h}$ in die erste Gleichung liefert $2h=0$. Das ist nicht zulässig, also bleibt nur die Möglichkeit $b=l$. Einsetzen von $b=l$ in die dritte Gleichung liefert $4b+\lambda b^2=0$. Da $b=0$ ausgeschlossen ist, erhalten wir $\lambda=\frac{-4}{b}$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $b-2h=0$. Aus der vierten Gleichung ergibt sich damit

$$4h^3=V_0\,,\ \text{also}\ h=\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}\ \text{und}\ l=b=\sqrt[3]{2V_0}$$

Das ist die einzige kritische Stelle von f unter der Nebenbedingung g. Das globale Minimum muss also hier liegen.

(b) Wir bezeichnen Höhe und Radius des Zylinders mit h und r aus $\mathbb{R}^+$. Die vorgegebene Oberfläche bezeichnen wir mit A_0. Dann gilt $A_0=\pi r^2+2\pi rh+\pi r\sqrt{2}r$ und $V=\pi r^2h+\frac{1}{3}\pi r^3$. Wir wollen also die Funktion

$$f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\colon(r,h)\mapsto\pi(r^2h+r^3)$$

unter der Nebenbedingung $g(r,h)=0$ mit

$$g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\colon(r,h)\mapsto\pi((1+\sqrt{2})r^2+2rh)-A_0$$

maximieren. Die Lagrange-Gleichungen lauten

$$\mathrm{grad}(f)+\lambda\,\mathrm{grad}(g)=0\ \text{und}\ g=0\,,$$

das heißt

$$\begin{aligned}\pi(2rh+3r^2)+\lambda 2\pi((1+\sqrt{2})r+h)&=0\\ \pi r^2+\lambda\pi 2r&=0\\ \pi((1+\sqrt{2})r^2+2rh)-A_0&=0\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $\lambda=-\frac{r}{2}$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$2rh+3r^2-r((1+\sqrt{2})r+h)=0\,.$$

Das führt auf $h=(2-\sqrt{2})r$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt

$$r=\sqrt{\frac{A_0}{(5-\sqrt{2})\pi}}$$

und damit

$$h=(2-\sqrt{2})\sqrt{\frac{A_0}{(5-\sqrt{2})\pi}}\,.$$

Das ist die einzige kritische Stelle von f unter der Nebenbedingung g. Das globale Maximum muss also hier liegen.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 39. *Vektorfelder*

(a) Berechnen Sie die Rotation und Divergenz der folgenden Vektorfelder. Welche dieser Felder besitzen ein Potential?

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$$

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix}2x\cos(y^2\mathrm{e}^x) - x^2y^2\mathrm{e}^x\sin(y^2\mathrm{e}^x)\\ -2x^2y\mathrm{e}^x\sin(y^2\mathrm{e}^x)\end{pmatrix}$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das Vektorfeld

$$h_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1+x^2z^4}\begin{pmatrix}2x+\alpha xz^4\\ \alpha y\\ 4x^2z^3\end{pmatrix}$$

ein Potential?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\operatorname{rot} f(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} - \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} = 0$$

und

$$\operatorname{div} f(x,y) = -\frac{2(x^2-y^2-1)}{(x^2+y^2+1)^2} - \frac{2(y^2-x^2-1)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2}$$

sowie

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} g(x,y) &= -4xy\mathrm{e}^x\sin\left(y^2\mathrm{e}^x\right) - 2x^2y\mathrm{e}^x\sin\left(y^2\mathrm{e}^x\right) - 2x^2y^3\mathrm{e}^{2x}\cos\left(y^2\mathrm{e}^x\right)\\ &\quad +4xy\mathrm{e}^x\sin\left(y^2\mathrm{e}^x\right) + 2x^2y\mathrm{e}^x\sin\left(y^2\mathrm{e}^x\right) + 2x^2y^3\mathrm{e}^{2x}\cos\left(y^2\mathrm{e}^x\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{div} g(x,y) &= 2\cos\left(y^2\mathrm{e}^x\right) - 4x\sin\left(y^2\mathrm{e}^x\right)y^2\mathrm{e}^x - x^2y^2\mathrm{e}^x\sin\left(y^2\mathrm{e}^x\right) - x^2y^4\mathrm{e}^{2x}\cos\left(y^2\mathrm{e}^x\right)\\ &\quad -2x^2\mathrm{e}^x\sin\left(y^2\mathrm{e}^x\right) - 4x^2y^2\mathrm{e}^{2x}\cos\left(y^2\mathrm{e}^x\right).\end{aligned}$$

Da in beiden Fällen der Definitionsbereich einfach zusammenhängend ist und die Rotation Null ergibt, besitzen beide Felder nach Satz 5.4.2 ein Potential.

(b) Wir verwenden das Kriterium von Satz 5.1.5: Es ist $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend. Es gilt:

$$\frac{-4x^2z^3 \cdot 2y}{(x^2+y^2+1+x^2z^4)^2} = \frac{\partial}{\partial y}(h_\alpha)_3 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial z}(h_\alpha)_2 = \frac{-\alpha y(4z^3x^2)}{(x^2+y^2+1+x^2z^4)^2}\,.$$

Da dies für alle (x, y, z) gelten muss, ergibt sich die notwendige Bedingung $\alpha = 2$. Wir überprüfen für $\alpha = 2$ die Gleichheit der anderen partiellen Ableitungen:

$$\frac{-2y(2x(1+z^4))}{(x^2+y^2+1+x^2z^4)^2} = \frac{\partial}{\partial x}(h_2)_2 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial y}(h_2)_1 = \frac{-(2x+2xz^4)\cdot(2y)}{(x^2+y^2+1+x^2z^4)^2}\,.$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{8xz^3(x^2+y^2+1+x^2z^4) - 4x^2z^3(2x(1+z^4))}{(x^2+y^2+1+x^2z^4)^2} = \frac{\partial}{\partial x}(h_2)_3 \\ \stackrel{!}{=} \quad & \frac{\partial}{\partial z}(h_2)_1 \\ = \quad & \frac{8xz^3(x^2+y^2+1+x^2z^4) - (2x+2xz^4)(4x^2z^3)}{(x^2+y^2+1+x^2z^4)^2}\,. \end{aligned}$$

Damit hat h_α für $\alpha = 2$ ein Potential.

Aufgabe H 40. *Potential*

Berechnen Sie ein Potential der folgenden Vektorfelder.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{xy} + z\mathrm{e}^{xz} \\ x\mathrm{e}^{xy} + z\mathrm{e}^{yz} \\ y\mathrm{e}^{yz} + x\mathrm{e}^{xz} \end{pmatrix}$

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} y\cos(xy)\cos(yz) \\ x\cos(xy)\cos(yz) - z\sin(xy)\sin(yz) + 2y \\ -y\sin(xy)\sin(yz) + 6z \end{pmatrix}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\int y\mathrm{e}^{xy} + z\mathrm{e}^{xz}\,\mathrm{d}\,x = [\mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{xz}]$$

und erhalten

$$U(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{xz} + C(y,z)\,.$$

Ableiten nach y ergibt die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x\mathrm{e}^{xy} + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = x\mathrm{e}^{xy} + z\mathrm{e}^{yz}\,.$$

Daraus erhalten wir

$$U(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{xz} + \mathrm{e}^{yz} + C(z).$$

Ableiten nach z ergibt die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x\mathrm{e}^{xz} + y\mathrm{e}^{yz} + \frac{\partial C(z)}{\partial z} = x\mathrm{e}^{xz} + y\mathrm{e}^{yz}\,.$$

Damit ist

$$U(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{xz} + \mathrm{e}^{yz}$$

ein Potential.

(b) Wir berechnen

$$\int y\cos(xy)\cos(yz)\,\mathrm{d}\,x = [\sin(xy)\cos(yz)]$$

und erhalten

$$V(x,y,z) = \sin(xy)\cos(yz) + D(y,z)\,.$$

Ableiten nach z ergibt die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -y\sin(xy)\sin(yz) + \frac{\partial C}{\partial z} = -y\sin(xy)\sin(yz) + 6z\,.$$

Daraus erhalten wir

$$V(x,y,z) = \sin(xy)\cos(yz) + 3z^2 + D(y)\,.$$

Ableiten nach y ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} &= x\cos(xy)\cos(yz) - z\sin(xy)\sin(yz) + \frac{\partial D}{\partial y}\\ &= x\cos(xy)\cos(yz) - z\sin(xy)\sin(yz) + 2y.\end{aligned}$$

Damit ist

$$V(x,y,z) = \sin(xy)\cos(yz) + 3z^2 + y^2$$

ein Potential.

Aufgabe H 41. *Tangentialräume*

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: \quad (x,y,z)^{\mathsf{T}} \mapsto x^3 + y^2 + z^2 - 3\,,\\ g &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: \quad (x,y,z)^{\mathsf{T}} \mapsto x^2 + y^3 + z^2 - 3\,,\end{aligned}$$

sowie die Mengen

$$N_f := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(x,y,z) = 0\right\}$$

und

$$N_g := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; g(x,y,z) = 0\right\}\,.$$

Berechnen Sie die Tangentialebenen von N_f und N_g im Punkt $(1,1,1)$. Berechnen Sie die Tangente von $N_f \cap N_g$ im Punkt $(1,1,1)$.

Lösungshinweise hierzu: Nach 4.9.4 hat die Tangentialebene von N_f im Punkt $(1,1,1)$ die Gleichung

$$\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}(x-1)\\(y-1)\\(z-1)\end{pmatrix} = 0\,,$$

welche sich auch schreiben lässt als Lösungen der Gleichung $3x+2y+2z=7$. Die Tangentialebene von N_g im Punkt $(1,1,1)$ hat die Gleichung

$$\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}(x-1)\\(y-1)\\(z-1)\end{pmatrix} = 0\,.$$

lässt sich also schreiben als Lösungen der Gleichung $2x+3y+2z=7$. Für den Schnitt der beiden Tangentialebenen, der Tangente von $N_f \cap N_g$ im Punkt $(1,1,1)$, ergibt sich also die Lösung des Gleichungssystems, das aus den beiden Gleichungen besteht. Auflösen ergibt $x=y$ und $z=\frac{7-5x}{2}$, also die Gleichung

$$G(t) = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{7}{2}\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

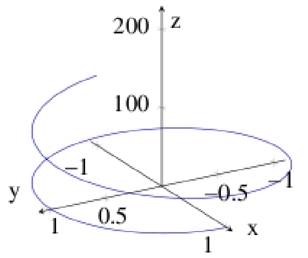
Aufgabe H 42. *Kurvenintegrale*

Die Kurve $C\colon [0,3\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \left(\cos(t), \sin(t), t^2\right)^{\mathsf{T}}$ beschreibt einen Spiraldraht. Skizzieren Sie diesen. Sei $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (u,v,w)^{\mathsf{T}} \mapsto \sqrt{w}$ die Temperaturverteilung.
Berechnen Sie die Durchschnittstemperatur

$$T_m := \frac{1}{L} \int_{C([0,3\pi])} T(s)\,\mathrm{d}\,s$$

im Draht. Dabei ist L die Länge des Drahts.

Lösungshinweise hierzu: Skizze des Drahts:



Wir berechnen zunächst die Länge.

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{3\pi} |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{3\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (2t)^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{3\pi} \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{u=0}^{u=6\pi} \frac{1}{2}\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u \quad \text{Subst: } 2t = u \\
&= \left[\frac{1}{4}\operatorname{arcsinh} u + \frac{1}{4}u\sqrt{1+u^2}\right]_0^{6\pi} \quad \text{vgl. H 24} \\
&= \frac{3}{2}\pi\sqrt{1+36\pi^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arcsinh}(6\pi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{C([0,3\pi])} T(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^{3\pi} T(C(t))\,|C'(t)|\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{3\pi} |t|\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[\frac{1}{12}\left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{3\pi} \\
&= \frac{1}{12}\left(\sqrt{1+36\pi^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$T_m = \frac{\frac{1}{12}\left(\sqrt{1+36\pi^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}}{\frac{3}{2}\pi\sqrt{1+36\pi^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arcsinh}(6\pi)}$$

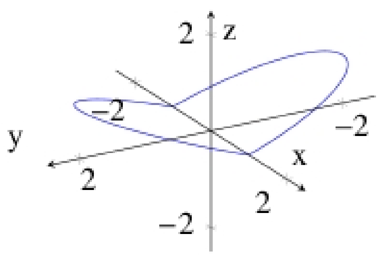
Aufgabe H 43. *Kurvenintegrale reellwertiger Funktionen*

(a) Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \sqrt{1-x^2}$ und die Ellipse E mit der Gleichung $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Skizzieren Sie den Graphen der Einschränkung von f auf E. Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs E. Begründen Sie anhand der Skizze, dass dieses Kurvenintegral positiv ist.

(b) Durch $C\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \left((\cos(t))^3, (\sin(t))^3\right)^\intercal$ sei ein Draht D parametrisiert. Er besitze die Massendichte $\varrho(C(t)) = \sin(t)\cos(t)$. Berechnen Sie die Gesamtmasse des Drahtes, die durch $\int_D \varrho(s)\,\mathrm{d}\,s$ beschrieben wird. Berechnen Sie die Länge von D. Skizzieren Sie D.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir skizzieren zunächst die Einschränkung von f auf E:



Die Ellipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ werde durch $C(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$ mit $0 \leqq t \leqq 2\pi$ parametrisiert. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_C f(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^{2\pi} f(C(t))\cdot|C'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} |\sin(t)|\sqrt{(\sin(t))^2+4\,(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{\pi} \sin(t)\sqrt{1+3\,(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}\,t + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(t)\sqrt{1+3\,(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&= -\int_1^{-1} \sqrt{1+3u^2}\,\mathrm{d}\,u \\
&+ \int_{-1}^{1} \sqrt{1+3u^2}\,\mathrm{d}\,u \quad \text{Subst.: } \cos(t)=u \\
&= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1+3u^2}\,\mathrm{d}\,u \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+s^2}\,\mathrm{d}\,s \quad \text{Subst.:} s=\sqrt{3}u \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(s)+\frac{1}{2}s\sqrt{1+s^2}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \quad \text{(siehe H24)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\operatorname{arcsinh}(\sqrt{3})+4\right)
\end{aligned}$$

(b) Es gilt $C'(t) = 3\sin(t)\cos(t)\begin{pmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_C \varrho(x)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^{\pi/2} \varrho(C(t))\cdot|C'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{\pi/2} 3\sin(t)\cos(t)\cdot|\sin(t)\cos(t)|\,\mathrm{d}\,t \\
&= 3\int_0^{\pi/2} (\sin(t)\cos(t))^2\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} (\sin(2t))^2\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} (\sin(2t))^2 \,\mathrm{d}\, t &= \left[\frac{1}{2}(-\cos(2t))\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos(2t))\cos(2t)\,\mathrm{d}\, t \\
&= \left[\frac{1}{2}(-\cos(2t))\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 1-(\sin(2t))^2\,\mathrm{d}\, t \\
2\int_0^{\pi/2} (\sin(2t))^2 \,\mathrm{d}\, t &= \left[\frac{1}{2}(-\cos(2t))\sin(2t)+t\right]_0^{\pi/2} \\
\int_0^{\pi/2} (\sin(2t))^2 \,\mathrm{d}\, t &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(-\cos(2t))\sin(2t)+t\right]_0^{\pi/2}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_C \varrho(x)\,\mathrm{d}\, s &= \frac{3}{8}\left[\frac{1}{2}(-\cos(2t))\sin(2t)+t\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}$$

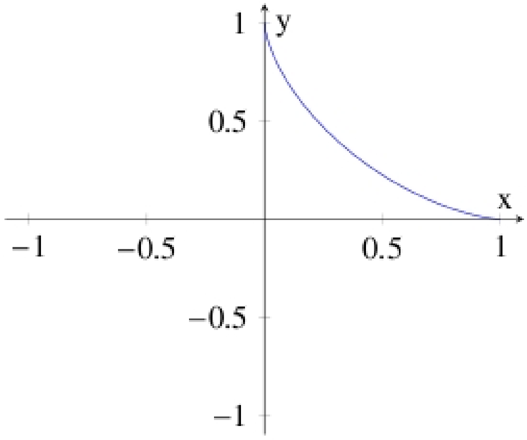
Ein Draht besitzt einen konstanten Radius r und die Querschnittsfläche A. Masse des Drahtes ist somit

$$M = A\int_C \varrho(x)\,\mathrm{d}\, x = \pi r^2 \frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi^2 r^2}{16}$$

und demnach proportional zum berechneten Kurvenintegral.
Für die Länge von D ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_C 1\,\mathrm{d}\, s &= \textstyle\int_0^{\pi/2} |3\sin(t)\cos(t)|\,\mathrm{d}\, t &&= \int_0^{\pi/2} 3\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}\, t \\
&= \textstyle\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,\mathrm{d}\, t &&= \frac{3}{4}\left[-\cos(2t)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \textstyle\frac{3}{4}(1+1) &&= \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}$$

Skizze:



Aufgabe H 44. *Kurvenintegrale*
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Umlaufintegrale

$$\oint_K g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad \text{und} \quad \oint_K g_2(x) \bullet \mathrm{d}\,x\,,$$

wobei K das Rechteck mit den Ecken $(0,0,0)$, $(4,0,0)$, $(4,3,0)$ und $(0,3,0)$ ist.
Welches der beiden Integrale lässt sich ohne Parametrisierung berechnen?

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen die Rotation des Vektorfelds g_α.

$$\operatorname{rot}(g_\alpha)(x_1, x_2, x_3) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Für $\alpha = 1$ ist die Rotation 0. Da der Definitionsbereich einfach zusamenhängend ist und es sich bei K um eine geschlossene Kurve handelt, gilt $\oint_K g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x = 0$. Wir parametrisieren die vier Seiten des Rechtecks K durch

$$
\begin{aligned}
C_1 \quad &: \; [0,1] \to \mathbb{R} \quad : t \mapsto t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
C_2 \quad &: \; [0,1] \to \mathbb{R} \quad : t \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
C_3 \quad &: \; [0,1] \to \mathbb{R} \quad : t \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
C_4 \quad &: \; [0,1] \to \mathbb{R} \quad : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und berechnen

$$
\begin{aligned}
\oint_K g_2(x) \bullet \mathrm{d}\,x \quad &= \int_0^1 g_2(C_1(t)) \bullet C_1'(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 g_2(C_2(t)) \bullet C_2'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&\quad + \int_0^1 g_2(C_3(t)) \bullet C_3'(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^1 g_2(C_4(t)) \bullet C_4'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t + \int_0^1 \begin{pmatrix} 6t \\ 4+6t \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&\quad + \int_0^1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4-4t+6 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t + \int_0^1 \begin{pmatrix} 6-6t \\ 6-6t \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 0 + (12+18t) + (-24) + (-18+18t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[18t^2 - 30t\right]_0^1 \\
&= -12.
\end{aligned}
$$