Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 59. *Grenzwerte*

In Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{\alpha^n + (-3)^n}{4^n}$ gegeben. Für welche α konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$? Was ist in diesem Fall der Wert der Reihe?

Lösungshinweise hierzu:

Spaltet man a_n in die Summe aus $b_n = \left(\frac{\alpha}{4}\right)^n$ und $c_n = \left(\frac{-3}{4}\right)^n$, ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ als geometrische Reihe mit $q_c = -3/4$ absolut konvergent. Nach 1.9.3 konvergiert also $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. Allerdings kann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergieren, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nicht konvergiert, denn aus der Konvergenz der Reihe für a_n und der Reihe für c_n würde (wieder nach 1.9.3) die Konvergenz der Reihe für $b_n = a_n + (-c_n)$ folgen.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert also genau dann, wenn auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert und diese geometrische Reihe konvergiert genau dann, wenn $|q_b| = |\alpha|/4 < 1$ ist. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist also konvergent für $\alpha \in (-4, 4)$ und sonst divergent.
Der Wert der Reihe ist dann die Summe der Werte der geometrischen Reihen, also

$$\frac{1}{1-\alpha/4} - 1 + \frac{1}{1+3/4} - 1 = \frac{4}{4-\alpha} - \frac{10}{7} = \frac{10\alpha - 12}{28 - 7\alpha}\,.$$

Aufgabe H 60. *Stetigkeit*

Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_j\colon D_j \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2\}$.

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x - |x|}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 - 15x + 10}{x^3 - 7x + 6}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D_j \subsetneqq \mathbb{R}$, für den die Abbildungsvorschrift sinnvoll ist. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_1 und f_2.

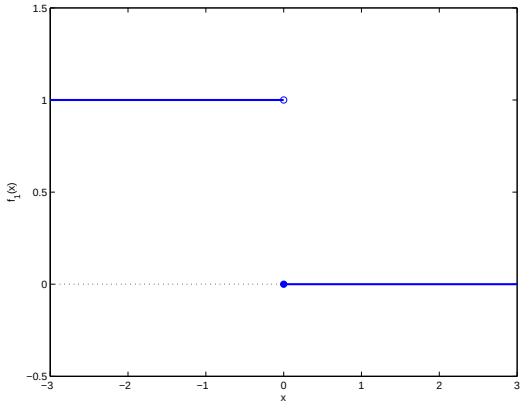
(b) Finden Sie zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_2(U_\delta(2) \cap D_2) \subsetneqq U_\varepsilon(f_2(2))$.

(c) Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $f_1(U_\delta(0) \cap D_1) \subsetneqq U_\varepsilon(f_1(0))$ gilt?

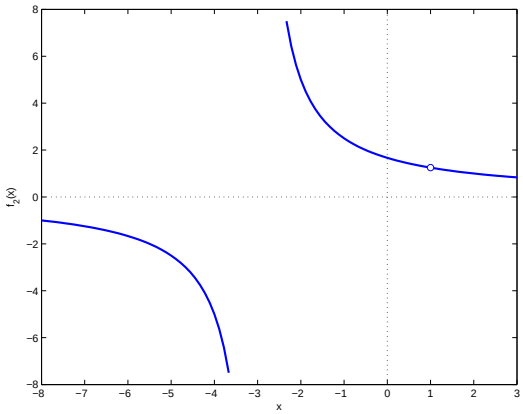
(d) Ist die Funktion f_1 stetig an der Stelle $x_0 = 0$? Ist f_2 stetig an der Stelle $x_0 = 2$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) • Das Schaubild von f_1



- Das Schaubild von f_2



Die Funktion f_1 kann auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden, d.h. $D_1 = \mathbb{R}$. Für f_2 formt man Zähler und Nenner um:

$$5x^2 - 15x + 10 = 5(x-1)(x-2), \qquad x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3),$$

und da eine gesonderte Vorschrift für $x = 2$ existiert, ist der maximale Definitionsbereich $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. (Die Funktion ist an $x = 1$ zwar stetig fortsetzbar, aber dennoch nicht definiert.)

(b) $f_2(U_\delta(2) \cap D_2) \subseteqq U_\varepsilon(f_2(2))$ gilt, wenn für alle x-Werte, die weniger als δ von 2 entfernt liegen der Abstand des Bildes $f_2(x)$ von $f_2(2)$ kleiner ε ist.

Das δ muss also so klein gewählt werden, dass für jedes $x \in U_\delta(2) \cap D_2$ der Abstand $|f_2(x) - f_2(2)| < \varepsilon$ wird.

Es ist für $\delta < 5$ und $x \in U_\delta(2)$

$$|f_2(x) - f_2(2)| = \left|\frac{5}{x+3} - 1\right| = \left|\frac{2-x}{(x-2)+5}\right| < \frac{\delta}{5-\delta},$$

da $x - 2 \in (-\delta, \delta)$ auf $(x-2) + 5 \in (5-\delta, 5+\delta)$ führt.

Das δ muss also so gewählt werden, dass $\frac{\delta}{5-\delta} \leqq \varepsilon$, d.h. $\delta \leqq 5\varepsilon/(1+\varepsilon) < 5$.

(c) Weil für alle $x < 0$

$$|f_1(x) - f_1(0)| = |f_1(x)| = 1$$

gilt, existiert zu $\varepsilon \in (0, 1]$ kein $\delta > 0$ mit $f_1(U_\delta(0) \cap D_1) \subseteqq U_\varepsilon(f_1(0))$, da stets $f_1(-\delta/2) = 1 \notin U_\varepsilon(f_1(0))$.

(d) Die ε-δ-Definition der Stetigkeit liefert mit den vorigen beiden Aufgabenteilen:

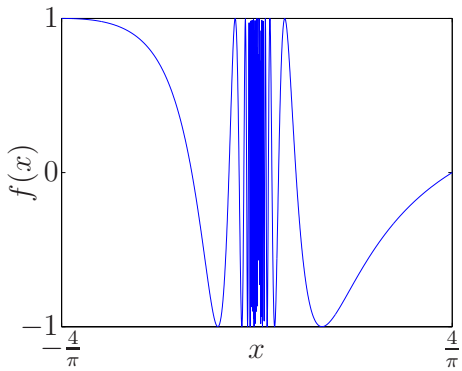
Die Funktion f_1 ist nicht stetig an $x = 0$ und f_2 ist stetig an $x = 2$.

Aufgabe H 61. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei sie Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Ihr Computerplot ist rechts dargestellt.



(a) Berechnen Sie für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{4}{\pi(1+4n)}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

(b) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -1$.

(c) Finden Sie eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ so, dass $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(d) Ist f stetig im Punkt $x_0 = 0$? Entscheiden Sie dies unter Verwendung von 1.10.3.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{\pi(1+4n)} = \frac{4}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+4n} = 0\,,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(a_n) &= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi(1+4n)}{4}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{2\pi + 4\pi n}{4}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{4}{\pi(3+8n)}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{\pi(3+8n)} = \frac{4}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+8n} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(b_n) &= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi(3+8n)}{4}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{4\pi + 8\pi n}{4}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\pi + 2\pi n\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

(c) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{für gerades n} \\ b_n & \text{für ungerades n} \end{cases}$$

hat den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, da sowohl die Teilfolge, die aus den Folgengliedern mit geradem Index besteht, als auch die Teilfolge, die aus den Folgengliedern mit ungeradem Index besteht, gegen den Grenzwert 0 konvergiert. Es gilt

$$f(c_n) = \begin{cases} 0 & \text{für gerades n} \\ -1 & \text{für ungerades n} \end{cases}.$$

Die Folge $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ hat also zwei verschiedene Häufungspunkte und konvergiert nicht.

(d) Die Funktion f ist unstetig im Punkt $x = 0$, da die gegen 0 konvergierende Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(0) = 0$ nicht erfüllt, vergleiche Definition 1.10.3 .

Aufgabe H 62. *Stetigkeit und Folgen*

Sei $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ stetig mit $2x \leqq f(x) \leqq 3x$. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}_0^+$ gelte $a_n > f(a_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

Geben Sie ein Beispiel einer solchen Funktion f und einer solchen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

Lösungshinweise hierzu:

Aus $a_n > f(a_{n+1})$ und $2x \leqq f(x)$ folgt $a_n > f(a_{n+1}) \geqq 2a_{n+1}$ und damit $a_{n+1} \leqq a_n/2 \leqq a_{n-1}/4 \leqq \ldots \leqq a_1/2^n$.

Damit ist

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty} a_n \leqq a_1 \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0\,.$$

Da f stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(0)$$

und aus $2\cdot 0 \leqq f(0) \leqq 3\cdot 0$ folgt $f(0) = 0$.

Alternativ kann der Grenzwert auch mit dem Sandwichsatz gefolgert werden da $2a_n \leqq f(a_n) \leqq 3a_n$ ist

$$0 = 2\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqq 3\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Die Folge $a_n = 3^{-n}$ und die Funktion $f(x) = 2x$ erfüllen die Bedingungen, denn es ist

$$2x \leqq f(x) = 2x \leqq 3x \quad \text{und} \quad a_n = \frac{1}{3^n} > 2\,\frac{1}{3\cdot 3^n} = f(a_{n+1})\,.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 63. *Funktionsgrenzwerte*

Bestimmen Sie folgende Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4-8x^2+5}{5x^4-8x^3+3}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0-0} \sin(x^2)/x^3$ **(c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\cos(x))^2-3\sin(x)\cos(3x)}{\dfrac{x^2-2x}{3x^3+4}+\dfrac{3x^3+4}{1x^2-2x}}$

(d) Bestimmen Sie, für welche $a\in\mathbb{R}^+, b\in\mathbb{R}$ der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x-3}-\sqrt{ax+b}$$

in $\mathbb{R}$ existiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit der Notation aus Satz 1.8.11 ist hier $n=k$ und der Grenzwert als a_n/b_n gegeben, also $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^4-8x^2+5}{5x^4-8x^3+3} = \dfrac{3}{5}$.

(b) Da $\sin(x)/x$ für alle $x\in\mathbb{R}$ beschränkt ist, folgt dies auch für $\sin(x^2)/x^2$ und somit

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin(x^2)}{x^3} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x}\frac{\sin(x^2)}{x^2} = -\infty\,.$$

(c) Der Zähler lässt sich abschätzen

$$|(\cos(x))^2-3\sin(x)\cos(3x)| \leqq |\cos(x)|^2+3|\sin(x)||\cos(3x)| \leqq 1^2+3=4\,,$$

und eine Erweiterung der Summanden im Nenner liefert

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{(\cos(x))^2-3\sin(x)\cos(3x)}{\dfrac{x^2-2x}{3x^3+4}+\dfrac{3x^3+4}{x^2-2x}}\right| \leqq \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\left|\dfrac{x^{-1}-2x^{-2}}{3+4x^{-3}}+\dfrac{3x+4x^{-2}}{1-2x^{-1}}\right|} = 0$$

(d) Eine Erweiterung führt auf

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x-3}-\sqrt{ax+b} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{ax+b}\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{ax+b}\right)}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{ax+b}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3-ax-b}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{ax+b}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2-a}{\sqrt{2-\frac{3}{x}}+\sqrt{a+\frac{b}{x}}}\sqrt{x}+\frac{-3-b}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{ax+b}}\,.
\end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert nur, falls $a=2$, der zweite konvergiert immer: $b\in\mathbb{R}$.

Aufgabe H 64. *Gleichheitsproblem*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon (-\pi,\pi)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \left(x^2-9\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und} \quad g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto 3x\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ mindestens drei Lösungen im Intervall $(-\pi, \pi)$ hat.

(b) Nimmt f auf $[1, 2]$ ein Maximum an? Nimmt f auf $(-\pi, +\pi)$ ein Maximum an?

Hinweis: Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pi - 0$ und $x \to -\pi + 0$ und werten Sie f an $x = \pm 3$ aus.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion

$$h\colon x \mapsto f(x) - g(x) = (x^2 - 9)\,\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 3x$$

ist für $x \to -\pi + 0$ bestimmt divergent nach $-\infty$ und für $x \to +\pi - 0$ bestimmt divergent nach $+\infty$. An $x = \pm 3$ ist $f(x) = 0$ und somit ist $h(-3) = 9$ und $h(3) = -9$. Da h als Summe aus einer steigen Funktion und einem Produkt stetiger Funktionen selbst auch stetig ist, muss nach dem Nullstellensatz in den Intervallen $(-\pi, -3)$, $(-3, 3)$ und $(3, \pi)$ je eine Nullstelle liegen.

(b) Eine stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge ein Maximum und ein Minimum an. Somit nimmt f auf dem kompakten Intervall $[1, 2]$ ein Maximum an.

Das Intervall $(-\pi, +\pi)$ ist offen also nicht kompakt und da f für $x \to +\pi - 0$ bestimmt divergent nach $+\infty$ ist, nimmt sie auch kein Maximum an.

Aufgabe H 65. *Zwischenwertsatz bei einem Solarmodul*

Der Ertrag eines Solarmoduls an einem Sommertag liegt bei 600 Wh. Das Modul liefert also eine durchschnittliche Leistung von 25 W. Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass es einen Zeitraum von einer Stunde am Tag gibt, in dem das Modul genau 25 Wh produziert.
Hinweis: Sei $f(t)$ die zum Zeitpunkt t erbrachte Energie. Betrachten Sie $f(t+1) - f(t)$ für $t \in [0, 23]$.

Lösungshinweise hierzu: Sei $f(t)$ die zum Zeitpunkt $t \in [0, 24]$ erbrachte Energie und sei

$$g(t) := f(t+1) - f(t) \quad (t \in [0, 23])$$

die zwischen dem Zeitpunkt t und dem Zeitpunkt $t+1$ erbrachte Energie. Wir müssen zeigen, dass ein Zeitpunkt $t_0 \in [0, 23]$ existiert, sodass $g(t_0) = 25$ ist, und das machen wir mithilfe des Zwischenwertsatzes. Zunächst mal ist die Abbildung f stetig, weil sie monoton wachsend ist und keine Sprungstellen hat. Also ist auch g stetig und um den Zwischenwertsatz auf g anwenden zu können, müssen wir daher nur noch zeigen, dass $t_1, t_2 \in [0, 23]$ so existieren, dass

$$g(t_1) \leqq 25 \quad \text{und} \quad g(t_2) \geqq 25.$$

Dies zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis.
Angenommen es existiere kein t_1 mit $g(t_1) \leqq 25$. Dann gälte

$$g(t) > 25 \quad \text{für alle } t \in [0, 23]$$

Insbesondere gälte diese Ungleichung also für alle $t \in \{0, 1, \ldots, 23\}$ und damit (teleskopierende Summen!)

$$f(24) - f(0) = \sum_{k=0}^{23} f(k+1) - f(k) = \sum_{k=0}^{23} g(k) > \sum_{k=0}^{23} 25 = 600$$

Aber dies kann nicht sein, weil nach Voraussetzung die insgesamt erzeugte Energie $f(24) - f(0)$ eben *gleich* (und nicht größer) 600 ist.
Entsprechend folgt aus der Annahme es existiere kein t_2 mit $g(t_2) \geqq 25$.

$$g(t) < 25 \quad \text{für alle } t \in [0, 23]$$

und damit

$$f(24) - f(0) = \sum_{k=0}^{23} f(k+1) - f(k) = \sum_{k=0}^{23} g(k) < \sum_{k=0}^{23} 25 = 600\,.$$

Somit haben wir den Widerspruch.
Es gibt also t_1, t_2 mit $g(t_1) \leqq 25$ und $g(t_2) \geqq 25$ und nach dem Zwischenwertsatz auch ein $t_0 \in [t_1, t_2]$ mit $g(t_0) = 25$.

Aufgabe H 66. *Umkehrfunktionen*

Gegeben sind die Mengen $M = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ und $N = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Funktionen

$$f\colon M \to N\colon x \mapsto \frac{2x}{x^2-4}, \qquad g\colon N \to M\colon x \mapsto \frac{1+\sqrt{1+4x^2}}{x}.$$

(a) Berechnen Sie $f(g(x))$. Ist g die Umkehrfunktion von f?

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$f(g(x)) = \frac{2\frac{1+\sqrt{1+4x^2}}{x}}{(\frac{1+\sqrt{1+4x^2}}{x})^2 - 4} = \frac{x^2(2+2\sqrt{1+4x^2})}{x((1+2\sqrt{1+4x^2}+1+4x^2)-4x^2)} = x.$$

g ist nicht die Umkehrfunktion von f. Es reicht nicht zu zeigen, dass $f(g(x)) = x$ für alle $x \in N$ gilt. Wie in Definition 1.13.7 festgelegt, muss man ebenfalls überprüfen, dass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$ ist. Es gilt beispielsweise an der Stelle $x = 1 \;:\; g(f(1)) = g(-2/3) = -4 \neq 1$.

(b) Geben Sie Teilmengen $\tilde{N} \subseteqq N$ und $\tilde{M} \subseteqq M$ so an, dass die jeweiligen Einschränkungen von f und g Umkehrfunktionen voneinander sind.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$g(f(x)) = \frac{1+\sqrt{1+4\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)^2}}{\frac{2x}{x^2-4}} = \frac{\left(1+\sqrt{1+4\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)^2}\right)(x^2-4)}{2x}$$

und für $|x| > 2$ dann

$$\ldots = \frac{(x^2-4)+\sqrt{(x^2-4)^2+16x^2}}{2x} = \frac{x^2-4+\sqrt{(x^2+4)^2}}{2x} = x$$

sowie für $|x| < 2$

$$\ldots = \frac{(x^2-4)-\sqrt{(x^2-4)^2+16x^2}}{2x} = \frac{x^2-4-\sqrt{(x^2+4)^2}}{2x} = \frac{-4}{x}$$

Man muss also f auf $\tilde{M} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x| > 2\right\} \subseteqq M$ einschränken. Da f an -2 und 2 Pole mit Vorzeichenwechsel hat und die Grenzwerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ Null sind, ist der Wertebereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und daher ist $\tilde{N} = N$.

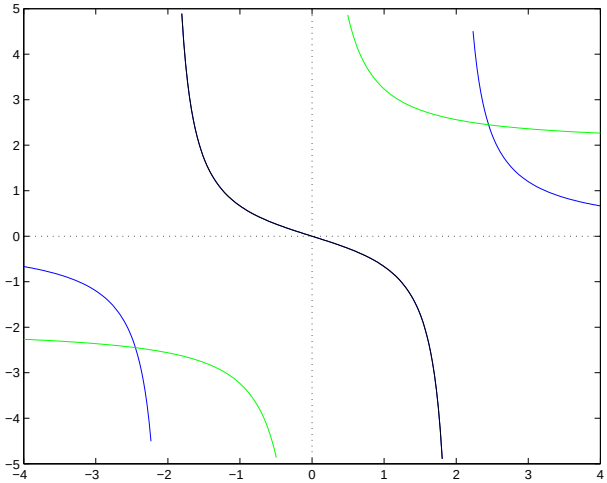
(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{1+4x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+4} = 2$$

(d) Skizzieren Sie die Graphen von f und g und markieren Sie die Graphen der Einschränkungen aus **(b)**.

Lösungshinweise hierzu: Der Graph von f besteht aus der schwarzen und den blauen Kurven, der Graph von g wird durch die grüne Kurve dargestellt. Die Einschränkung von f besteht nur aus den blauen Kurven.



Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 67. *Konvergenzradien von Potenzreihen*

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für

$$\textbf{(i)} \quad a_n = (n/(n+1))^{n^2} \qquad \textbf{(ii)} \quad a_n = (2n-1)^{-n-1}$$

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen und skizzieren Sie die Konvergenzkreise. Untersuchen Sie, für welche Werte von $z \in \mathbb{R}$ die Reihen konvergieren bzw. divergieren.

$$\textbf{(i)} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(3z+6)^n}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \textbf{(ii)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5z-\mathrm{i})^n}{n^2-n}$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n/(n+1))^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)-1} = e^{-1}$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\rho = e$.

(ii) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2n-1)^{-n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n-1}\right)^{1+1/n} = 0$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\rho = \infty$.

(b) **(i)** Umformung ergibt

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(3z+6)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n^2+1}} (z+2)^n$$

also $z_0 = -2$. Wegen $1 \leqq n^2+1 \leqq 2n^2$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n^2+1)^{1/2n}} = 3$$

und es ergibt sich der Konvergenzradius $\rho = 1/3$.
Die Potenzreihe divergiert damit auf $\mathbb{R}\backslash[-7/3, -5/3]$ und konvergiert auf $(-7/3, -5/3)$.
Die Randpunkte des Konvergenzkreises müssen separat betrachtet werden. In $z = -7/3$ erhalten wir die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}},$$

die nach dem Leibnizkriterium konvergiert (denn $(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}})$ konvergiert ja monoton fallend gegen 0). In $z = -5/3$ findet man die harmonische Reihe als untere Abschätzung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n^2+1}} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty$$

Also hat man Konvergenz in $z = -7/3$ und Divergenz in $z = -5/3$.

(ii) Umformung ergibt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5z-\mathrm{i})^n}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{n^2-n}(z-\mathrm{i}/5)^n$$

also $z_0 = \mathrm{i}/5$. Wegen $1 \leqq n-1 \leqq n$ für $n > 1$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5^n}{n^2-n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{(n^2-n)^{1/n}} = 5$$

und es ergibt sich der Konvergenzradius $\rho = 1/5$.
Es liegen keine reellen Punkte im Konvergenzkreis und auf dem Rand nur $z = 0$. Hier gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-\mathrm{i})^n}{n^2-n}\right| \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

und es liegt absolute Konvergenz, also auch Konvergenz vor.
Die Reihe konvergiert also für $z = 0$ und divergiert für $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe H 68. *Produkt von Potenzreihen*
Seien die Abbildungen $f : U_{\rho_f}(0) \to \mathbb{C}$ und $g : U_{\rho_g}(0) \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^n \quad \text{und} \quad g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Bestimmen Sie die Konvergenzradien ρ_f von f und ρ_g von g. Schreiben Sie $f \cdot g$ als Potenzreihe und geben Sie deren Konvergenzradius an. Was hat diese Potenzreihe zu tun mit der Funktion

$$h\colon \mathbb{C} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \frac{2}{2-3z+z^2}?$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n}} = 1/2$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ gilt

$$\rho_f = 2 \quad \text{und} \quad \rho_g = 1.$$

Außerdem ist die Potenzreihe von $f \cdot g$ nach Satz 1.14.11 gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\ z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \cdot 1\ z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2-2^{-n}) z^n,$$

wobei wir im zweiten Schritt die geometrische Summenformel benutzt haben, nach der

$$\sum_{k=0}^{n} (1/2)^k = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2(1-(1/2)^{n+1}) = 2-(1/2)^n$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wegen

$$\sqrt[n]{2-2^{-n}} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty)$$

ergibt sich der Konvergenzradius $\rho_{f\cdot g}$ der Potenzreihe von $f \cdot g$ zu

$$\rho_{f\cdot g} = 1.$$

Was hat nun die Potenzreihe von $f \cdot g$, deren Koeffizienten wir oben bestimmt haben, mit der angegebenen Funktion h zu tun? Weil die Potenzreihe von $f \cdot g$ die Summe zweier (im wesentlichen) geometrischer Reihen ist, können wir deren Werte mithilfe der geometrischen Summenformel explizit ausrechnen, und zwar gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\ z^n &= 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}(z/2)^n \\ &= \frac{2}{1-z} - \frac{1}{1-z/2} = \frac{4-2z-2+2z}{(1-z)(2-z)} = h(z)\end{aligned}$$

für alle $z \in U_1(0) = U_{\rho_{f\cdot g}}(0)$. Also ist die Potenzreihe von $f \cdot g$ auf ihrem Konvergenzkreis $U_{\rho_{f\cdot g}}(0)$ nichts anderes als $h|_{U_{\rho_{f\cdot g}}(0)}$.
Dies ergibt sich auch, wenn man die Terme für die Reihen von f und g multipliziert:

$$\frac{1}{1-z/2}\,\frac{1}{1-z/2} = \frac{2}{(z-1)(z-2)} = \frac{2}{z^2-3z+2}$$

Aufgabe H 69. *Potenzreihen?*

Gegeben sind die Reihen $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}}\,(z^2-4z+4)^k$ und $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}}\,(z^2-4z-4)^k$.

(a) Bestimmen Sie die Reihenwerte $f(0), f(4), g(0), g(4)$.

(b) Formen Sie $f(z)$ in eine Potenzreihe um. Begründen Sie mit Hilfe des ersten Aufgabenteils, warum $f(3)$ konvergiert, ohne die Reihe selbst zu untersuchen.

(c) Überprüfen Sie, dass $g(2)$ nicht konvergiert. Begründen Sie damit und mit dem ersten Aufgabenteil, dass sich $g(z)$ nicht in eine Potenzreihe umformen lässt, die dasselbe Konvergenzgebiet wie $g(z)$ hat.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $f(0) = f(4) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(4/8)^k$ und der Grenzwert dieser geometrischen Reihe ist $1/(1-1/2) = 2$.

Des weiteren ist $g(0) = g(2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-4/8)^k$ und der Grenzwert dieser geometrischen Reihe ist $1/(1+1/2) = 2/3$.

(b)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}}\,(z^2-4z+4)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}}\,(z-2)^{2k}.$$

Potenzreihen haben einen Konvergenzkreis. Da 3 auf der x-Achse zwischen 0 und 4 liegt, liegt 3 im Kreis der auch 0 und 4 enthält, und da f dort konvergiert, muss es dies auch an 3 tun.

(Da $0, 3$ und 4 auf einer Geraden liegen, können Sie nicht alle auf dem Rand des Kreises liegen. D.h. auch wenn 0 und 4 Kreisrandpunkte sind, ist 3 im Kreisinneren.)

(c) Setzt man 2 in g ein ergibt sich $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ und diese Reihe konvergiert nicht (keine Nullfolge).

Potenzreihen haben einen Konvergenzkreis. Da $2 = (0+4)/2$ liegt 2 in jedem Kreis der auch 0 und 4 enthält. Da g an 0 und 4 konvergiert, nicht aber an 2, kann es keinen Konvergenzkreis geben und somit ist g keine Potenzreihe.

Aufgabe H 70. *Formel von Euler und de Moivre*

(a) Schreiben Sie $f(x) = (\sin(x))^3(\cos(2x))^2$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\sin(mx)$ und $\cos(nx)$, mit $m, n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Leiten Sie die folgende Formel her.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2\pi k/n) = 0$$

Hinweis: Nach Verwendung der Formel von Euler und de Moivre stößt man auf geometrische Summen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Einsetzen der Formeln aus (1.14.18),

$$\sin(x) \;=\; \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \qquad \text{und} \qquad \cos(2x) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}),$$

folgt mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\begin{aligned}(\cos(2x))^2 &= \tfrac{1}{4}\,(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})^2 \;=\; \tfrac{1}{4}\,(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 2 + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}) \qquad \text{und}\\ (\sin(x))^3 &= -\tfrac{1}{8\mathrm{i}}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^3 \;=\; -\tfrac{1}{8\mathrm{i}}\,(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}).\end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen liefert

$$\begin{aligned}(\sin(x))^3(\cos(2x))^2 &= -\tfrac{1}{32\mathrm{i}}\,(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + 2 + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x})\\ &= -\tfrac{1}{32\mathrm{i}}\,(-7\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 7\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 5\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 5\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{7\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-7\mathrm{i}x})\\ &= \tfrac{7}{16}\sin(x) - \tfrac{5}{16}\sin(3x) + \tfrac{3}{16}\sin(5x) - \tfrac{1}{16}\sin(7x).\end{aligned}$$

(b) Mit $\cos(2\pi k/n) \;=\; \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n} + \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}k/n})$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2\pi\mathrm{i}k/n) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n} + \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}k/n}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n})^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/n})^k\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n})^n}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}} + \frac{1-(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/n})^n}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/n}}\right) = 0,\end{aligned}$$

da $(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n})^n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 71. *Differenzierbarkeit*

Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ und die Funktion g an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ differenzierbar sind.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{für } x \leqq 0 \\[2ex] \frac{1}{2}(1-x)^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x+1|^3 + x|x-1|$$

Lösungshinweise hierzu: Betrachtet wird der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten von f an der Stelle $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{2}(1-x)^2}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0+0} \frac{(1-x)^2}{x}$$

Dieser existiert nicht, die Funktion kann also an $x_0 = 0$ nicht differenzierbar sein.
Dies gilt, obwohl der links- und rechtsseitge Grenzwert der Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{für } x > 0 \\[2ex] x - 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ übereinstimmen.

Die Funktion g lässt sich abschnittsweise ohne Beträge schreiben:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} (x+1)^3 + x(x-1) & \text{für} \quad 1 \leqq x \\ (x+1)^3 - x(x-1) & \text{für} \quad -1 \leqq x < 1 \\ -(x+1)^3 - x(x-1) & \text{für} \quad x < -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^3 + 4x^2 + 2x + 1 & \text{für} \quad 1 \leqq x \\ x^3 + 2x^2 + 4x + 1 & \text{für} \quad -1 \leqq x < 1 \\ -x^3 - 4x^2 - 2x - 1 & \text{für} \quad x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Für den Differenzenquotienten an $x_1 = -1$ ergibt sich somit (mit Hilfe von Polynomdivisionen)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1-0} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} &= \lim_{x \to -1-0} \frac{-x^3 - 4x^2 - 2x - 1 + 2}{x+1} = \lim_{x \to -1-0} -x^2 - 3x + 1 = 3 \\ \lim_{x \to -1+0} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} &= \lim_{x \to -1+0} \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 1 + 2}{x+1} = \lim_{x \to -1+0} x^2 + x + 3 = 3\,, \end{aligned}$$

die Grenzwerte stimmen also überein, die Funktion ist in $x_1 = -1$ differenzierbar.

In $x_2 = 1$ erhält man analog

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-0} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1-0} \frac{x^3+2x^2+4x+1-8}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} x^2+3x+7 = 11 \\
\lim_{x\to 1+0} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1+0} \frac{x^3+4x^2+2x+1-8}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} x^2+5x+7 = 13\,,
\end{aligned}$$

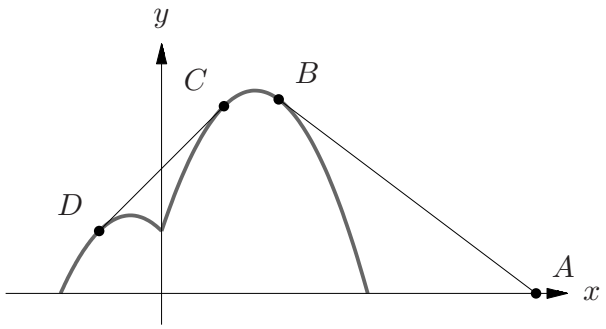
die Grenzwerte stimmen also nicht überein, die Funktion ist in $x_1 = 1$ nicht differenzierbar.

Aufgabe H 72. *Tangenten*

Eine Seilbahn führt vom Punkt $A = (6, 0)$ auf zwei durch die Parabeln

$$p_1 : y = -x^2 + 3x + 1, \quad p_2 : y = -x^2 - x + 1$$

dargestellte Berge.



Wo befinden sich die Bergstationen B, C und D, in denen die Seile tangential aufliegen?

Lösungshinweise hierzu: Seilbeschreibende Gerade

$$g_1 : y = s_1(x-6)$$

s_1: Steigung der Tangente in Punkt B

$$s_1 = -2b + 3$$

Vergleich der y-Koordinaten von p_1 und g_1

$$-b^2 + 3b + 1 = (-2b+3)(b-6) \implies b^2 - 12b + 19 = 0$$

Lösungen: $b_{1,2} = 6 \pm \sqrt{17}$
Lösung links von Bodenstation (positive Höhe)

$$b = 6 - \sqrt{17}$$

und damit

$$B = (b, (-2b-3)(b+6)) = (6-\sqrt{17},\ -34+9\sqrt{17})$$

Punkte auf Parabeln:

$$C = (c, -c^2+3c+1), \quad D = (d, -d^2-d+1)$$

Steigung des zweiten Seils

$$s_2 = \frac{-d^2-d+c^2-3c}{d-c}\ .$$

Steigung muss Steigungen der Berge entsprechen:

$$s_2 = -2c + 3 = -2d - 1 \implies d = c - 2$$

In s_2

$$\begin{aligned} -(c-2)^2 - c + 2 + c^2 - 3c &= -2(-2c+3) \\ -2 &= 4c - 6 \\ c &= 1. \end{aligned}$$

Punkte:

$$C = (1,3), \quad D = (-1,1).$$

Aufgabe H 73. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f. Berechnen Sie f'. Gibt es Stellen im Definitionsbereich von f, in denen f' nicht existiert?

(a) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ **(b)** $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ **(c)** $f(x) = \arctan\left((\tan(x))^2\right)$

Bestimmen Sie bei **(a)** auch f''.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wegen $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ gilt erstmal für den Definitionsbereich $D_f = (0,\infty)$ und die Ableitungen berechnen sich wie folgt:

$$f'(x) = \left(\exp(\sqrt{x}\ln(x))\right)' = \exp(\sqrt{x}\ln(x))\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(\ln(x)+2)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(x^{\sqrt{x}}(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}})\right)' \\ &= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{4x\sqrt{x}}\ln(x) - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{4}x^{\sqrt{x}-1}\left((\ln(x))^2 + 4\ln(x) - \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x) + 4\right) \end{aligned}$$

und f ist differenzierbar auf D_f.

(b) Der Definitionsbereich ist gegeben durch $D_f = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$, die Ableitung ist

$$\begin{aligned} f'(x) =& \left(\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-1/2} \\ =& \frac{1}{2}\frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{1/2} = \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4-1}} \end{aligned}$$

f ist differenzierbar auf $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

(c)

$$f'(x) = \frac{((\tan(x))^2)'}{1+(\tan(x))^4} = \frac{2\tan(x)\,(1+(\tan(x))^2)}{1+(\tan(x))^4}.$$

Der Definitionsbereich von f ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und f ist differenzierbar auf D_f.

Aufgabe H 74. *Höhere Ableitungen*

Bestimmen Sie die n-te Ableitung folgender Funktionen.

(a) $f\colon (-\frac{b}{a}, +\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(ax+b)$, wobei $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$
Hinweis: Verwenden Sie Induktion.

(b) $g\colon \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x^2-3x+2)^{-1}$
Hinweis: Schreiben Sie $g(x)$ als Linearkombination von Kehrwerten linearer Terme und verwenden Sie dann **(a)**.

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-3x}$
Hinweis: Verwenden Sie die Leibnizformel aus Aufgabe P66.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir wollen mit vollständiger Induktion zeigen, dass die folgende Gleichung gilt

$$(\ln(ax+b))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}.$$

IA Für $n=1$ gilt $(\ln(ax+b))' = \frac{a}{ax+b} = \frac{(-1)^{1-1}(1-1)!a^1}{(ax+b)^1}$.

IV Die n-te Ableitung von $\ln(ax+b)$ lasse sich in der oben genannten Form darstellen.

IS Dann gilt für die $n+1$-te Ableitung:

$$\begin{aligned}\left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}\right)' &= (-1)^{n-1}(n-1)!a^n\left((ax+b)^{-n}\right)' \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!a^n \cdot a \cdot (-n) \cdot (ax+b)^{-n-1} = \frac{(-1)^n n! a^{n+1}}{(ax+b)^{n+1}}.\end{aligned}$$

(b) Wir haben

$$g(x) = (x^2-3x+2)^{-1} = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Jetzt von **(a)** erhält man

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{ax+b}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n! a^{n+1}}{(ax+b)^{n+1}}, \\ \left(\frac{1}{x+b}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{(x+b)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Es folgt dass

$$(g(x))^{(n)} = \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

(c) Wir haben $h(x) = h_1(x)h_2(x)$, wobei $h_1(x) = x^2$, $h_2(x) = e^{-3x}$ und jetzt können wir die Leibnizformel verwenden:

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_1(x)^{(k)} h_2(x)^{(n-k)}.$$

Es gilt $h_1(x)' = 2x$, $h_1(x)'' = 2$, $h_1(x)^{(k)} = 0$ für alle $k \geqq 3$; $h_2(x)' = -3e^{-3x}$, $h_2(x)'' = 9e^{-3x}$, $h_2(x)^{(3)} = -27e^{-3x}$. Wir wollen mit vollständiger Induktion zeigen, dass die folgende Gleichung gilt

$$h_2(x)^{(m)} = (-1)^m 3^m e^{-3x}.$$

IA Siehe oben. **IV** Die m-te Ableitung von e^{-3x} lasse sich in der oben genannten Form darstellen.
IS Dann gilt für die $m+1$-te Ableitung:

$$\left((-1)^m 3^m e^{-3x}\right)' = (-1)^m 3^m \cdot (-3) \cdot e^{-3x} = (-1)^{m+1} 3^{m+1} e^{-3x}.$$

Schließlich haben wir

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} h_1(x)^{(k)} h_2(x)^{(n-k)} \\ &= x^2 \cdot (-1)^n 3^n e^{-3x} + 2nx \cdot (-1)^{n-1} 3^{n-1} e^{-3x} + n(n-1) \cdot (-1)^{n-2} 3^{n-2} e^{-3x} \\ &= (-1)^n 3^{n-2} \left(9x^2 - 6nx + n(n-1)\right) e^{-3x}. \end{aligned}$$

D. Garmatter, J. Hörner
L. Iancu, N.M. Mach

19. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

Sommersemester 2015

M. Künzer
M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 75. *Grenzwerte*

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2\sin(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln(x)\,\ln(1-x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Ausdruck ist von der Form "$\infty-\infty$". Es gilt $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}$, jetzt von der Form "$\frac{0}{0}$". Die Regel von l'Hospital zweimal angewandt liefert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}&=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln(x)+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln(x)+1+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b) Der Ausdruck ist von der Form "$\frac{0}{0}$". Die Regel von l'Hospital zweimal angewandt liefert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+0}\frac{1-\cos(x)}{x^2\sin(x)}&=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin(x)}{2x\sin(x)+x^2\cos(x)}\\&=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos(x)}{2\sin(x)+4x\cos(x)-x^2\sin(x)}=+\infty.\end{aligned}$$

(c) Der Ausdruck ist von der Form "$0\cdot\infty$", so dasss man nicht unmittelbar die Regel von l'Hospital anwenden kann. Man formt daher wie folgt um: $\ln(x)\ln(1-x)=\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln(x)}}$, was von der Form "$\frac{\infty}{\infty}$" ist. Daher gilt

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln(x)}}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{x\,(\ln(x))^2}}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x(\ln(x))^2}{1-x}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(\ln(x))^2+2\ln(x)}{-1}=0.$$

(d) Der Ausdruck ist von der Form "1^∞", so dasss man nicht unmittelbar die Regel von l'Hospital anwenden kann. Man formt daher wie folgt um:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)}.$$

Jetzt kann man die Regel von l'Hospital verwenden (Form "$\frac{0}{0}$"):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))-\ln(\cos(2x))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)}}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2\cos(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}+\frac{2}{\cos(2x)}\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}\right)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

also ist der ursprungliche Grenzwert $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}=\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$.

Aufgabe H 76. *Differentiation von Umkehrfunktionen*

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x-1}{x+1} \quad \text{und} \quad g\colon [2,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass g streng monoton steigend ist.
Was sagt das über die Existenz einer Umkehrfunktion?

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g^{-1}(y)$ an der Stelle $y = -1$.

(c) Bestimmen Sie den Wertebereich $W := f(\mathbb{R}^+)$ und skizzieren Sie den Graphen von f.

(d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W \to \mathbb{R}^+$.

(e) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} wie in Satz 2.3.1.

(f) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} direkt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Ableitung von g ist $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) > 0,\ \forall x \in (2,+\infty)$. Da g auf dem Intervall stetig und streng monoton steigend (siehe Satz 2.4.8) ist, ist g umkehrbar.

(b) Der Funktionswert $y_0 = 1$ ergibt sich für $x_0 = 3$, damit ist die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $g(3)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} g^{-1}(y)\big|_{y_0=g(x_0)} = \frac{1}{g'(x_0)} = \frac{1}{9}.$$

(c) Es gilt $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \in (0,+\infty)$. Da f auf $\mathbb{R}^+$ stetig und streng monoton steigend ist, ist f umkehrbar. Weiterhin gilt

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Wegen der Stetigkeit nimmt f also alle Werte aus dem Intervall $W = (-1,1)$ an.

(d) Aus der Gleichung $y = \frac{x-1}{x+1}$ folgt $x = \frac{y+1}{1-y}$, also gilt

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{1-y}, \quad \forall y \in (-1,1).$$

(e) Die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} f^{-1}(y)\big|_{y_0=f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{(x_0+1)^2}{2} = \frac{\left(\frac{y_0+1}{1-y_0}+1\right)^2}{2} = \frac{2}{(1-y_0)^2}.$$

(f) Die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle y_0 ist (direkt)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} f^{-1}(y)\big|_{y_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\frac{y+1}{1-y} = \frac{1-y_0-(-1)(y_0+1)}{(1-y_0)^2} = \frac{2}{(1-y_0)^2}.$$

Aufgabe H 77. *Mittelwertsatz*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{x}$.

(a) Bestimmen Sie eine Zwischenstelle $\xi \in (1,4)$ so, dass $f'(\xi) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1}$ ist.

(b) Begründen Sie mit dem Mittelwertsatz die Ungleichungen

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) \;<\; \sqrt{x}-1 \;<\; \frac{1}{2}(x-1) \quad \text{für } x>1\ .$$

Skizzieren Sie die Graphen der drei beteiligten Funktionen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion f ist stetig auf dem Intervall $[1,4]$ und in $(1,4)$ differenzierbar. Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass ein $\xi \in (1,4)$ existiert, so dass $f'(\xi) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1}$ gilt. Einsetzen der Ableitung der Funktion f und der Funktionswerte liefert die Gleichheit $\frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{1}{3}$; es folgt also $\xi = \frac{9}{4}$.

(b) Wir betrachten die Funktion f auf dem Intervall $[1,x]$; mit dem Mittelwertsatz folgt, dass ein $\xi \in (1,x)$ existiert, so dass $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ gilt. Da ξ im Intervall $(1,x)$ liegt, folgt $\frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{\xi}} < \frac{1}{2}$. Einsetzen von $f'(\xi)$ in diese Ungleichungen liefert

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} < \frac{1}{2}.$$

Durchmultiplizieren mit $(x-1)>0$ liefert nun

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) \;<\; \sqrt{x}-1 \;<\; \frac{1}{2}(x-1) \quad \text{für } x>1\ .$$

Aufgabe H 78. *Taylorpolynom und Restglied*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \sin(2x)\ .$$

(a) Bestimmen Sie $T_5(f,x,1)$ und $R_5(f,x,1)$.

(b) Bestimmen Sie $T_4(g,x,\frac{\pi}{4})$ und $R_4(g,x,\frac{\pi}{4})$.

(c) Schätzen Sie den Fehler

$$\left| f\left(\frac{3}{2}\right) - T_2\left(f,\frac{3}{2},1\right)\right|$$

mit Hilfe des Restglieds nach oben ab und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem tatsächlichen Fehler.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Um das Taylorpolynom 5. Stufe samt Restglied angeben zu können, brauchen wir die ersten sechs Ableitungen von f:

$$f'(x) = -x^{-2}, \quad f^{(2)}(x) = 2x^{-3}, \quad f^{(3)}(x) = -6x^{-4}$$
$$f^{(4)}(x) = 4!x^{-5}, \quad f^{(5)}(x) = -5!x^{-6}, \quad f^{(6)}(x) = 6!x^{-7}$$

Da das Taylorpolynom um den Punkt 1 entwickelt wird, setzt man in die Funktion und in die ersten fünf Ableitungen $x=1$ ein:

$$f(1)=1,\ f'(1)=-1,\ f^{(2)}(1)=2,\ f^{(3)}(1)=-3!,\ f^{(4)}(1)=4!,\ f^{(5)}(1)=-5!$$

Damit erhält man das Taylorpolynom und das Restglied:

$$T_5(f,x,1) = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-(x-1)^5$$
$$R_5(f,x,1) = \left(1+\vartheta_{x,1}(x-1)\right)^{-7}(x-1)^6$$

(b) Für die Funktion g werden nur die ersten fünf Ableitungen benötigt:

$$g'(x) = 2\cos(2x), \quad g^{(2)}(x) = -4\sin(2x), \quad g^{(3)}(x) = -8\cos(2x)$$
$$g^{(4)}(x) = 16\sin(2x), \quad g^{(5)}(x) = 32\cos(2x)$$

Nun setzt man in die Funktion und in die ersten vier Ableitungen $x = \frac{\pi}{4}$ ein:

$$g(\frac{\pi}{4}) = 1,\ g'(\frac{\pi}{4}) = g^{(3)}(\frac{\pi}{4}) = 0,\ g^{(2)}(\frac{\pi}{4}) = -4,\ g^{(4)}(\frac{\pi}{4}) = 16$$

Damit erhält man das Taylorpolynom und das Restglied:

$$T_4(g, x, \frac{\pi}{4}) = 1 - 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{4})^4$$
$$R_4(g, x, \frac{\pi}{4}) = \frac{4}{15}\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\vartheta_{x,\frac{\pi}{4}}(x - \frac{\pi}{4})\right)(x - \frac{\pi}{4})^5.$$

(c) Es gilt $T_2(f, x, 1) = 1 - (x-1) + (x-1)^2$, also $T_2(f, \frac{3}{2}, 1) = 1 - (\frac{3}{2} - 1) + (\frac{3}{2} - 1)^2 = \frac{3}{4}$ und damit

$$\left| f\left(\frac{3}{2}\right) - T_2\left(f, \frac{3}{2}, 1\right) \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{12}.$$

Andererseits

$$\left| R_2(f, \frac{3}{2}, 1) \right| = \left| \left(1 + \vartheta_{\frac{3}{2},1}(\frac{3}{2} - 1)\right)^{-4} \cdot (\frac{3}{2} - 1)^3 \right| = \frac{2}{(\vartheta_{\frac{3}{2},1} + 2)^4} < \frac{1}{8}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 79. *Integration*

Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos(2x)\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(x)\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x &= [\mathrm{e}^x\cos(2x)] + 2\int \mathrm{e}^x\sin(2x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= [\mathrm{e}^x\cos(2x) + 2\mathrm{e}^x\sin(2x)] - 4\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x,\end{aligned}$$

es folgt dass $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{5}\mathrm{e}^x(\cos(2x)+2\sin(2x))\right]$ gilt.

(b) Partielle Integration und dann Substitution $1-x^2=t$, $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}=-2x$ liefern

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}\,x = [x\arcsin(x)] + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = \left[x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}\right].$$

(c) Zweimal partielle Integration verwenden:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2\cos(x)\,\mathrm{d}\,x &= \left[x^2\sin(x)\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= \pi^2\sin(\pi) - 0 + [2x\cos(x)]_0^\pi - 2\int_0^\pi \cos(x)\,\mathrm{d}\,x\\ &= 2\pi\cos(\pi) - 0 - [2\sin(x)]_0^\pi = -2\pi.\end{aligned}$$

(d) Substitution $x^2=t$, $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}=2x$ liefert

$$\int_0^\pi x\cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2} x\cos(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\left[\sin(t)\right]_0^{\pi^2} = \frac{1}{2}\sin(\pi^2).$$

Aufgabe H 80. *Integration*

Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} x\arctan(x)\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int (\sin(x))^3(\cos(2x))^2\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Siehe Aufgabe H70(a).

(c) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_0^{1/\sqrt{3}} x\arctan(x)\,\mathrm{d}\,x &= \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_0^{1/\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{6}\arctan(1/\sqrt{3}) - 0 - \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{\pi}{36} - \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \mathrm{d}\,x + \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{\pi}{36} + \frac{1}{2}\left[-x+\arctan x\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{\pi}{36} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

(b) Mit Aufgabe H70(a) gilt

$$(\sin(x))^3(\cos(2x))^2 = \frac{7}{16}\sin(x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{3}{16}\sin(5x) - \frac{1}{16}\sin(7x),$$

also lässt sich der Integral einfach berechnen als

$$\begin{aligned}\int (\sin(x))^3(\cos(2x))^2\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{7}{16}\sin(x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{3}{16}\sin(5x) - \frac{1}{16}\sin(7x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[-\frac{7}{16}\cos(x) + \frac{5}{48}\cos(3x) - \frac{3}{80}\cos(5x) + \frac{1}{112}\cos(7x)\right].\end{aligned}$$

(c) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}\,x &= \left[\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} - \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \ln(\mathrm{e}^2)\cdot\ln(\ln(\mathrm{e}^2)) - \ln(\mathrm{e})\cdot\ln(\ln(\mathrm{e})) - \left[\ln(x)\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \\ &= 2\ln(2) - 0 - 2 + 1 = \ln\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right).\end{aligned}$$

(d) Partielle Integration für den ersten Term liefert

$$\begin{aligned}\int \ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x &= \left[x\ln(\ln(x))\right] - \int \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[x\ln(\ln(x))\right].\end{aligned}$$

Aufgabe H 81. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x(x^2-3)\,.$$

Führen Sie eine Kurvendiskussion für f durch im Sinne von 2.8.

Lösungshinweise hierzu:

(1.) Definitionsbereich und Wertebereich: schon da.

(2.) Symmetrien: Wir erhalten $f(-x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2-3)$. Die Funktion f ist weder gerade noch ungerade, weil $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$, deshalb ist die Kurve nicht symmetrisch.

(3.) Stetigkeit: als Produkt zweier stetiger Funktionen, ist f auch stetig auf $\mathbb{R}$.
(4.) Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pm\sqrt{3}\}.$$

(5.-6.) Differenzierbarkeit: als Produkt zweier differenzierbarer Funktionen, ist f auch differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Ableitung, Extremalstelle, zugehörige Funktionswerte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x(x^2 - 3) + 2x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - 3) \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} \in \{-3, 1\} \\ f(-3) &= \frac{6}{\mathrm{e}^3},\ f(1) = -2\mathrm{e} \end{aligned}$$

Es gilt $f'(x) < 0$, für $x \in (-3,\, 1)$, und $f'(x) < 0$, für $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, also $x_3 = -3$ ist ein lokales Maximum und $x_4 = 1$ ist ein lokales Minimum.

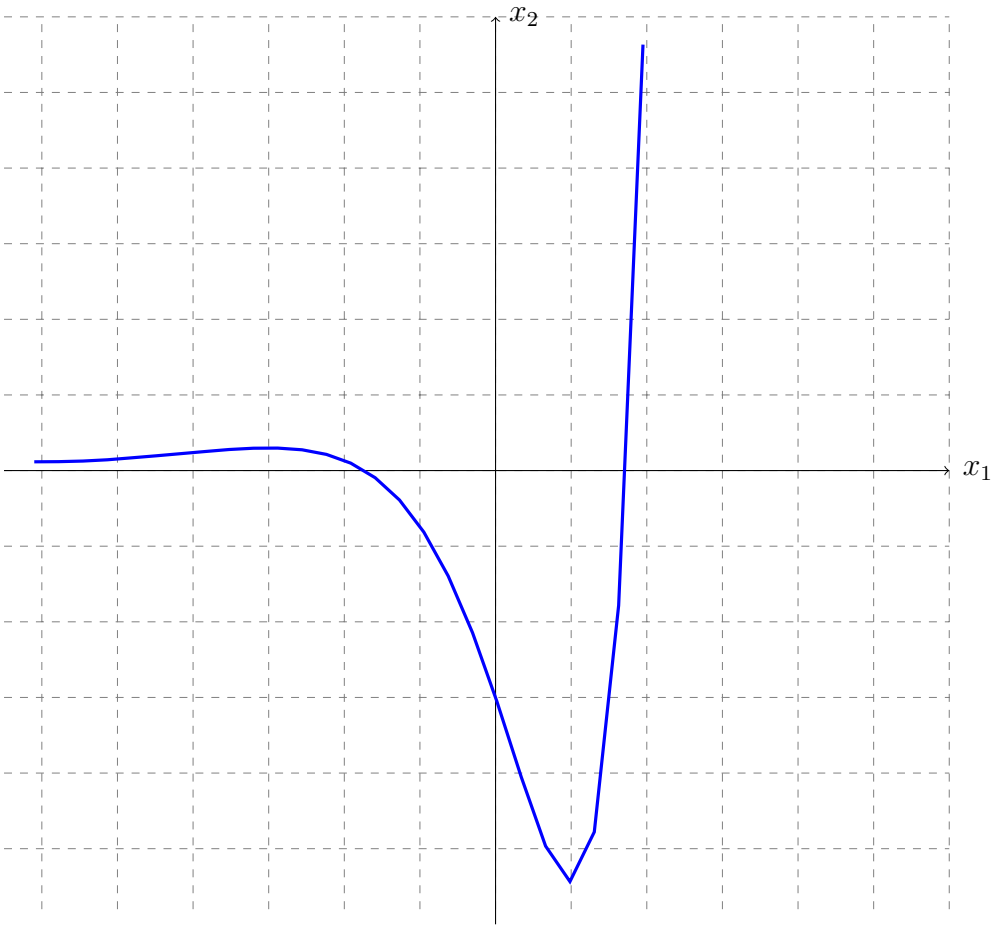
(7.-8.) Zweite Ableitung und Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - 3) + \mathrm{e}^x(2x + 2) = \mathrm{e}^x(x^2 + 4x - 1) \\ f''(x) &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow x_{5,6} \in \{-2 \pm \sqrt{5}\} \\ f''(x) &< 0 \iff x \in (-2 - \sqrt{5},\, -2 + \sqrt{5}) \\ f''(x) &> 0 \iff x \in (-\infty, -2 - \sqrt{5}) \cup (-2 + \sqrt{5}, +\infty) \end{aligned}$$

Die Wendepunkte heißen $(-2 - \sqrt{5}, f(-2 - \sqrt{5}))$ und $(-2 + \sqrt{5}, f(-2 + \sqrt{5}))$.
(9.) Verhalten an den Rändern, andere Funktionswerte:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ &f(0) = -3,\ f(-2 - \sqrt{5}) = (6 + 4\sqrt{5})\mathrm{e}^{-2-\sqrt{5}},\ f(-2 - \sqrt{5}) = (6 - 4\sqrt{5})\mathrm{e}^{-2+\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(10.) Skizze:



Aufgabe H 82. *Taylorreihe*

Gegeben seien die Funktionen

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \qquad \text{und} \qquad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(2x)\ .$$

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(g, x, 0)$.

(b) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(g, x, 1)$. Weisen Sie die Übereinstimmung von $T(g, x, 1)$ und $g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ nach.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe $T(f, x, 0)$. Weisen Sie mit Hilfe des Restglieds nach Lagrange die Übereinstimmung von $T(f, x, 0)$ und $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ nach.

(d) Bestimmen Sie eine Stammfunktion für f als Potenzreihe mit Hilfe von **(c)**.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $g'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, $g''(x) = 6x - 6$, $g^{(3)}(x) = 6$, $g(k)(x) = 0$ für $k \geqq 4$. Also gilt $g(0) = -1$, $g'(0) = 3$, $g''(0) = -6$, $g^{(3)}(0) = 6$, $g(k)(0) = 0$ für $k \geqq 4$ und

$$T(g, x, 0) = -1 + \frac{3}{1!}x + \frac{-6}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 = -1 + 3x - 3x^2 + x^3.$$

(b) Es gilt $g(1) = 0$, $g'(1) = 0$, $g''(1) = 0$, $g^{(3)}(1) = 6$, $g(k)(1) = 0$ für $k \geqq 4$ und

$$T(g, x, 0) = \frac{6}{3!}(x-1)^3 = (x-1)^3.$$

(c) Induktiv zeigt man, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} f(2n)(x) &= (-1)^n 2^{2n} \cos(2x) \\ f(2n+1)(x) &= (-1)^{n+1} 2^{2n+1} \sin(2x). \end{aligned}$$

Daher gilt $f(2n)(0) = (-1)^n 2^{2n}$ und $f(2n+1)(0) = 0$. Die Koeffizienten der Taylorreihen haben also die Form

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^{k/2} 2^k}{k!} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Taylorreihe lässt sich kompakter schreiben als

$$T(f, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Alternativ : einsetzen von $2x$ in die Reihe für den Cosinus liefert das gleiche Ergebnis.

(d) Gliedweise Integration liefert eine Stammfunktion für f als Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 83. *Partialbruchzerlegung*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4+2}{x^3-x}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}\cosh(x)^3}\,\mathrm{d}\,x$

Hinweis: Substitution.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Polynomdivision und Nennerzerlegung ergeben

$$\frac{x^4+2}{x^3-x} = x + \frac{x^2+2}{x^3-x} = x + \frac{x^2+2}{x(x-1)(x+1)}\,.$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet also

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1},$$

und wir erhalten

$$x^2+2 = A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x) \text{ und daraus } A=-2,\ B=C=\frac{3}{2}\,.$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+2}{x^3-x}\,\mathrm{d}\,x &= \int x - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - 2\ln(|x|) + \frac{3}{2}\ln(|x-1|) + \frac{3}{2}\ln(|x+1|)\right]\,.\end{aligned}$$

(b) Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2},$$

und wir erhalten

$$x^2-3x+2 = A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx \text{ und daraus } A=2,\ B=-1,\ C=-6\,.$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[2\ln(|x|) - \ln(|x+1|) + \frac{6}{x+1}\right]\,.\end{aligned}$$

(c) Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{3x+5}{x(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+F}{(x^2+2x+2)^2}$$

und wir erhalten

$$3x+5 = A(x^4+4x^3+8x^2+8x+4)+Bx^4+(2B+C)x^3+(2B+2C)x^2+2Cx+Dx^2+Fx.$$

Das ergibt $A = \frac{5}{4}, B = -\frac{5}{4}, C = -\frac{5}{2}, D = -\frac{5}{2}, F = -2$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x} - \frac{5}{4}\cdot\frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5x+4}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{5}{4}\ln(|x|) - \frac{5}{8}\ln(x^2+2x+2) + \frac{5}{4}\frac{1}{x^2+2x+2}\right] \\ &\quad - \frac{5}{4}\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}\,x.\end{aligned}$$

Nach der Formel aus 3.4.9 gilt

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}.$$

Das ergibt

$$\int \frac{3x+5}{x(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{5}{4}\ln(|x|) - \frac{5}{8}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + \frac{x+6}{4(x^2+2x+2)}\right].$$

(d) Substitution $\mathrm{e}^x = t,\ \mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}$ liefert

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}\cosh(x)^3}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{8}{(t^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,t\,.$$

Nach der Formel aus 3.4.9 gelten

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}\,t &= [\arctan(t)] \\ \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}\,t + \left[\frac{t}{2(t^2+1)}\right] = \frac{1}{2}\left[\arctan(t) + \frac{t}{t^2+1}\right] \\ \int \frac{1}{(t^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,t &= \frac{3}{4}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,t + \left[\frac{t}{4(t^2+1)^2}\right] \\ &= \left[\frac{3}{8}\arctan(t) + \frac{3}{8}\frac{t}{t^2+1} + \frac{t}{4(t^2+1)^2}\right].\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}\cosh(x)^3}\,\mathrm{d}\,x = \left[3\arctan(\mathrm{e}^x) + \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1} + \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2}\right].$$

Aufgabe H 84. *Ober- und Untersumme*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto (t+1)^2$.

(a) Sei $x > 0$. Berechnen Sie mittels Ober- und Untersummen $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$. Wählen Sie dabei die Partitionen so, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Teilungspunkten immer gleich ist.

Hinweis: Siehe Lineare Algebra, 1.2.4.

(b) Sei $P = \{0, 1, 2, 3\}$. Bestätigen Sie durch direkte Rechnung, dass

$$\underline{S}(f, P) \leqq \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}\,t \leqq \overline{S}(f, P)$$

ist. Finden Sie eine Partition $Q = \{0, a, b, 3\}$ derart, dass $\underline{S}(f, Q) > \underline{S}(f, P)$ ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir wählen die Partition $\{\frac{0}{n}x, \frac{1}{n}x, \cdots, \frac{k}{n}x, \cdots, \frac{n}{n}x\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f, P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}x\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{n}\left(\frac{k^2}{n^2}x^2 + 2x\frac{k}{n} + 1\right) = \frac{x^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 2\frac{x^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k + \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
&= \frac{x^3}{6n^3}\left((n-1)n(2n-1)\right) + \frac{2x^2}{n^2}\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) + x \\
&= \frac{x^3}{6}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + x^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{x^3}{3} + x^2 + x \\
\overline{S}(f, P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{n} f\left(\frac{k+1}{n}x\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n}\left(\frac{k^2}{n^2}x^2 + 2x\frac{k}{n} + 1\right) = \frac{x^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\frac{x^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{x^3}{6n^3}\left(n(n+1)(2n+1)\right) + \frac{2x^2}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + x \\
&= \frac{x^3}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + x^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{x^3}{3} + x^2 + x
\end{aligned}$$

Da die Grenzwerte der Ober- und Untersumme übereinstimmen, gilt $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$. Wir haben also eine Stammfunktion von $f(t)$ berechnet.

(b) Im a-Teil wurden die allgemeinen Formeln für Ober- und Untersumme bestimmt. Mit der Partition $P = \{0, 1, 2, 3\}$ gilt nun $n = 3$ und $x = 3$. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f, P) &= \frac{27}{6}\left(2 - 1 + \frac{1}{9}\right) + 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{27}{6}\frac{10}{9} + 9 = 14 \\
\overline{S}(f, P) &= \frac{27}{6}\left(2 + 1 + \frac{1}{9}\right) + 9\left(1 + \frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{27}{6}\frac{28}{9} + 15 = 29.
\end{aligned}$$

Mögliche Partitionen mit Untersumme größer als $\underline{S}(f, P)$ sind:

(i) $Q_1 = \{0, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, 3\}$, mit $\underline{S}(f, Q_1) = 14.109375$.

(ii) $Q_2 = \{0, 1.3, 2.2, 3\}$, mit $\underline{S}(f, Q_2) = 14.253$.

(iii) Die bestmögliche Partition ist jedoch (mit Näherungswerten für a und b) $Q_{best} = \{0, 1.2853, 2.2091, 3\}$ mit $\underline{S}(f, Q_{best}) \approx 14.2549$.

Aufgabe H 85. *Integrale und Flächeninhalte*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$. Sei $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x + \frac{1}{2x}$.

(a) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, von den Geraden $x = 0$ und $x = 2$ und von der x-Achse eingeschlossen wird.
Hinweis: Die Substitution $x = \sinh(t)$ ist hilfreich.

(b) Zeigen Sie, dass $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ eine Stammfunktion von $(x^2+1)^{-1/2}$ ist. Weisen Sie $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ für $x \in \mathbb{R}$ nach. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arsinh}(x) - \ln(x)$.

(c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g auf $[\frac{1}{2}, +\infty)$ und der Geraden $x = \frac{1}{2}$ eingeschlossen wird. Fertigen Sie eine Skizze an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ zu bestimmen. Wir integrieren zuerst unbestimmt. Die Substitution $x = \sinh(t)$, $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \cosh(t)$ liefert

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Mit partieller Integration, $u = \cosh(t)$ und $v' = \cosh(t)$, erhält man

$$\int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}\,t = -\int \sinh^2(t)\,\mathrm{d}\,t + [\sinh(t)\cosh(t)].$$

Mit Hilfe der Identität $\sinh^2(t) = \cosh^2(t) - 1$ folgt

$$\int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}[t] + \frac{1}{2}[\sinh(t)\cosh(t)].$$

Rücksubstitution und die Identität $\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$ ergibt

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2}[\operatorname{arsinh}(x)] + \frac{1}{2}[x\cosh(\operatorname{arsinh}(x))] \\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arsinh}(x) + x\sqrt{x^2+1}\right].\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arsinh}(x) + x\sqrt{x^2+1}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh}(2) + 2\sqrt{5} - 0\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(2) + \sqrt{5}.$$

(b) Es ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Damit ist $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ eine Stammfunktion von $(x^2+1)^{-1/2}$.
Es gilt nach Beispiel 2.3.3

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\operatorname{arsinh}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

und nach Satz 2.4.6 gilt dann

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$$

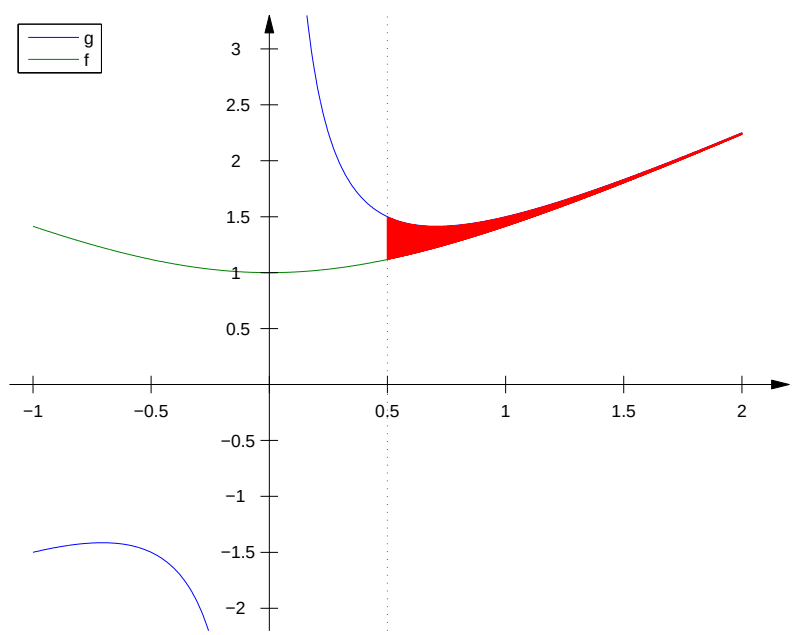
für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Setzt man in diese Identität $x = 0$ ein, so folgt

$$c = \ln\left(0 + \sqrt{0^2 + 1}\right) + c = \operatorname{arsinh}(0) = 0$$

und damit ist $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ bewiesen.
Damit gilt

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arsinh}(x) - \ln(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = \ln(2).$$

(c) Es gilt $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^2 = x^2 + 1 + \frac{1}{4x^2} > 1 + x^2 = \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2$ für $x \in \mathbb{R}_+$ und mit Lineare Algebra 1.5.7 gilt $g(x) > f(x)$ für $x \in \mathbb{R}_+$. Daher wollen wir $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}\,x$ bestimmen, was der roten Fläche in der Skizze entspricht.



Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} x + \frac{1}{2x} - \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\beta \to +\infty} \left[x^2 + \ln(x) - \operatorname{arsinh}(x) - x\sqrt{x^2+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{\beta} \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{\beta \to +\infty}\left(\beta^2 - \beta\sqrt{1+\beta^2}\right) - \left(\lim_{\beta \to +\infty} \operatorname{arsinh}(\beta) - \ln(\beta)\right)\right) \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}}\right).
\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to+\infty}\beta(\beta-\sqrt{1+\beta^2}) &= \lim_{\beta\to+\infty}\frac{\beta(\beta-\sqrt{1+\beta^2})(\beta+\sqrt{1+\beta^2})}{\beta+\sqrt{1+\beta^2}}\\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\frac{\beta(\beta^2-(1+\beta^2))}{\beta+\sqrt{1+\beta^2}} = \lim_{\beta\to+\infty}-\frac{\beta}{\beta+\sqrt{1+\beta^2}}\\ &= \lim_{\beta\to+\infty}-\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\beta^2}}} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Gesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} g(x)-f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\ln(2)-\frac{1}{4}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{4}-(\ln(2)+\ln(1/2))+\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\ &= \frac{\sqrt{5}-3}{8}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe H 86. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\cot(x)+\tan(x)-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Substitution $\ln(x)=t$, $\frac{1}{x}=\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}$ liefert

$$\int\frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}\,t=\left[-\frac{1}{t}\right]=\left[-\frac{1}{\ln|x|}\right].$$

Daher konvergiert

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{a\to0+0}\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_a^{\frac{1}{2}}\\ &= \lim_{a\to0+0}(-\frac{1}{\ln(\frac{1}{2})}+\frac{1}{\ln(a)})\\ &= \frac{1}{\ln(2)}+\lim_{a\to0+0}\frac{1}{\ln(a)}=\frac{1}{\ln(2)}.\end{aligned}$$

(b) Substitution $x^2=t$, $2x=\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}$ liefert

$$\int\frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}\,t=\left[\frac{1}{2}\arctan(t)\right]=\left[\frac{1}{2}\arctan(x^2)\right].$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan(x^2)\right]_a^0 \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\arctan(a^2) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

also konvergiert das Integral gegen $-\frac{\pi}{4}$.

(c) Substitution $\arctan(x) = t$, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}$ liefert

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int t\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{t^2}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}(\arctan(x))^2\right].$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{1}{2}(\arctan(x))^2\right]_{\sqrt{3}}^{a} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}((\arctan(a))^2 - \frac{\pi^2}{9}) = \frac{1}{2}\cdot(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{9}) = \frac{5\pi^2}{72},\end{aligned}$$

also konvergiert das Integral gegen $\frac{5\pi^2}{72}$.

(d) Es gilt

$$\int \cot(x) + \tan(x) - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \Big[\ln(|\sin(x)|) - \ln(|\cos(x)|) - \ln(|x|)\Big].$$

Daher konvergiert

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \cot(x) + \tan(x) - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{a\to0+0}\Big[\ln(|\sin(x)|) - \ln(|\cos(x)|) - \ln(|x|)\Big]_a^{\pi/3} \\ &= \ln(\frac{\sqrt{3}}{2}) - \ln(\frac{1}{2}) - \ln(\frac{\pi}{3}) - \lim_{a\to0+0}(\ln(\sin(a)) - \ln(a)) \\ &= \ln(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}) - \lim_{a\to0+0}\ln(\frac{\sin(a)}{a}) = \ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right).\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 87. *Konvergenz*

Untersuchen Sie auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{x^6+x}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=17}^{\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir definieren

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Wir wollen nun das Grenzwertkriterium anwenden. Es gilt

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{\mathrm{e}^x}{x^6+x}}{g(x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\mathrm{e}^x}{x^5+1} = 1.$$

Da $\frac{\mathrm{e}^x}{x^6+x}$ und $g(x)$ auf dem Intervall $(0,1]$ positiv und stetig sind, hat nach Satz 3.7.11

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{x^6+x}\,\mathrm{d}\,x \text{ dasselbe Konvergenzverhalten wie } \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x.$$

Aber es ist $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\beta\to 0+0} [\ln|x|]_\beta^1 = \infty$. Damit divergiert auch $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{x^6+x}\,\mathrm{d}\,x$.

(b) Wir teilen das Integral auf in $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{0} \frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\,\mathrm{d}\,x + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\,\mathrm{d}\,x$. Da $\dfrac{\cos(x)}{\exp(x^2)}$ symmetrisch ist, genügt es $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\,\mathrm{d}\,x$ auf Konvergenz zu untersuchen.

Da $\dfrac{\cos(x)}{\exp(x^2)}$ nicht überall positiv ist und wir das Grenzwertkriterium anwenden wollen, betrachten wir $\left|\dfrac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\right|$, da aus absoluter Konvergenz insbesondere Konvergenz folgt.

Wir definieren

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{\exp(x)}.$$

Wir wollen nun das Grenzwertkriterium anwenden. Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{|\cos(x)|}{\exp(x^2)}}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|\cos(x)|}{\exp(x^2-x)} \leqq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\exp(x^2-x)} = 0,$$

da $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = \infty$ gilt. Da $\frac{|\cos(x)|}{\exp(x^2)}$ und $g(x)$ auf dem Intervall $[0,+\infty)$ positiv und stetig sind, hat nach Satz 3.7.11

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\right| \mathrm{d}\,x \text{ dasselbe Konvergenzverhalten wie } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\exp(x)}\,\mathrm{d}\,x.$$

Nach Beispiel 3.7.12 konvergiert $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\exp(x)}\,\mathrm{d}\,x$, womit auch $\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\right| \mathrm{d}\,x$ und damit $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\,\mathrm{d}\,x$ und damit $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\exp(x^2)}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert.

(c) Wir wollen das Grenzwertkriterium verwenden. Es ist $\tan\left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0$ und $\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 > 0$ für $x \geqq 1$ und beide Funktionen sind stetig auf $[1, +\infty)$. Es gilt nach 1.12.5

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\tan(1/x)^2}{(1/x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\tan(1/x)}{1/x}\right)^2 = \lim_{z\to 0+0} \left(\frac{\tan(z)}{z}\right)^2 = 1.$$

Somit haben $\int\limits_1^{+\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \mathrm{d}\,x$ und $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$ das gleiche Konergenzverhalten und nach 3.7.8 konvergiert $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$.

(d) Da $\tan(x)$ monoton steigend ist auf dem Intervall $(0, 1]$, ist $\tan(1/x)$ monoton fallend auf $[1, +\infty)$ und demnach ist $(\tan(1/x))^2$ auch monoton fallend auf $[1, +\infty)$. Mit dem Aufgabenteil **(c)** und Satz 3.8.1 konvergiert dann auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$ und damit auch $\sum\limits_{n=17}^{\infty} \left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$.

Aufgabe H 88. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ und die ersten zwei Ableitungen von

$$f\colon (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k(2k-1)} x^{2k}$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f''.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

(d) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} x^{2k+1}$.

(∗) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$x + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k(2k-1)} x^{2k} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \text{ mit } a_j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 1 \\ (-1)^{\frac{j}{2}} \frac{1}{j(j-1)} & \text{für } j \geqq 6,\ j \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zur Berechnung des Konvergenzradius genügt es die Reihe ab $j = 6$ zu betrachten. Wir bestimmen den größten Häufungspunkt als Grenzwert der konvergenten Teilfolge der geraden Folgenglieder (der zweite Häufungspunkt ist offensichtlich 0). Es gilt

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{\left|(-1)^{\frac{j}{2}} \frac{1}{j(j-1)}\right|} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{j}} \cdot \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{j-1}} = 1,$$

also konvergiert die Reihe für $|x| \leqq 1$. Summandenweises Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} x^{2k-1}, \\ f''(x) &= \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k x^{2k-2} = \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j+1} x^{2j}. \end{aligned}$$

(b) Innerhalb des Konvergenzbereichs gilt $|-x^2| < 1$, daher handelt es sich um eine konvergente geometrische Reihe und es gilt

$$f''(x) = -\sum_{j=2}^{\infty} \left(-x^2\right)^j = -\frac{1}{1-(-x^2)} + 1 - x^2 = -\frac{1}{1+x^2} + 1 - x^2.$$

(c) Integrieren ergibt

$$[f'(x)] = \int -\frac{1}{1+x^2} + 1 - x^2 \,\mathrm{d}\,x = \left[-\arctan(x) + x - \frac{1}{3}x^3\right].$$

Einsetzen des Arguments 0 liefert

$$f'(x) = -\arctan(x) + x - \frac{1}{3}x^3 + 1.$$

Wir integrieren zuerst $\arctan(x)$ mittels partieller Integration. Es ist

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) \,\mathrm{d}\,x = \int 1 \cdot \arctan(x) \,\mathrm{d}\,x &= [x \arctan(x)] - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]. \end{aligned}$$

Damit bestimmen wir f durch Integration von f'. Es folgt

$$[f(x)] = \left[-x \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + x\right].$$

Einsetzen des Arguments 0 liefert

$$f(x) = -x \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + x.$$

(d) In Teil (c) wurde

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} x^{2k-1} &= 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2j+1} x^{2j+1} \\ &= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2j+1} x^{2j+1} \\ &= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \arctan(x) \end{aligned}$$

gezeigt. Es ist also $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2j+1} x^{2j+1} = -\arctan(x)$.

(∗) Da die geschlossene Form aus **(d)** lediglich innerhalb des Konvergenzkreises gilt, können wir nicht einfach den Wert 1 einsetzen. Wir gehen wie in Beispiel 2.6.13 vor. Wir wollen Satz 2.6.7 auf $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -\arctan(x)$ anwenden. Nach 2.6.9 ist $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2j+1} x^{2j+1}$ die Taylorreihe von g um den Entwicklungspunkt 0. Wir wollen $\lim_{n\to+\infty} R_n(g,x,0) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ zeigen. Dazu zeigen wir

$$\arctan^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{\sin(n\operatorname{arccot}(x))}{(\sqrt{1+x^2})^n}$$

für $n \geqq 1$ durch vollständige Induktion. Dazu brauchen wir die Identitäten

$$\sin(\operatorname{arccot}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ und } \cos(\operatorname{arccot}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

IA $n = 1$: $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sin(\operatorname{arccot}(x))}{\sqrt{1+x^2}}$.

IS $n \to n+1$: Mit der Induktionsvoraussetzung und $(\operatorname{arccot}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$ gilt

$$\begin{aligned}\arctan^{(n+1)}(x) &= \left((-1)^{n-1}(n-1)!\frac{\sin(n\operatorname{arccot}(x))}{(\sqrt{1+x^2})^n}\right)' \\ = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{\cos(n\operatorname{arccot}(x))(-n)(1+x^2)^{\frac{n}{2}-1} - \sin(n\operatorname{arccot}(x))nx(1+x^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(1+x^2)^n} \\ &= (-1)^n n!\frac{\cos(n\operatorname{arccot}(x)) + \sin(n\operatorname{arccot}(x))x}{(\sqrt{1+x^2})^{n+2}}.\end{aligned}$$

Weiterhin gilt mit den Additionstheoremen des Sinus und obigen Identitäten

$$\begin{aligned}\sin((n+1)\operatorname{arccot}(x)) &= \sin(n\operatorname{arccot}(x))\cos(\operatorname{arccot}(x)) + \cos(n\operatorname{arccot}(x))\sin(\operatorname{arccot}(x)) \\ &= \frac{\cos(n\operatorname{arccot}(x)) + \sin(n\operatorname{arccot}(x))x}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\arctan^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!\frac{\sin((n+1)\operatorname{arccot}(x))}{(\sqrt{1+x^2})^{n+1}}$$

und die Behauptung ist bewiesen. Damit gilt für das Restglied

$$|R_n(g,x,0)| = \left|\frac{g^{(n+1)}(\vartheta_n x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqq \frac{1}{n+1}\left|\frac{x}{\sqrt{1+\vartheta_n^2 x^2}}\right|^{n+1}$$

mit einem $\vartheta_n \in [0,1]$. Für $x \in [-1,1]$ ist $1+\vartheta_n^2 x^2 \geqq 1$ und damit $\sqrt{1+\vartheta_n^2 x^2} \geqq 1$ und somit

$$\left|\frac{x}{\sqrt{1+\vartheta_n^2 x^2}}\right| \leqq 1.$$

Somit ist $|R_n(g,x,0)| \leqq \frac{1}{n+1}$ und es folgt $\lim_{n\to+\infty} R_n(g,x,0) = 0$. Daher gilt $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2j+1} x^{2j+1} = -\arctan(x)$ auch auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1,1]$. Einsetzen von 1 ergibt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2j+1} = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe H 89. *Modell: Parabolische Quadrik als Funktionsgraph*

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ betrachten wir $f_\alpha^\beta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x, y) \mapsto \alpha y^2 - \beta x^2$.
Für $k \in \mathbb{R}$ sei $N_k(\alpha, \beta)$ die Niveaumenge von f_α^β zum Niveau k. Das in der Präsenzübung benutzte Modell stellt einen Ausschnitt des Funktionsgraphen der Funktion f_1^1 dar. Dargestellt ist der Bereich $-1 \leqq x, y \leqq 1$. Sie finden das Modell auch unter:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/01

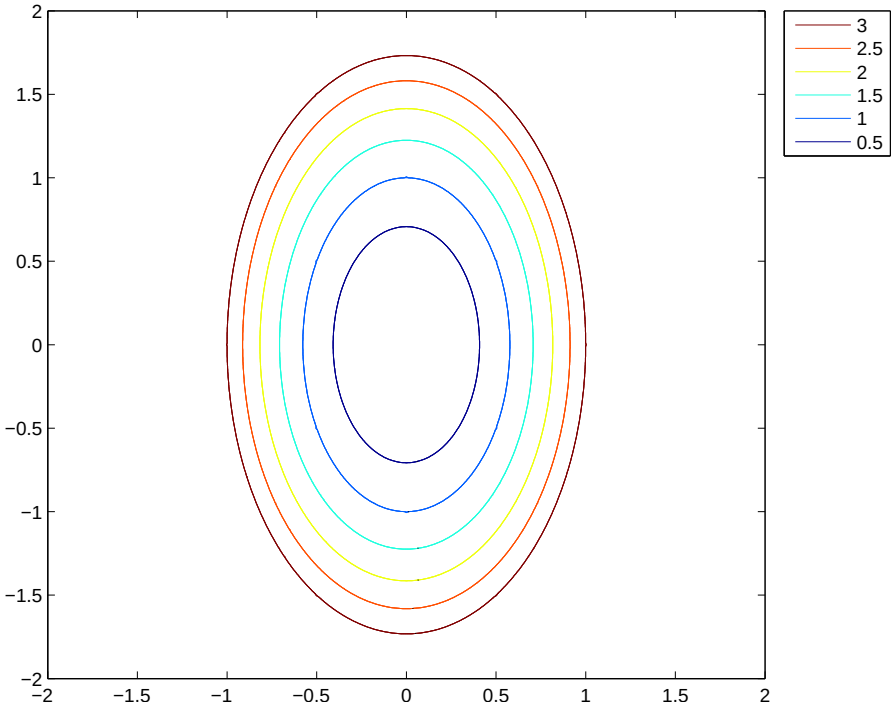
(a) Zeichnen Sie für $(\alpha, \beta) \in \{(1, -3), (2, 1)\}$ jeweils 5 nichtleere Niveaumengen $N_k(\alpha, \beta)$ mit $k \in [-2, 2]$.

(b) Wie hängt die Gestalt des Graphen der Funktion f_α^β vom Paar (α, β) ab?

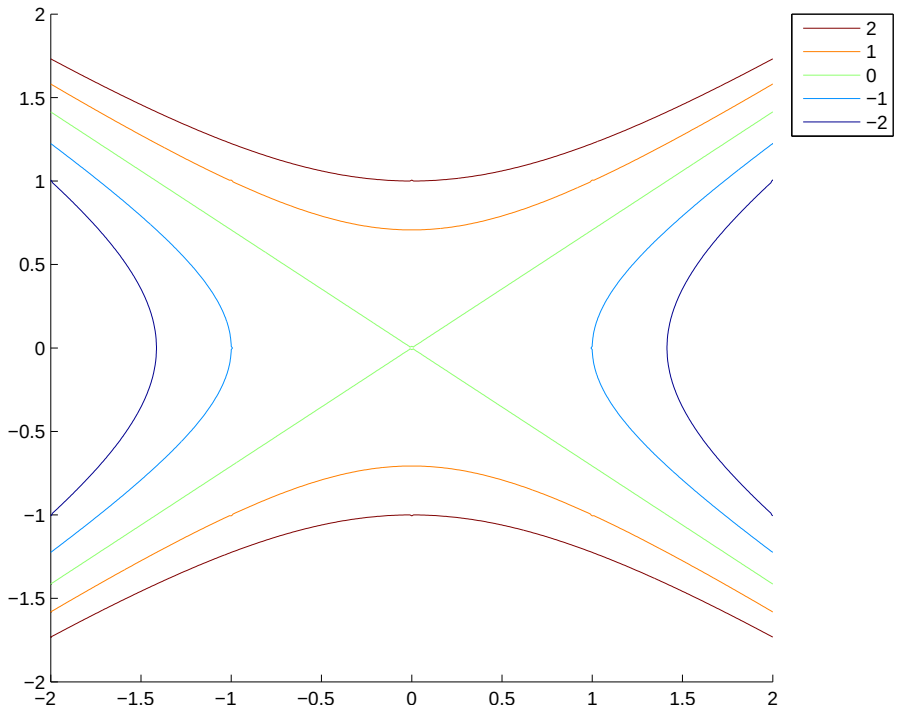
(c) Bestimmen Sie alle Gestalten, die die Niveaumengen $N_k(\alpha, \beta)$ annehmen können, und geben Sie zu jeder Gestalt ein dazu passendes Tripel (k, α, β) als Beispiel an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $(\alpha, \beta) = (1, -3)$ ist $f_1^{-3}(x, y) = y^2 + 3x^2$. Daher sind Niveaumengen zu $k < 0$ leer. Zu $k = 0$ ist die Niveaumenge der Nullpunkt. In der folgenden Skizze sind die Niveaumengen zu $k \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$ zu sehen.



Für $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ ist $f_2^1(x, y) = 2y^2 - x^2$. In der folgenden Skizze sind die Niveaumengen zu $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ zu sehen.



(b) Der Graph der Funktion f_α^β kann als Quadrik mit der Gleichung $\beta x^2 - \alpha y^2 + z = 0$ oder $\beta x_1^2 - \alpha x_2^2 + x_3 = 0$ aufgefasst werden, wobei entweder α oder β nicht verschwinden. Für den speziellen Fall $\alpha = \beta = 0$ hat der Graph die Gestalt einer Ebene. Sind beide Koeffizienten ungleich 0 so muss man bzgl. der Gestalt zwischen den jeweiligen Vorzeichenkonstellationen unterscheiden. Haben α und β dasselbe Vorzeichen so ist die Gestalt ein hyperbolisches Paraboloid. Haben beide unterschiedliche Vorzeichen so ist die Gestalt ein elliptisches Paraboloid. Damit bleibt nun der Fall, dass nur einer der beiden Koeffizienten verschwindet und in diesem ergibt sich die Gestalt als parabolischer Zylinder.

(c) Die Bedingungen für Niveaumengen liefern Quadrikgleichungen im Definitionsbereich. Aus Symmetriegründen geben die Fälle $\alpha, \beta < 0$ und > 0, sowie $\alpha < 0, \beta > 0$ und $\alpha > 0, \beta < 0$ jeweils die gleichen Formen für die Niveaus. Mit Hilfe der Klassifikation der ebenen Quadriken muss man jeweils die Fälle $k < 0, k = 0$ und $k > 0$ betrachten. Für $\alpha, \beta > 0$ ergeben sich damit die Formen einer Hyperbel für $k \neq 0$ und die Form eines schneidenden Geradenpaars für $k = 0$. Für $\alpha > 0$ und $\beta < 0$ ergibt sich die leere Menge für $k < 0$, ein Punkt für $k = 0$ und eine Ellipse für $k > 0$.

Nun gibt es aber noch die Fälle in denen je einer der Koeffizienten verschwindet oder sogar beide. Falls $\alpha = \beta = 0$ ist, so ist das 0-Niveau die ganze reelle Ebene und alle anderen Niveaus leer. Ist hingegen nur z.B. $\beta = 0$ und $\alpha > 0$, so ist für $k < 0$ das Niveau leer, für $k = 0$ eine Doppelgerade und für $k > 0$ ein paralleles Geradenpaar. Damit sind bis auf die Parabel alle möglichen ebenen Quadriken vorgekommen plus in einem speziellen Fall die ganze reelle Ebene.

Anmerkung: Quadriken ohne quadratischen Anteil sind in der Linearen Algebra nicht erfasst.

Aufgabe H 90. *Stetigkeit und Folgen*

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x_1^4(x_2-1)}{x_1^8 + (x_2-1)^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,1) \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,1) \end{cases} .$$

(a) Stellen Sie Zähler und Nenner von $\dfrac{3x_1^4(x_2-1)}{x_1^8+(x_2-1)^2}$ in Multiindex-Notation im Sinne von 4.2.10 dar. Geben Sie jeweils die nichtverschwindenden Koeffizienten an.

(b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0,1)$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(c) Gibt es eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = (0,1)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \neq 0$?

(d) Ist f im Punkt $(0,1)$ stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für den Zähler ist

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2) \mapsto 3x_1^4(x_2-1) = 3x_1^4x_2 - 3x_1^4 = \sum_{\alpha\in J_1} a_\alpha x^\alpha,$$

wobei die Menge $J_1 = \{(4,1),(4,0)\}$ von Multi-Indizes verwendet wird. Die zugehörigen Koeffizienten sind $a_{(4,1)} = 3$ und $a_{(4,0)} = -3$. Für den Nenner ist

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1,x_2) \mapsto x_1^8 + (x_2-1)^2 = x_1^8 + x_2^2 - 2x_2 + 1 = \sum_{\alpha\in J_2} a_\alpha x^\alpha,$$

wobei die Menge $J_2 = \{(8,0),(0,2),(0,1),(0,0)\}$ von Multi-Indizes verwendet wird. Die zugehörigen Koeffizienten sind $a_{(8,0)} = 1$, $a_{(0,2)} = 1$. $a_{(0,1)} = -2$ und $a_{(0,0)} = 1$.

(b) Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(0, 1+\frac{1}{n}\right)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0,1)$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(c) Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n^4}\right)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = (0,1)$ und

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3\frac{1}{n^4}(1+\frac{1}{n^4}-1)}{\frac{1}{n^8}+(1+\frac{1}{n^4}-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^8}}{\frac{2}{n^8}} = \frac{3}{2}.$$

Anmerkung: Man kann auch eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = (0,1)$ gilt und $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n)$ divergiert.

(d) Wir haben in Aufagbenteil **(c)** eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = (0,1)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \neq f(0,1)$ gefunden. Daher ist die Funktion wegen 4.2.7 nicht stetig im Punkt $(0,1)$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 91. *Ableitungen*

Bestimmen Sie im Punkt P jeweils den Gradienten $\nabla f(P)$, die Hessematrix $\mathrm{H}f(P)$ und die Ableitung in Richtung v.

(a) $f(x,y,z) = z^2 \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$, $\quad P = (1,2,3)$, $\quad v = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$

(b) $f(x,y,z) = \ln\left(\frac{\exp((x+y)^2)}{(z+1)^2}\right)$, $\quad P = (1,-1,1)$, $\quad v = \frac{1}{100}\left(7,-7,\sqrt{2}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\nabla f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} -2xz^2 \\ -2yz^2 \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla f(1,2,3) = \frac{1}{\mathrm{e}^5}\begin{pmatrix} -18 \\ -36 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$(\partial_v f)(1,2,3) = \frac{1}{\mathrm{e}^5}\begin{pmatrix} -18 \\ -36 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{\mathrm{e}^5}.$$

Als Hessematrix ergibt sich

$$\mathrm{H}f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} -2z^2+4x^2z^2 & 4xyz^2 & -4xz \\ 4xyz^2 & -2z^2+4y^2z^2 & -4yz \\ -4xz & -4yz & 2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathrm{H}f(1,2,3) = \frac{1}{\mathrm{e}^5}\begin{pmatrix} 18 & 72 & -12 \\ 72 & 54 & -24 \\ -12 & -24 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir vereinfachen die Funktion. Es ist $\ln\left(\frac{\exp((x+y)^2)}{(z+1)^2}\right) = \ln(\exp((x+y)^2)) - \ln((z+1)^2) = x^2+2xy+y^2-2\ln(z+1)$. Damit gilt

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x+2y \\ -\dfrac{2}{z+1} \end{pmatrix}, \quad \nabla f(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(\partial_v f)(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{100}.$$

Als Hessematrix ergibt sich

$$\mathrm{H}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{(z+1)^2} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathrm{H}f(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 92. *Existenz lokaler Extremstellen*

(a) Fertigen Sie jeweils eine Skizze der Nullstellenmenge und Vorzeichenverteilung von

$$f_c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2y(x^2+y^2+c^2-2cy-4)$$

für $c \in \{-2,0,2\}$ an.

(b) Begründen Sie mit Hilfe der Skizze und Satz 4.2.18, dass f_0 mindestens 4 lokale Extremstellen hat.

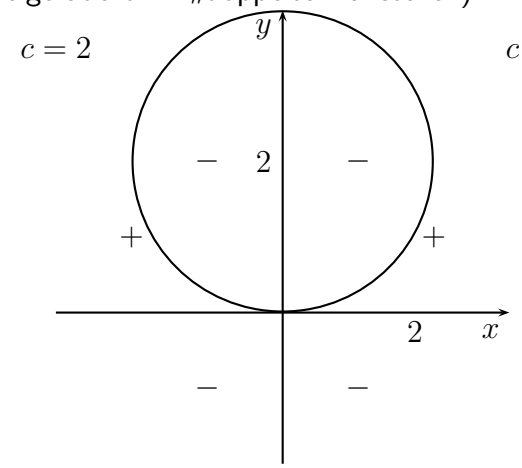
Lösungshinweise hierzu:

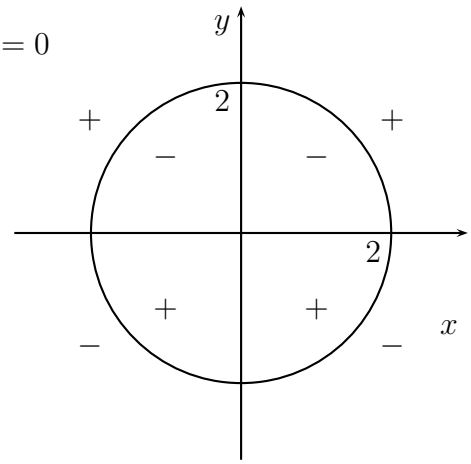
(a) Die Funktion f_c ist gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist. Es ist

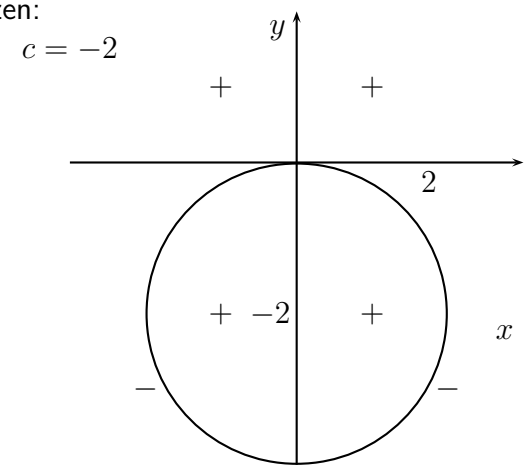
$$f_c(x,y) = x^2y(x^2+(y-c)^2-4)$$

Die Nullstellenmenge besteht also aus der x-Achse, der y-Achse und dem Kreis um $(0,c)$ mit Radius 2. Es findet immer ein Vorzeichenwechsel statt mit Ausnahme der y-Achse (Doppelgerade bzw. „doppelte Nullstelle“).

Skizzen:







(b) Der Kreis, die x-Achse und die y-Achse definieren vier voneinander getrennte kompakte Mengen. Nach Satz 4.2.18 muss auf jeder dieser Mengen das Maximum und Minimum angenommen werden. Der Rand gehört aber jeweils zur Nullstellenmenge also muss im Inneren jeweils noch ein Extremum liegen (je nach Vorzeichen ein Maximum bei „+“ oder ein Minimum bei „-“) da die Funktion offensichtlich nicht konstant ist.

Aufgabe H 93. *Interpolation*

(a) Bestimmen Sie ein Polynom $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit Totalgrad $\leqq 2$, welches

$$f(0,0) = 0, \qquad f(0,1) = 0, \qquad f(1,0) = 1, \qquad f(1,1) = 0$$

erfüllt und dessen Hessematrix Diagonaleinträge 0 hat.
Gibt es ein solches Polynom von Totalgrad $\leqq 1$?

(b) Bestimmen Sie $T_2(f,(x,y),(1,1))$. Begründen Sie, dass das zugehörige Restglied verschwindet.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f. Skizzieren Sie den Graphen von f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Ein Polynom mit Totalgrad $\leqq 2$ hat die allgemeine Form

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$$

mit Koeffizienten $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$. Gradient und Hessematrix lauten

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2ax + cy + d \\ 2by + cx + e \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & c \\ c & 2b \end{pmatrix}.$$

Somit gilt nach Voraussetzung $a = b = 0$. Aus $f(0,0) = 0$ folgt $f = 0$. Aus $f(0,1) = 0$ folgt $e = 0$. Bisher hat unser Polynom die Form $f(x,y) = cxy + dx$. Aus $f(1,0) = 1$ folgt nun $d = 1$ und aus $f(1,1) = 0$ folgt $c = -1$ und wir erhalten

$$f(x,y) - xy + x = (1-y)x.$$

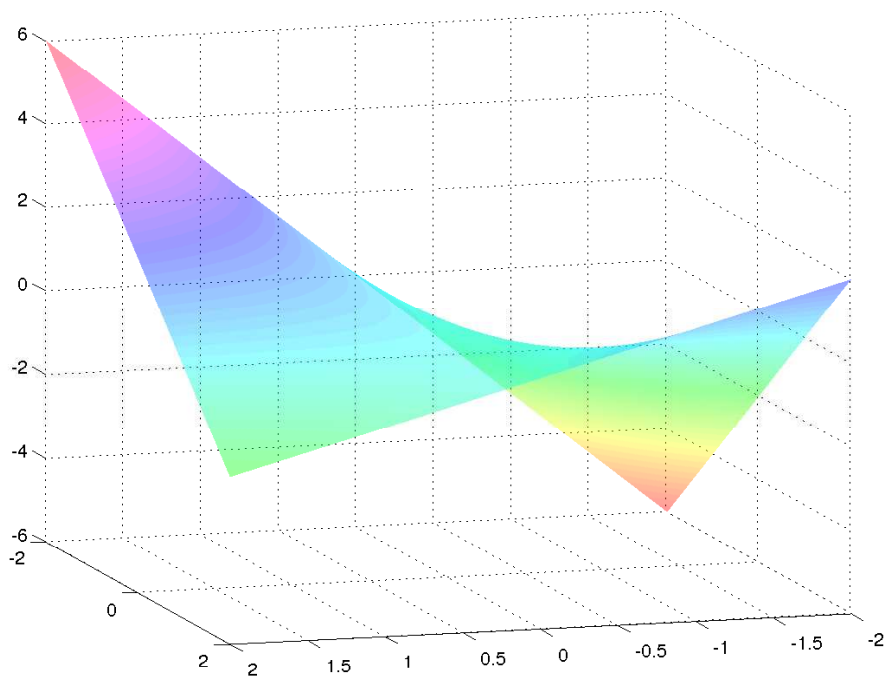
Wir haben dieses Polynom auf eindeutige Weise gewonnen. Daher kann es kein Polynom mit Totalgrad $\leqq 1$ geben, welches dieselben Bedingungen erfüllt.

(b) Mit Aufgabenteil **(a)** ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y \\ -x \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $T_2(f,(x,y),(1,1)) = -(y-1)+(x-1)(y-1)$. Da die Hessematrix konstant ist, verschwinden alle partiellen Ableitungen vom Grad 3. Daher verschwindet das zu $T_2(f,(x,y),(1,1))$ gehörige Restgleid ($f(x,y)$ wird als Polynom mit Totalgrad 2 durch das Taylorpolynom der Stufe 2 exakt beschrieben).

(c) Die Nullstellenmenge von $f(x,y) = (1-y)x$ ist die y-Achse und die Gerade $x = 1$.



Aufgabe H 94. *Taylorpolynom und Restglied*

Gegeben ist die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(2x)y$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(g,(x,y),(0,1))$ der Stufe 1 um den Entwicklungspunkt $(0,1)$.

(b) Sei $v = (v_1\ v_2) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, mit Parametern v_1 und v_2.
Bestimmen Sie die Funktionen $\partial_v g$ und $\partial_v^2 g$.

(c) Schätzen Sie den Fehler

$$\left|g(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) - T_1\big(g,(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),(0,1)\big)\right|$$

mit Hilfe des Restglieds aus 4.4.12 nach oben ab.
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem tatsächlichen Fehler.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2y\cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}$ und damit ist $T_1(g,(x,y),(0,1)) = 2x$.

(b) Es ist $\partial_v g(x,y) = v \bullet \nabla g(x,y) = 2y\cos(2x)v_1 + \sin(2x)v_2$ und $\partial_v^2 g(x,y) = v^\mathsf{T} \mathrm{H}g(x,y)v$.
Mit der Hessematrix

$$\mathrm{H}g(x,y) = \begin{pmatrix} -4y\sin(2x) & 2\cos(2x) \\ 2\cos(2x) & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich $\partial_v^2 g(x,y) = -4y\sin(2x)v_1^2 + 4\cos(2x)v_1v_2$.

(c) Nach Definition 4.4.13 ist

$$\left|g(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) - T_1\big(g,(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),(0,1)\big)\right| = \left|R_1((0,1),(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}))\right|$$

und nach 4.4.12 ist $R_1(a,v) = \frac{1}{2}\partial_v^2 g(a+\xi v)$ mit geeignetem $\xi \in [0,1]$, wobei hier $a = (0,1)$ und $v = (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ ist. Einsetzen und **(b)** ergeben

$$\left|R_1((0,1),(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}))\right| = \tfrac{1}{2}\left|-4(1-\tfrac{\xi}{2})\sin(-\xi)\tfrac{1}{4} + 4\cos(-\xi)\tfrac{1}{4}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\cos(-\xi) - (1-\tfrac{\xi}{2})\sin(-\xi)\right|.$$

Da $\xi \in [0,1]$ ist schätzen wir ab

$$\tfrac{1}{2}|\cos(-\xi) - (1 - \tfrac{\xi}{2})\sin(-\xi)| \leqq \tfrac{1}{2}|1 - (1-0)(-1)| = 1.$$

Als tatsächlicher Fehler ergibt sich

$$\big|g(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) - T_1\big(g, (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), (0,1)\big)\big| = |\tfrac{1}{2}\sin(-1) + 1| \approx 0.579.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 95. *Lokale Extrema*

Gegeben sind die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^4 + 2y^2(3-2xy)$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f sowie deren Typ.

(b) Skizzieren Sie die Graphen von $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto g(t,t)$ und $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto g(t,-t)$.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von g sowie deren Typ.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit $f(x,y) = x^4 + 2y^2(3-2xy) = x^4 + 6y^2 - 4xy^3$ gilt:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y^3 \\ 12y - 12xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -12y^2 \\ -12y^2 & 12 - 24xy \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die Nullstellen des Gradienten. Es ist $P_1 = (0,0)$ eine kritische Stelle. Aus $4x^3 - 4y^3 = 0$ folgt $x = y$. Einsetzten in die zweite Gleichung liefert $12y - 12y^3 = 0$ und mit $y \neq 0$ folgt $y^2 = 1$. Damit ergeben sich die restlichen kritischen Stellen $P_2 = (1,1)$ und $P_3 = (-1,-1)$. Einsetzen in die Hessematrix ergibt:

$$\mathrm{H}f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall gibt die Hesse-Matrix uns keine Informationen über die Extrema. Jedoch gilt

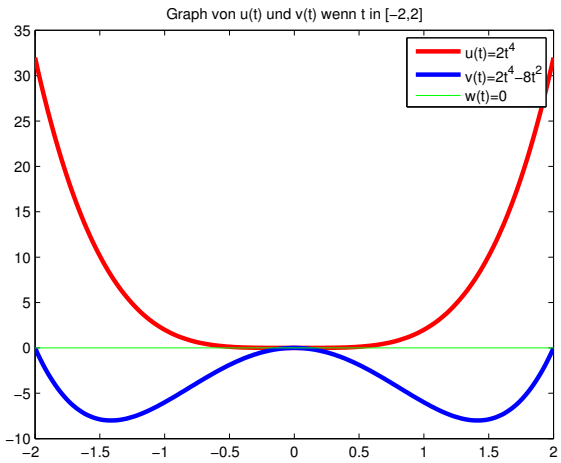
$$f(x,y) = x^4 + 2y^2(3-2xy) \geqq 0 \quad \text{für} \quad (x,y) \in (-1,1)\times(-1,1) \quad \text{und es ist} \quad f(P_1) = 0.$$

Daher ist P_1 nach Definition eine lokale Minimalstelle von f. Für P_2 und P_3 gilt

$$\mathrm{H}f(P_2) = \mathrm{H}f(P_3) = 12\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und beide Hesse-Matrizen haben negative Determinante. Es liegt also nach 4.5.8 jeweils ein Sattelpunkt vor.

(b) Die Graphen von $u(t) = g(t,t) = 2t^4$ und $v(t) = g(t,-t) = 2t^4 - 8t^2$ sind:



(c) Mit $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$ gilt:

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x + 4y \\ 4y^3 - 4y + 4x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{H}g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die Nullstellen des Gradienten. Addition beider Gleichungen liefert

$$4x^3 - 4x + 4y + 4y^3 - 4y + 4x = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4y^3 = 0 \Leftrightarrow x = -y.$$

Damit ist $P_1 = (0,0)$ eine kritische Stelle. Einsetzten von $x = -y$ in die erste Gleichung (die zweite Gleichung würde dieselben kritischen Stellen liefern) liefert (es kann wieder $x \neq 0$ angenommen werden) $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$ und es ergeben sich die übrigen kritischen Stellen $P_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ und $P_3 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Einsetzen in die Hesse-Matrix ergibt:

$$\mathrm{H}g(P_1) = 4\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \det(\mathrm{H}g(P_1)) = 0.$$

Somit kann mit Hilfe der Hesse-Matrix keine Entscheidung gefällt werden. Allerdings können wir dem Graph aus Aufgabenteil **(b)** folgendes entnehmen:

- $g(x,x) = 2x^4 > 0$ für $x \neq 0$ und $g(0,0) = 0$. Daher besitzt die Funktion g in $(0,0)$ kein Maximum.
- $g(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(2 - x^2) - 4x^2 < 0$ für $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$ und $g(0,0) = 0$. Daher besitzt die Funktion g in $(0,0)$ kein Mimimum.

Somit ist $P_1 = (0,0)$ nach Definition ein Sattelpunkt von g. Für P_2 und P_3 gilt

$$\mathrm{H}g(P_2) = \mathrm{H}g(P_3) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(\mathrm{H}g(P_2)) = \det(\mathrm{H}g(P_3)) > 0$ und $g_{xx}(P_2) = g_{xx}(P_3) > 0$ liegt nach 4.5.8 bei P_2 und P_3 jeweils ein lokales Minimum vor.

Aufgabe H 96. *Der fehlende Sattelpunkt*

Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{3y} - 3x\mathrm{e}^y + x^3.$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x,y)$ und $\mathrm{H}f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und deren Typ.

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene und die Schmiegquadrik an den Graphen von f im Punkt $(1,0)$. Bestimmen Sie außerdem die euklidische Normalform und die Gestalt der Schmiegquadrik.

(d) Ist der Punkt $(1,0)$ eine globale Minimalstelle von f?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -3\mathrm{e}^y + 3x^2 \\ 3\mathrm{e}^{3y} - 3x\mathrm{e}^y \end{pmatrix}$ und $\mathrm{H}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3\mathrm{e}^y \\ -3\mathrm{e}^y & 9\mathrm{e}^{3y} \end{pmatrix}$.

(b) Wir bestimmen die Nullstellen des Gradienten. Aus $-3\mathrm{e}^y + 3x^2 = 0$ folgt $y = \ln(x^2)$ (es kann hier $x \neq 0$ angenommen werden, da $x = 0$ keine kritische Stelle liefert). Dies in $3\mathrm{e}^{3y} - 3x\mathrm{e}^y = 0$ eingesetzt liefert (es ist wieder $x \neq 0$)

$$3x^6 - 3x^3 = 0 \Leftrightarrow x^6 = x^3 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Und damit ist $(1,0)$ die einzige kritische Stelle. Es ist

$$\mathrm{H}(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

und es ist $\det(\mathrm{H}(f)(1,0)) > 0$, sowie $f_{xx}(1,0) > 0$ und es liegt nach 4.5.8 ein lokales Minimum vor.

(c) Die Tangentialebene an den Graph von f im Punkt $(1,0)$ ist durch die Gleichung

$$z = T_1(f,(x,y),(1,0)) = f(1,0) + (x-1,y) \bullet \nabla f(1,0) = -1$$

gegeben. Die Schmiegquadrik an den Graph von f im Punkt $(1,0)$ ist durch die Gleichung $z = T_2(f,(x,y),(1,0))$ gegeben (Spezialfall 4.4.15). Es ist

$$T_2(f,(x,y),(1,0)) = -1 + 3(x-1)^2 + \frac{9}{2}y^2 - 6(x-1)y$$

und damit ist die Schmiegquadrik im Punkt $(1,0)$ gegeben durch

$$3(x-1)^2 + \frac{9}{2}y^2 - 6(x-1)y - z - 1 = 0.$$

Wir setzen $u_1 = x-1$, $u_2 = y$, $u_3 = -z-1$ und erhalten in u-Koordinaten die Gleichung der Quadrik

$$0 = (u_1,u_2,u_3) \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + u_3.$$

Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ als die Nullstellen von $\lambda(\lambda^2 - 15\lambda + 45)$ und erhalten $\lambda_1 = \frac{3}{2}(5+\sqrt{5})$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}(5-\sqrt{5})$ und $\lambda_3 = 0$. Mit der Notation $a := \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ und $b := \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ ergibt sich die orthogonale Transformationsmatrix

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{a} & \frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Substitution $u = Fv$ erhalten wir $\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + v_3 = 0$. Multiplikation mit 2 liefert die euklidische Normalform

$$\lambda_1 v_1^2 + 2\lambda_2 v_2^2 + 2v_3 = 0.$$

Es handelt sich um ein elliptisches Paraboloid.

(d) Nein. Die Funktion ist nach unten unbeschränkt. Für die Folge $x_n = (-n,0)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $f(x_n) = 1 + 3n - n^3 \to -\infty$ für $n \to \infty$. Die Angabe einer Stelle (z.B. $f(-5,0) = 1 + 15 - 125 = -109 < f(1,0) = -1$) genügt auch!

Aufgabe H 97. *Lagrange-Multiplikatoren*

Seien M der maximale und m der minimale Wert der Funktion $f(x,y,z) = xyz$ auf der Menge $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 3\right\}$. Bestimmen Sie m und M.

Lösungshinweise hierzu: Wir suchen Extrema der Funktion $f(x,y,z) = xyz$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. Wir berechnen

$$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)^\top \quad \text{und} \quad \nabla g(x,y,z) = 2(x,y,z)^\top.$$

Kandidaten für Extremalstellen ergeben sich als Lösungen von

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 3 && \text{(Nebenbedingung)} && (1)\\ yz &= 2\lambda x && \text{(Multiplikator in der } x\text{-Komponente)} && (2)\\ xz &= 2\lambda y && \text{(Multiplikator in der } y\text{-Komponente)} && (3)\\ xy &= 2\lambda z && \text{(Multiplikator in der } z\text{-Komponente)} && (4) \end{aligned}$$

Im Fall $\lambda = 0$ müssen wegen Gleichung (2), (3) und (4) entweder x, y oder x, z oder y, z gleich 0 sein. Damit ergeben sich die Lösungen des Gleichungssystems $P_{1,2} = (\pm\sqrt{3}, 0, 0)$, $P_{3,4} = (0, \pm\sqrt{3}, 0)$ und $P_{5,6} = (0, 0, \pm\sqrt{3})$ und es gilt $f(P_i) = 0$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$.
Im Fall $\lambda \neq 0$ multiplizieren wir Gleichung (2) mit x, Gleichung (3) mit y und Gleichung (4) mit z und erhalten

$$xyz = 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 = 2\lambda z^2.$$

Daher (es ist $\lambda \neq 0$) muss $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ gelten. Die kritischen Stellen mit zugehörigem Funktionswert sind:

$f(x,y,z) = 1$, wenn $(x,y,z) \in \{(1,1,1), (-1,-1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1)\}$.

$f(x,y,z) = -1$, wenn $(x,y,z) \in \{(-1,-1,-1), (1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1)\}$.

Somit ist $M = 1$ und $m = -1$.

Aufgabe H 98. *Abstand zweier Punkte*

Die Mengen M_1 und M_2 sind gegeben durch

$$M_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \tfrac{9}{4}(y-1)^2 = 9\right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}\right\}.$$

(a) Skizzieren Sie M_1 und M_2.

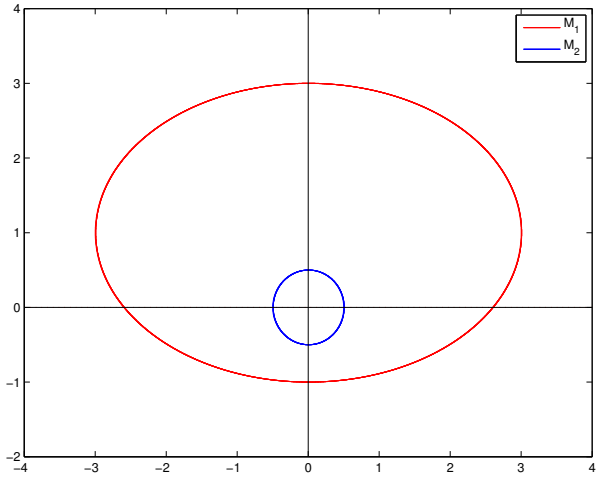
(b) Sei $P_1 = (x_1, y_1) \in M_1$. Sei $P_2 = (x_2, y_2) \in M_2$. Stellen Sie das nach Lagrange zur Minimierung des Quadrates des Abstandes zwischen P_1 und P_2 benötigte Gleichungssystem auf.

(c) Ist bei $(P_1, P_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) = (3, 1, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ das Gleichungssystem aus **(b)** lösbar? Ist bei $(P_1, P_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) = (3, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ das Gleichungssystem aus **(b)** lösbar? Ist bei $(P_1, P_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 3, 0, \frac{1}{2})$ das Gleichungssystem aus **(b)** lösbar?

(d) Finden Sie ein Paar (P_1, P_2), welches nicht in **(c)** aufgeführt ist und für welches das Gleichungssystem aus **(b)** lösbar ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Skizze:



(b) Für einen Punkt $P_1 = (x_1, y_1) \in M_1$ und $P_2 = (x_2, y_2) \in M_2$ ist die Funktion

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

zu minimieren, wobei die Nebenbedingungen gegeben sind als Nullstellen der Funktionen

$$g_1(x_1, y_1) = x_1^2 + \frac{9}{4}(y_1 - 1)^2 - 9 \quad \text{und} \quad g_2(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 - \frac{1}{4}.$$

Damit ergeben sich die Lagrange-Bedingungen

$$\begin{aligned}
2(x_1 - x_2) + 2\lambda x_1 &= 0\,, && (5)\\
-2(x_1 - x_2) + 2\mu x_2 &= 0\,, && (6)\\
2(y_1 - y_2) + \frac{9}{2}(y_1 - 1)\lambda &= 0\,, && (7)\\
-2(y_1 - y_2) + 2\mu y_2 &= 0\,, && (8)\\
x_1^2 + \frac{9}{4}(y_1 - 1)^2 - 9 &= 0\,, && (9)\\
x_2^2 + y_2^2 - \frac{1}{4} &= 0\,. && (10)
\end{aligned}$$

(c) Es gilt im jeweiligen Fall:

- $(P_1, P_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) = (3, 1, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$: beide Punkte liegen auf den Nebenbedingungen (Gleichung (9) und (10) sind erfüllt). Gleichung (7) ist jedoch nicht erfüllt. Es gilt
$$2(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}) \neq 0$$
und das Gleichungssystem ist nicht lösbar.
- $(P_1, P_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) = (3, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$: hier gilt sogar, dass $P_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ nicht auf M_2 liegt. Es ist $g_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \neq 0$!
- $(P_1, P_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 3, 0, \frac{1}{2})$: Wegen $x_1 = x_2 = 0$ sind Gleichung (5) und (6) stets erfüllt. Weiterhin gilt $g_1(0, 3) = 0$ und $g_2(0, \frac{1}{2}) = 0$, sodass beide Nebenbedingungen erfüllt sind. Gleichung (7) ist mit $\lambda = -\frac{5}{9}$ erfüllt und Gleichung (8) mit $\mu = 5$. Somit ist das Gleichungssytem lösbar.

(d) Das Paar $(P_1, P_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, -1, 0, -\frac{1}{2})$ erfüllt mit $\lambda = -\frac{1}{9}$ und $\mu = 1$ alle Gleichungen.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 99. *Tangente und Tangentialebene*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x^2y^2 - x$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen $\Gamma(f)$ im Punkt $P = (2, 1, f(2,1))$.

(b) Bestimmen Sie die Niveaumenge der Tangentialebene aus **(a)** zum Niveau 2.

(c) Berechnen Sie die Tangente im Punkt $(2,1)$ an die Niveaulinie von f zum Niveau 2 mittels 4.9.4. Vergleichen Sie mit dem Resultat aus **(b)**.

(d) Fertigen Sie eine Skizze der Niveaulinie und der Tangente aus **(c)** an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen $\Gamma(f)$ im Punkt $P = (2, 1, f(2,1))$ ist nach **4.4.14**

$$\begin{aligned} z &= T_1(f,(2,1),f(2,1)) = f(2,1) + (x-2, y-1) \bullet \nabla f(2,1) \\ &= 2 + (x-2, y-1) \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = 3x + 8y - 12. \end{aligned}$$

(b) Die Niveaumenge der Tangentialebene aus **(a)** zum Niveau 2 ist nach **4.1.3**

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x + 8y - 12 = 2\right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x + 8y - 14 = 0\right\}.$$

(c) Mit $f(2,1) = 2$ ist die Tangente im Punkt $(2,1)$ an die Niveaulinie von f zum Niveau 2 mittels **4.9.4** gegeben durch

$$\nabla f(2,1) \bullet (x-2, y-1)^\intercal = 0, \quad \text{bzw.} \quad 3x + 8y - 14 = 0.$$

Dies ist das gleiche Ergebnis wie in **(b)**.

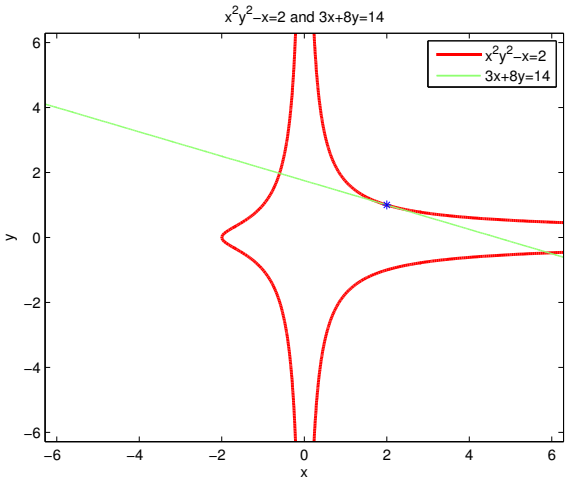
(d) Die Niveaulinie von f zum Niveau 2 ist

$$L := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2y^2 - x = 2\right\}.$$

Da $x = 0$ keine Lösung der Gleichung $x^2y^2 - x = 2$ ist, kann L geschrieben werden als

$$L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (0,y)^\intercal \,\middle|\, y = \pm\frac{\sqrt{x+2}}{x}\right\}.$$

Eine Skizze der Niveaulinie und der Tangente aus **(c)** ist:



Aufgabe H 100. *Kettenregel*

Gegeben sei die Funktion $f_{a,b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto (ax^2+by^2)xy$ für Parameter $a,\, b \in \mathbb{R}$. Für jedes $\vartheta \in \mathbb{R}$ sei die folgende Funktion gegeben:

$$R_\vartheta\colon \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\vartheta) \\ r\sin(\varphi+\vartheta) \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie alle Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $\nabla f_{a,b}(1,1) = (4,4)^\intercal$.

(b) Berechnen Sie $\nabla(f_{3,2} \circ R_\vartheta)$ auf zwei Arten: einmal mit Kettenregel, einmal ohne.

(c) Sei $\tilde{\vartheta} \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine Funktion $u_{\tilde{\vartheta}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $u_{\tilde{\vartheta}} \circ R_\vartheta = R_{\vartheta+\tilde{\vartheta}}$.
Berechnen Sie $\mathrm{J}(u_{\tilde{\vartheta}} \circ R_\vartheta)$ auf zwei Arten.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Gradient von $f_{a,b}$ ist

$$\nabla f_{a,b}(x,y) = (3ax^2y + by^3, ax^3 + 3bxy^2)^\intercal.$$

Also gilt

$$\nabla f_{a,b}(1,1) = (3a+b, a+3b)^\intercal \overset{!}{=} (4,4)^\intercal \quad \Longleftrightarrow \quad a = b = 1.$$

(b) Im Folgenden bezeichnet $c := \cos(y+\vartheta)$ und $s := \sin(y+\vartheta)$.

- **Mit Kettenregel:** Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} &(\nabla(f_{3,2} \circ R_\vartheta)(x,y))^\intercal = (\nabla f_{3,2}(R_\vartheta(x,y)))^\intercal \; \mathrm{J}R_\vartheta(x,y) \\ = \;& (9x^3c^2s + 2x^3s^3, 3x^3c^3 + 6x^3cs^2) \begin{pmatrix} c & -xs \\ s & xc \end{pmatrix} \\ = \;& \begin{pmatrix} 12x^3c^3s + 8x^3cs^3 \\ -3x^4c^2s^2 - 2x^4s^4 + 3x^4c^4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- **Ohne Kettenregel:** Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$(f_{3,2} \circ R_\vartheta)(x,y) = 3x^4\cos^3(y+\vartheta)\sin(y+\vartheta) + 2x^4\cos(y+\vartheta)\sin^3(y+\vartheta).$$

Also ist

$$\nabla(f_{3,2} \circ R_\vartheta)(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^3c^3s + 8x^3cs^3 \\ -3x^4c^2s^2 - 2x^4s^4 + 3x^4c^4 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir wählen die Funktion

$$u_{\tilde{\vartheta}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\vartheta}) & -\sin(\tilde{\vartheta}) \\ \sin(\tilde{\vartheta}) & \cos(\tilde{\vartheta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} (u_{\tilde{\vartheta}} \circ R_\vartheta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= u_{\tilde{\vartheta}} \begin{pmatrix} x\cos(y+\vartheta) \\ x\sin(y+\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\vartheta}) & -\sin(\tilde{\vartheta}) \\ \sin(\tilde{\vartheta}) & \cos(\tilde{\vartheta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\cos(y+\vartheta) \\ x\sin(y+\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(y+\vartheta)\cos(\tilde{\vartheta}) - x\sin(y+\vartheta)\sin(\tilde{\vartheta}) \\ x\cos(y+\vartheta)\sin(\tilde{\vartheta}) + x\sin(y+\vartheta)\cos(\tilde{\vartheta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(y+\vartheta+\tilde{\vartheta}) \\ x\sin(y+\vartheta+\tilde{\vartheta}) \end{pmatrix} \\ &=: R_{\vartheta+\tilde{\vartheta}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jetzt berechnen wir $\mathrm{J}(u_{\tilde{\vartheta}} \circ R_\vartheta)$. Im Folgenden bezeichnet $c := \cos(y+\vartheta)$ und $s := \sin(y+\vartheta)$.

- **Mit Kettenregel:** Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ haben wir

$$\mathrm{J}(u_{\tilde{\vartheta}} \circ R_\vartheta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{J}u_{\tilde{\vartheta}} \left(R_\vartheta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mathrm{J}R_\vartheta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Da $u_{\tilde{\vartheta}}$ eine lineare Abbildung ist, gilt

$$\mathrm{J}u_{\tilde{\vartheta}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\vartheta}) & -\sin(\tilde{\vartheta}) \\ \sin(\tilde{\vartheta}) & \cos(\tilde{\vartheta}) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(u_{\tilde{\vartheta}} \circ R_\vartheta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\vartheta}) & -\sin(\tilde{\vartheta}) \\ \sin(\tilde{\vartheta}) & \cos(\tilde{\vartheta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -xs \\ s & xc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\vartheta})c - \sin(\tilde{\vartheta})s & -x\cos(\tilde{\vartheta})s - x\sin(\tilde{\vartheta})c \\ \sin(\tilde{\vartheta})c + \cos(\tilde{\vartheta})s & -x\sin(\tilde{\vartheta})s + x\cos(\tilde{\vartheta})c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(y+\vartheta+\tilde{\vartheta}) & -x\sin(y+\vartheta+\tilde{\vartheta}) \\ \sin(y+\vartheta+\tilde{\vartheta}) & x\cos(y+\vartheta+\tilde{\vartheta}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- **Ohne Kettenregel:** Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\mathrm{J}(u_{\tilde{\vartheta}} \circ R_\vartheta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{J}R_{\vartheta+\tilde{\vartheta}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(y+\vartheta+\tilde{\vartheta}) & -x\sin(y+\vartheta+\tilde{\vartheta}) \\ \sin(y+\vartheta+\tilde{\vartheta}) & x\cos(y+\vartheta+\tilde{\vartheta}) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 101. *Potential*

Überprüfen Sie, ob f ein Gradientenfeld ist.
Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential von f.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 4\sinh(x)\sinh(y) \\ \mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{-x+y} + \mathrm{e}^{-x-y} + 1 \end{pmatrix}$

(b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{5}\arctan(\frac{y}{\sqrt{5}}) - \sqrt{3}\arctan(\frac{y}{\sqrt{3}}) \\ \dfrac{2xy^2}{y^4+8y^2+15} - 5y \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $f\colon \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)^\intercal\} \to \mathbb{R}^4\colon (x,y,z,w)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ w \\ w \end{pmatrix}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir vereinfachen zuerst $f_2(x,y)$, indem wir $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ verwenden. Es gilt

$$\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{-x+y} + \mathrm{e}^{-x-y} = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}) = 4\cosh(x)\cosh(y)$$

und damit ist $f_2(x,y) = 4\cosh(x)\cosh(y) + 1$. Somit gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 4\sinh(x)\cosh(y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist f nach 5.1.5 ein Gradientenfeld. Wir berechnen das Potential. Es ist

$$\int 4\sinh(x)\sinh(y)\,\mathrm{d}\,x = 4\cosh(x)\sinh(y) + c(y) =: g_1(x,y).$$

Diesen Ausdruck leiten wir nach y ab

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = 4\cosh(x)\cosh(y) + \frac{\partial c(y)}{\partial y}$$

und setzen mit $f_2(x,y) = 4\cosh(x)\cosh(y) + 1$ gleich. Somit ergibt sich $c(y) = y$ und wir erhalten als Potential von f gerade $U(x,y) = 4\cosh(x)\sinh(y) + y$.

(b) Es gilt $\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial f_3}{\partial x}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial f_3}{\partial y}$. Weiterhin gilt $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{2y^2}{y^4+8y^2+15}$ und wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial y} &= \sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+\frac{y^2}{5}} - \sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+\frac{y^2}{3}} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{5}} - \frac{1}{1+\frac{y^2}{3}} = \frac{\frac{y^2}{3}-\frac{y^2}{5}}{(1+\frac{y^2}{5})(1+\frac{y^2}{3})} \\ &= \frac{\frac{1}{15}2y^2}{\frac{1}{15}(y^4+8y^2+15)} = \frac{2y^2}{y^4+8y^2+15} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.\end{aligned}$$

Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist f nach 5.1.5 ein Gradientenfeld. Wir berechnen das Potential. Es ist

$$\int f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x = xf_1(x,y,z) + c(y,z) =: g_1(x,y,z).$$

Diesen Ausdruck leiten wir nach y ab

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{2xy^2}{y^4+8y^2+15} + \frac{\partial c(y,z)}{\partial y}$$

und setzen mit $f_2(x,y,z) = \frac{2xy^2}{y^4+8y^2+15} - 5y$ gleich. Es folgt

$$c(y,z) = \int -5y\,\mathrm{d}\,y = -\frac{5}{2}y^2 + c(z) =: g_2(y,z).$$

Ableiten nach z und gleichsetzten mit $f_3(x,y,z) = 0$ ergibt $c(z) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Die Menge aller Potentiale ist somit

$$U(x,y,z) = xf_1(x,y,z) - \frac{5}{2}y^2 + k = x(\sqrt{5}\arctan(\frac{y}{\sqrt{5}}) - \sqrt{3}\arctan(\frac{y}{\sqrt{3}})) - \frac{5}{2}y^2 + k$$

mit $k \in \mathbb{R}$ (eigentlich ist nur nach einem Potential gefragt, d.h. die Angabe von U für ein festes $k \in \mathbb{R}$ genügt!).

(c) Es ist $\frac{\partial f_3}{\partial w} = 1 \neq 0 = \frac{\partial f_4}{\partial z}$. Daher kann es nach 5.1.5 kein Potential geben und f ist kein Gradientenfeld.

Aufgabe H 102. *Potential*

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon (x,y,z)^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} 4x^3\ln(y) \\ \alpha^4x^4y^{-1} + \alpha\beta z\mathrm{e}^{-2y} \\ \mathrm{e}^{-2y} \end{pmatrix}$$

mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Paare (α, β) besitzt das Vektorfeld $f_{\alpha,\beta}$ ein Potential?

(b) Bestimmen Sie für die Paare (α, β) aus **(a)** jeweils alle Potentiale von $f_{\alpha,\beta}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Jacobimatrix lautet

$$Jf = \begin{pmatrix} 12x^2\ln(y) & \dfrac{4x^3}{y} & 0 \\ \alpha^4\dfrac{4x^3}{y} & -\alpha^4\dfrac{x^4}{y^2} - 2\alpha\beta z e^{-2y} & \alpha\beta e^{-2y} \\ 0 & -2e^{-2y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Potential liegt genau dann vor, wenn diese Matrix symmetrisch ist (es würde auch ausreichen die Integrabilitätsbedingung nachzuprüfen). Also wenn $\alpha = \pm 1$ und $\beta = -2\alpha$ ist. Daher besitzt das Vektofeld $f_{\alpha,\beta}$ für die Paare $(\alpha, \beta) \in \{(1, -2), (-1, 2)\}$ ein Potential.

(b) Wir definieren die Komponenten von $f_{1,-2} = f_{-1,2}$ als

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &:= 4x^3\ln(y) \\ f_2(x, y, z) &:= \frac{x^4}{y} - 2ze^{-2y} \\ f_3(x, y, z) &:= e^{-2y} \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\int f_1 \,\mathrm{d}\, x = x^4\ln(y) + c(y, z) =: g_1(x, y, z).$$

Diesen Ausdruck leiten wir nach y ab

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{x^4}{y} + \frac{\partial c(y, z)}{\partial y}$$

und setzen mit f_2 gleich. Es folgt

$$c(y, z) = \int -2ze^{-2y} \,\mathrm{d}\, y = ze^{-2y} + c(z) =: g_2(y, z).$$

Nun wird nach z abgeleitet

$$\frac{\partial g_2}{\partial z} = e^{-2y} + \frac{\partial c(z)}{\partial z}$$

und mit f_3 gleichgesetzt. Wir erhalten $c(z) = k$, $k \in \mathbb{R}$.
Die Menge aller Potentiale ist somit

$$U(x, y, z) = x^4\ln(y) + ze^{-2y} + k$$

mit $k \in \mathbb{R}$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 103. *Parametrisierung von Kurven, Kurvenintegral*

Sei $f_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (u,v,w)^\intercal \mapsto (vw, -uw, 1+\alpha u)^\intercal$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f_α.
Für welche α besitzt f_α ein Potential?

(b) Sei $S := \left\{(u,v,w)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, w = 4-u^2-v^2,\ u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ w \geqq 0\right\}$.
Geben Sie eine reguläre Parametrisierung C_1 von $K_1 := \left\{(u,v,w)^\intercal \in S \,\middle|\, u = 0\right\}$ mit Anfangspunkt $(0,2,0)^\intercal$ an.
Geben Sie eine reguläre Parametrisierung C_2 von $K_2 := \left\{(u,v,w)^\intercal \in S \,\middle|\, v = 0\right\}$ mit Anfangspunkt $(0,0,4)^\intercal$ an.
Geben Sie eine reguläre Parametrisierung C_3 von $K_3 := \left\{(u,v,w)^\intercal \in S \,\middle|\, w = 0\right\}$ mit Anfangspunkt $(2,0,0)^\intercal$ an.
Skizzieren Sie K_1, K_2 und K_3 in ein Koordinatensystem.

(c) Entstehe K durch Aneinanderfügen von K_1, K_2 und K_3 unter Beibehaltung des Durchlaufungssinns. Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_K f_0(x)\bullet \mathrm{d}x$ und $\int_K f_1(x)\bullet \mathrm{d}x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Jacobi-Matrix ist

$$\mathrm{J}f_\alpha(u,v,w) = \begin{pmatrix} 0 & w & v \\ -w & 0 & -u \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Divergenz ist $\mathrm{div} f_\alpha(u,v,w) = 0$.
Die Rotation ist

$$\mathrm{rot} f_\alpha(u,v,w) = \begin{pmatrix} u \\ v-\alpha \\ -2w \end{pmatrix}.$$

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{rot} f_\alpha(u,v,w) \neq (0,0,0)^\intercal$. Daher besitzt f_α für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Potential.

(b) Es ist $K_1 = \left\{(0,v,w)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, w = 4-v^2, v \geqq 0, w \geqq 0\right\}$. Eine reguläre Parametrisierung C_1 von K_1 mit Anfangspunkt $(0,2,0)^\intercal$ ist

$$C_1 : [0,2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2-t \\ 4-(2-t)^2 \end{pmatrix}.$$

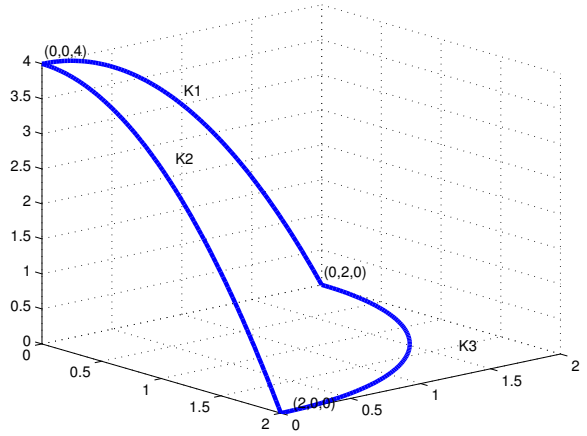
Weiter ist $K_2 = \left\{(u,0,w)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, w = 4-u^2, u \geqq 0, w \geqq 0\right\}$ und eine reguläre Parametrisierung C_2 von K_2 mit Anfangspunkt $(0,0,4)^\intercal$ ist

$$C_2 : [0,2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 4-t^2 \end{pmatrix}.$$

Zuletzt ist $K_3 = \left\{(u,v,0)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, u^2+v^2 = 4, u \geqq 0, v \geqq 0\right\}$ und eine reguläre Parametrisierung C_3 von K_3 mit Anfangspunkt $(2,0,0)^\intercal$ ist

$$C_3 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skizze von K_1, K_2 und K_3:



(c) Wir berechnen das Kurvenintegral von f_α mittels **5.3.3**. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_K f_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_{K_1} f_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}x + \int_{K_2} f_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}x + \int_{K_3} f_\alpha(x) \bullet \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 f_\alpha(C_1'(t)) \bullet C_1'(t)\mathrm{d}t + \int_0^2 f_\alpha(C_2'(t)) \bullet C_2'(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} f_\alpha(C_3'(t)) \bullet C_3'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 \begin{pmatrix} (2-t)(4-(2-t)^2) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2(2-t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -t(4-t^2) \\ 1+\alpha t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2t \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+2\alpha\cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 (4-2t)\,\mathrm{d}t + \int_0^2 (-2t - 2\alpha t^2)\,\mathrm{d}t + 0 = 4 + (-4 - \frac{16}{3}\alpha) = -\frac{16}{3}\alpha.
\end{aligned}$$

Somit ist $\int_K f_0(x) \bullet \mathrm{d}x = 0$ und $\int_K f_1(x) \bullet \mathrm{d}x = -\frac{16}{3}$.

Aufgabe H 104. *Parametrisierung von Kurven, Kurvenintegral*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (u,v,w)^\intercal \mapsto (2w-1, 0, 2v)^\intercal$. Sei $S_1 := \{(u,v,w)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid w = u^2+v^2\}$.
Sei $S_2 := \{(u,v,w)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid 4u^2+4v^2-4u-4v+1 = 0\}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot}\operatorname{rot} f$. Hat f ein Potential?

(b) Geben Sie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung von $K := \{(u,v,w)^\intercal \in S_2 \mid w = 0\}$ an; vgl. 5.1.3. Berechnen Sie $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}x$.

(c) Geben Sie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung von $L := S_1 \cap S_2$ an. Berechnen Sie $\int_L f(x) \bullet \mathrm{d}x$.

(d) Geben Sie eine reguläre Parametrisierung $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ an, mittels derer die Kurve L zweimal durchlaufen wird. Bestimmen Sie $\int_0^1 f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}t$. Wie kann hierzu **(c)** verwendet werden?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Jacobi-Matrix ist

$$\mathrm{J}f(u,v,w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Rotation von f ist $\operatorname{rot} f(u,v,w) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit gilt $\operatorname{rot}\operatorname{rot} f(u,v,w) = (0,0,0)^\intercal$.

Weiterhin hat f kein Potential, da $\operatorname{rot} f \neq (0,0,0)^\intercal$ gilt.

(b) Es gilt $K = \left\{(u,v,0)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (2u-1)^2 + (2v-1)^2 = 1\right\}$ und eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung von K, vgl. **5.1.3**, ist

$$C_K : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Kurvenintegral von f längs K ist

$$\begin{aligned} \int_K f(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} f(C_K(t)) \bullet C_K'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+\sin(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(t)\,\mathrm{d}t = 0. \end{aligned}$$

(c) Eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung von L, vgl. **5.1.3**, ist

$$C_L : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(t) \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(t)\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Das Kurvenintegral von f längs L ist

$$\begin{aligned} \int_L f(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} f(C_L(t)) \bullet C_L'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \cos(t) + \sin(t) \\ 0 \\ 1+\sin(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = -\pi. \end{aligned}$$

(d) Eine reguläre Parametrisierung $C : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, mittels derer die Kurve L zweimal durchlaufen wird, ist

$$C : [0,1] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi t) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(4\pi t) \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi t)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(4\pi t)\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt mit **5.3.3**

$$\int_0^1 f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_L f(x) \bullet \mathrm{d}x = -2\pi.$$

Aufgabe H 105. *Wendelfläche, Potential, einfacher Zusammenhang*
Gegeben sei das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\} \to \mathbb{R}^2\colon \binom{x_1}{x_2} \mapsto \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\binom{-x_2}{x_1}$. Sei

$$p\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\tbinom{0}{0}\} \to \mathbb{R}\colon \tbinom{x_1}{x_2} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 < 0, \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \frac{\pi}{2} & \text{für } x_1 > 0, \\ \pi & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 > 0, \\ \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \frac{3\pi}{2} & \text{für } x_1 < 0. \end{cases}$$

Wir betrachten den Kreis $K := \{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 4\}$, sowie den Rand R des Dreiecks mit den Eckpunkten $\binom{-3}{0}$, $\binom{-1}{-1}$ und $\binom{-2}{-2}$.

(a) Berechnen Sie $\oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$. Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$. Besitzt das Feld g ein Potential?

(b) Ist p stetig? Ist p ein Potential zum Feld g ?

(c) Ist die Einschränkung $\hat{p}\colon \{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto p(x)$ stetig? Ist $\hat{p}$ ein Potential zur Einschränkung $\hat{g}\colon \{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0\} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto g(x)$ des Feldes?

(d) Bestimmen Sie $\oint_R g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir parametrisieren den Einheitskreis K durch $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$ und erhalten

$$\oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} \mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\,t = 2\pi.$$

Es gilt $\operatorname{rot} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}\right) = \frac{-x_1^2+x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} - \frac{-x_1^2+x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = 0$ für alle x im Definitionsbereich. Gäbe es ein Potential, so müsste das eben berechnete Kurvenintegral über die geschlossene Kurve K aber gleich 0 sein: also gibt es *kein* Potential. [Das ist kein Widerspruch zu Satz 5.2.4, weil der Definitionsbereich hier nicht einfach zusammenhängend ist!]

(b) Die Funktion p ist unstetig an jeder Stelle $\binom{0}{y}$ mit $y < 0$: Die durch $a_n := y\begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n})\\ \sin(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n})\end{pmatrix}$ bzw. $b_n := y\begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})\\ \sin(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})\end{pmatrix}$ definierten Folgen konvergieren beide gegen $\binom{0}{y}$. Weil a_n stets in der linken und b_n stets in der rechten Halbebene liegt, gilt einerseits $\lim\limits_{n\to\infty} p(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan(\tan(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n})) + \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi$, andererseits $\lim\limits_{n\to\infty} p(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan(\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})) + \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan(-\tan(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n})) + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$. Also sind die Grenzwerte der Folgen der Funktionswerte verschieden!

Da für Potentialfunktionen die Stetigkeit (und die partielle Differenzierbarkeit) verlangt wird, kann p kein Potential sein, wir brauchen den Gradienten nicht auszurechnen.

(c) Die Einschränkung $\hat{p}$ ist stetig [als Verkettung einer gebrochen rationalen Funktion mit der stetigen Umkehrfunktion $\arctan$]. Wir berechnen die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_1}\hat{p}\binom{x_1}{x_2} = \frac{1}{1+(x_1^{-1}x_2)^2}(-x_1^{-2}x_2) = \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} \cdot \frac{-x_2}{x_1^2} = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}(-x_2)$. Analog erhält man $\frac{\partial}{\partial x_2}\hat{p}\binom{x_1}{x_2} = \frac{1}{1+(x_1^{-1}x_2)^2}(x_1^{-1}) = \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\,x_1$. Diese partiellen Ableitungen sind stetig (auf dem hier betrachteten Gebiet $H := \{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0\}$), wir haben also $\hat{p} \in \mathcal{C}^1(H)$, und den Gradienten haben wir gerade berechnet als $\operatorname{grad}\hat{p}(x) = g(x) = \hat{g}(x)$. Also ist $\hat{p}$ ein Potential zu $\hat{g}$.

(d) Da die Kurve R ganz im Gebiet H liegt und die Einschränkung $\hat{g}$ von g auf dieses Gebiet ein Potential besitzt, ergibt sich $\oint_R g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = 0$ ohne weitere Rechnung. (Die Berechnung über Parametrisierungen der Kurve R dürfte wesentlich aufwendiger werden.)

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 106. *Kurvenintegrale*

(a) Sei $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (u,v,w)^\intercal \mapsto uvw$.
Sei K parametrisiert durch $C\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 3t)^\intercal$.
Berechnen Sie das Kurvenintegral von h längs K.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v + 2uv \\ u^2 - 2uv \end{pmatrix}$. Sei K der Rand des von den Kurven $\left\{(u,v)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, v = u^2\right\}$ und $\left\{(u,v)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u = v^2\right\}$ umschlossenen Bereichs.
Skizzieren Sie K. Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs K.

(c) Sei $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v^2 + w^2 \\ w^2 + u^2 \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$. Sei K parametrisiert durch $C(t) = (t, t^2, t^3)^\intercal$ von $(0,0,0)^\intercal$ nach $(1,1,1)^\intercal$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von p längs K.

(d) Sei $K := \left\{(u,v)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, v = u^2/2,\ 0 \leqq u \leqq 1\right\}$.
Skizzieren Sie K. Berechnen Sie die Länge von K.

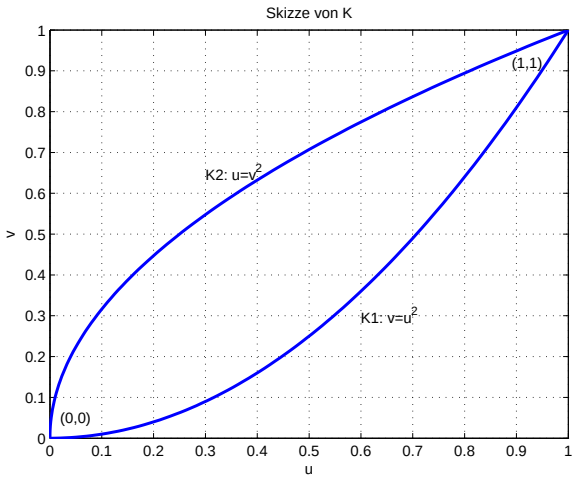
Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $C'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 3 \end{pmatrix}$. Damit ist das Kurvenintegral von h längs K

$$\begin{aligned}
\int_K h(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{4\pi} h(C(t))|C'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{4\pi} 3t\cos(t)\sin(t)\sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 3^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3\sqrt{10}}{2}\int_0^{4\pi} t\sin(2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3\sqrt{10}}{2}\left[-\frac{t}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{4\pi} \\
&= -3\pi\sqrt{10}.
\end{aligned}$$

(b) Da man nicht die ganze Kurve K auf einmal regulär und doppelpunktfrei parametrisieren kann, setzt man K zusammen aus Kurvenstücken K_1 und K_2 so, dass für K_1 und K_2 die regulären Parametrisierungen C_1 und C_2 vorliegen und dass der Endpunkt $(1,1)$ von K_1 mit dem Anfangspunkt von K_2 übereinstimmt. In diesem Fall sind mögliche Parametrisierungen C_1 und C_2:

$$C_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$



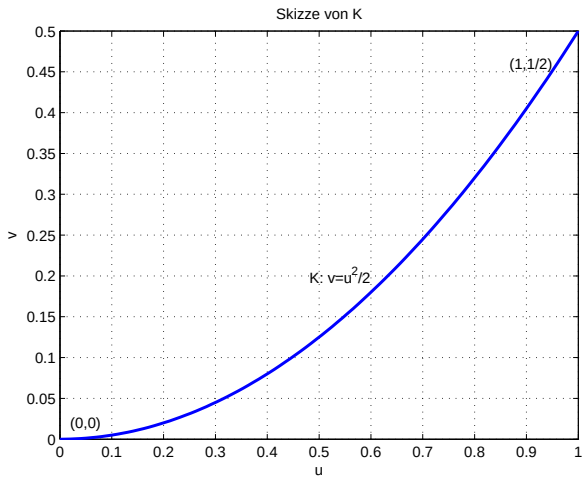
Also werden $C_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ und $C_2'(t) = \begin{pmatrix} -2(1-t) \\ -1 \end{pmatrix}$. Das Kurvenintegral von f längs K ist:

$$\begin{aligned}
\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_{K_1} f(x) \bullet \mathrm{d}x + \int_{K_2} f(x) \bullet \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(C_1(t)) \bullet C_1'(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 f(C_2(t)) \bullet C_2'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + 2t^3 \\ t^2 - 2t^3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}\ \mathrm{d}t + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 - t + 2(1-t)^3 \\ (1-t)^4 - 2(1-t)^3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2(1-t) \\ -1 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^2 + 4t^3 - 4t^4\ \mathrm{d}t + \int_0^1 -2(1-t)^2 + 2(1-t)^3 - 5(1-t)^4\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{8}{15} - \frac{7}{6} = -\frac{19}{30}.
\end{aligned}$$

(c) Das Kurvenintegral von p längs K ist:

$$\begin{aligned}
\int_K p(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_0^1 p(C(t)) \bullet C'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^4 + t^6 \\ t^2 + t^6 \\ t^2 + t^4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 2t^7 + 4t^6 + 4t^4 + 2t^3\ \mathrm{d}t = \frac{297}{140}.
\end{aligned}$$

(d) Eine Parametrisierung von K ist: $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2/2 \end{pmatrix}$. Daher ist $C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.



Mittels **5.4.2** ist die Länge von K:

$$L(K) = \int_K 1 \,\mathrm{d}s = \int_0^1 |C'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1^2 + t^2} \,\mathrm{d}t.$$

Wir substituieren mit $t(\vartheta) := \sinh(\vartheta)$, und also mit $\mathrm{d}t = \cosh(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} L(K) &= \int_0^{\operatorname{arsinh}(1)} \sqrt{1+\sinh(\vartheta)^2}\cosh(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\operatorname{arsinh}(1)} \cosh(\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \int_0^{\operatorname{arsinh}(1)} \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\vartheta} + 2 + \mathrm{e}^{-2\vartheta})\,\mathrm{d}\vartheta = \left[\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2\vartheta} + \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2\vartheta}\right]_0^{\operatorname{arsinh}(1)} \\ &\overset{\text{H 85(b)}}{=} \left[\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2\vartheta} + \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2\vartheta}\right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Aufgabe H 107. *Feldlinien*

(a) Berechnen Sie die Feldlinie von $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix}$, die durch $(0,-1)^\intercal$ verläuft. Skizzieren Sie g und drei seiner Feldlinien.

(b) Berechnen Sie die Feldlinie von $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}$, die durch $(0,-1)^\intercal$ verläuft. Skizzieren Sie g und drei seiner Feldlinien.

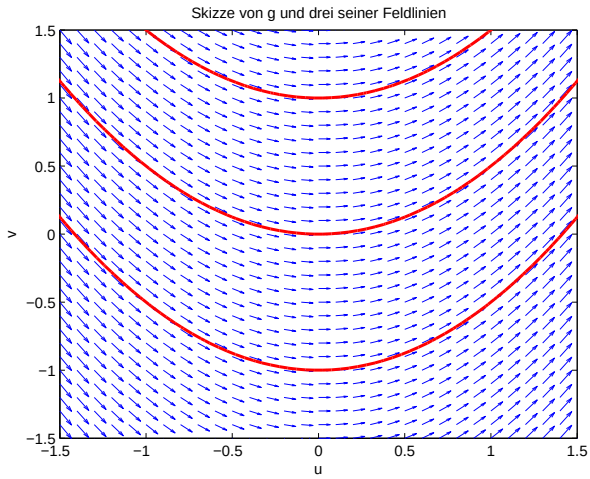
Lösungshinweise hierzu: Es sei $C\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ eine reguläre Parametrisierung einer Feldlinie von g.

(a) Mittels **5.5.2** erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = u \quad \text{bzw.} \quad v(u) = \frac{u^2}{2} + c.$$

Die Feldlinie durch $(0,-1)^\intercal$ erfüllt also

$$v = \frac{u^2}{2} - 1.$$

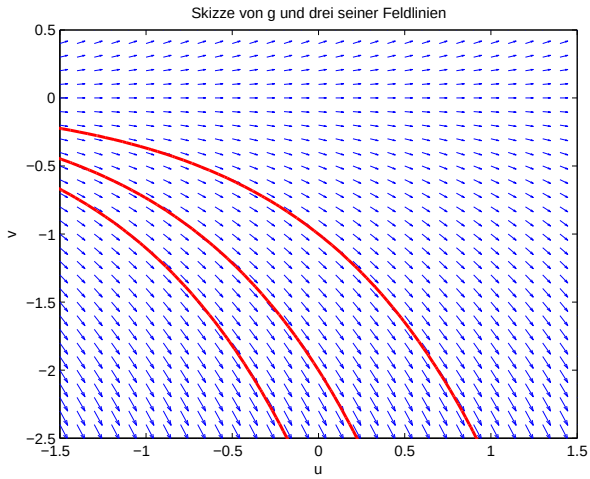


(b) Mittels **5.5.2** erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = v \quad \text{bzw.} \quad v(u) = C\mathrm{e}^u \,.$$

Die Feldlinie durch $(0,-1)^\mathsf{T}$ erfüllt also

$$v = -\mathrm{e}^u.$$



Aufgabe H 108. *Zirkulation und Ausfluss*

Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \end{pmatrix}$ und die Kurve

$$K := \left\{ (u,v)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u^2+v^2 = u+v \right\}.$$

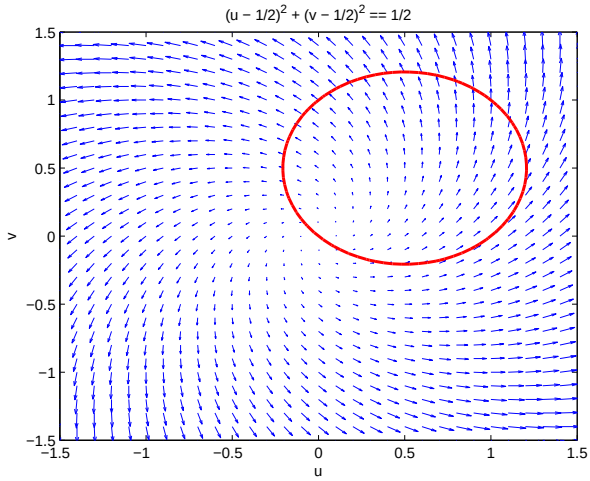
(a) Skizzieren Sie die Kurve K und das Vektorfeld f.

(b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}x$ und $\int_K |f(s)|^2 \,\mathrm{d}s$.

(c) Berechnen Sie $Z(f,K)$ und $A(f,K)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Skizze von K und f:



(b) Es gilt $K = \left\{(u,v)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(v-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\right\}$. Eine reguläre Parametrisierung von K ist $C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t) \end{pmatrix}$. Also ist $C'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \end{pmatrix}$.

Das Kurvenintegral von f längs K ist

$$\begin{aligned}
\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t) - \sin(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t) + \sin(t)) + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\sin(t)^2 - \sin(t)\cos(t) + \cos(t)^2 + \sin(t)\cos(t)) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \pi.
\end{aligned}$$

Das Kurvenintegral von $|f|^2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto (u-v)^2 + (u+v)^2 = 2(u^2+v^2)$ längs K ist

$$\begin{aligned}
\int_K |f(s)|^2\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} |f(C(t))|^2 |C'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 2\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)\right)^2\right] \sqrt{\frac{1}{2}\sin(t)^2 + \frac{1}{2}\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(t)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t) + \frac{1}{2}\sin(t)^2\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)\right)\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(c) Die Zirkulation von f längs K ist

$$Z(f,K) = \int_0^{2\pi} f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\textbf{(b)}}{=} \pi.$$

Der Ausfluss von f durch K ist

$$\begin{aligned}
A(f,K) &= \int_0^{2\pi} f(C(t)) \bullet \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t) - \sin(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t) + \sin(t)) + 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(t)^2 - \sin(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t) + \sin(t)^2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe H 109. *Zirkulation und Ausfluss*

Sei $f_{a,b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} au^2v + v^2 + 1 \\ 2u^3 + buv + 2 \end{pmatrix}$ für Parameter $a, b \in \mathbb{R}$.

Seien $F_1 := (-1, 0)^\intercal$ und $F_2 := (3, 0)^\intercal$. Sei $K := \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 6 \right\}$.

(a) Finden Sie ein Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $f_{a,b}$ ein Gradientenfeld ist.

(b) Bestimmen Sie $\int_L f_{a,b}(x) \bullet \mathrm{d}x$ für eine Kurve L von F_1 nach F_2 mit (a, b) aus **(a)**.

(c) Parametrisieren und skizzieren Sie K.

(d) Berechnen Sie für $f_{a,b}$ mit (a, b) aus **(a)** die Zirkulation längs und den Ausfluss durch K.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, sollte noch überall $\operatorname{rot} f_{a,b} = 0$ gelten.

Es ist $\operatorname{rot} f_{a,b} = \frac{\partial (f_{a,b})_2}{\partial u} - \frac{\partial (f_{a,b})_1}{\partial v} = (6u^2 + bv) - (au^2 + 2v) \overset{!}{=} 0$ für alle $u, v \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir $a = 6$, $b = 2$.

(b) Eine Parametrisierung von L ist: $C_L\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} -1 + 4t \\ 0 \end{pmatrix}$. Also ist das Kurvenintegral von $f_{6,2}$ längs L

$$\int_L f_{6,2}(x) \bullet \mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 f_{6,2}(C_L(t)) \bullet C_L'(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2(-1 + 4t)^3 + 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 4.$$

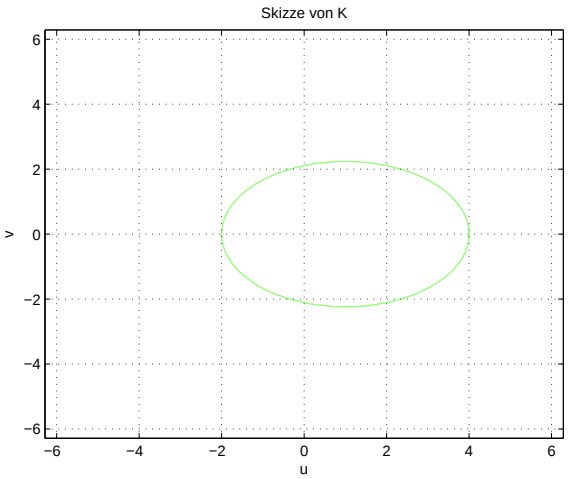
Bemerkung: Wir hätten auch das Potential $U(u, v) = 2u^3v + uv^2 + u + 2v$ verwenden können und $\int_L f_{6,2}(x) \bullet \mathrm{d}x = U(3, 0) - U(-1, 0) = 4$ rechnen können.

(c) Es gilt $K = \left\{ (u, v)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{(u+1)^2 + v^2} + \sqrt{(u-3)^2 + v^2} = 6 \right\}$. Also haben wir

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(u+1)^2 + v^2} = 6 - \sqrt{(u-3)^2 + v^2} \\
\Longrightarrow \quad & (u+1)^2 + v^2 = 36 - 12\sqrt{(u-3)^2 + v^2} + (u-3)^2 + v^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & 3\sqrt{(u-3)^2 + v^2} = 11 - 2u \\
\Longrightarrow \quad & 9(u^2 - 6u + 9 + v^2) = 121 - 44u + 4u^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & 5u^2 - 10u + 9v^2 = 40 \\
\Longleftrightarrow \quad & 5(u-1)^2 + 9v^2 = 45 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{(u-1)^2}{9} + \frac{v^2}{5} = 1.
\end{aligned}$$

Damit ist eine Parametrisierung von K:

$$C_K\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 3\cos(t) \\ \sqrt{5}\sin(t) \end{pmatrix}.$$



(d) Die Zirkulation von $f_{6,2}$ längs K ist $Z(f_{6,2}, K) = \int_K f_{6,2}(x) \bullet \mathrm{d}x = 0$, da $f_{6,2}$ eine Potentialfunktion besitzt und K geschlossenen ist. Der Ausfluss von $f_{6,2}$ durch K ist:

$$\begin{aligned}
A(f_{6,2}, K) &= \int_0^{2\pi} f_{6,2}(C_K(t)) \bullet \begin{pmatrix} C'_{K,2}(t) \\ -C'_{K,1}(t) \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 6\sqrt{5}(1+3\cos(t))^2 \sin(t) + 5\sin(t)^2 + 1 \\ 2(1+3\cos(t))^3 + 2\sqrt{5}(1+3\cos(t))\sin(t) + 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \sqrt{5}\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (30(1+3\cos(t))^2 \cos(t)\sin(t) + 5\sqrt{5}\sin(t)^2\cos(t) + \sqrt{5}\cos(t) \\
&\qquad + 6(1+3\cos(t))^3 \sin(t) + 6\sqrt{5}(1+3\cos(t))\sin(t)^2 + 6\sin(t)) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 6\sqrt{5}\sin(t)^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 3\sqrt{5}(1-\cos(2t)) \, \mathrm{d}t = 6\pi\sqrt{5}.
\end{aligned}$$