Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 40. *Folgen und Häufungspunkte*

Bestimmen Sie $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$, falls existent. Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(a) $a_n = \dfrac{4}{n+3}\cdot(-1)^n$

(b) $a_n = \left(-1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

(c) $a_n = n^{((-1)^{n+1})}$

(d) $a_n = \dfrac{n}{3n+(-1)^n\cdot(n+1)}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = |a_n| = \frac{4}{n+3}$ und $c_n = -|a_n| = -\frac{4}{n+3}$ konvergieren gegen 0 für $n\to\infty$. Nach dem Sandwichsatz (1.5.6) folgt wegen $c_n \leqq a_n \leqq b_n$, dass auch a_n gegen 0 konvergiert. Nach Satz 1.6.10 gilt $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist, gilt $a_1 < a_3 < a_5 < \ldots < 0$ und $a_2 > a_4 > a_6 > \ldots > 0$, und daher $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_2 = \frac{4}{5}$ und $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_1 = -1$.

(b) Es ist $a_n = (-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Die Folge $(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend (Satz 1.2.8) und konvergiert gegen e (Definition 1.2.9). Die Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind daher $\pm\mathrm{e}$, also $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e}$. Aus der Monotonie folgt $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \mathrm{e}$ und $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\mathrm{e}$. Die Folge konvergiert nicht, da sie zwei Häufungspunkte besitzt.

(c) Es gilt

$$a_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Die Häufungspunkte sind 0 und $+\infty$, also $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Man sieht leicht, dass $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ nicht existiert und $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$ ist. Die Folge konvergiert nicht, da sie zwei Häufungspunkte besitzt.

(d) Es gilt

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{4n+1} = \frac{1}{4+\frac{1}{n}} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{2-\frac{1}{n}}$ ist monoton fallend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$, die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{1}{4+\frac{1}{n}}$ ist monoton wachsend und konvergiert gegen $\frac{1}{4}$. Also besitzt a_n zwei Häufungspunkte $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$, d.h. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$. Aus der Monotonie folgt $a_1 > a_3 > a_5 > \ldots > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \ldots > a_6 > a_4 > a_2$, also $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_1 = 1$ und $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_2 = \frac{2}{9}$ ist. Die Folge konvergiert nicht, da sie zwei Häufungspunkte besitzt.

Aufgabe H 41. *Partialsummen und Bolzano-Weierstraß*

Gegeben sei die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \dfrac{1}{2^k+1}$. Sei $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ für $n \geqq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $S_n \leqq 2 - 2^{-n}$ ist für $n \geqq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(S_n)_{n \geqq 0}$ der Partialsummen monoton wachsend und beschränkt ist.

(c) Konvergiert die Reihe? Begründen Sie die Antwort mit einem Satz der Vorlesung.

(d) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \leqq 2$ ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $a_k = \frac{1}{2^k+1} \leqq \frac{1}{2^k}$, also gilt für $n \geqq 0$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \leqq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2^{-n}$$

(b) $(S_n)_{n \geqq 0}$ ist monoton wachsend, denn es gilt $a_{n+1} \geqq 0$ und daher

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqq S_n \text{ für } n \geqq 0.$$

$(S_n)_{n \geqq 0}$ ist beschränkt, denn für $n \geqq 0$ gilt $0 \leqq S_n \leqq 2 - 2^{-n} \leqq 2$.

(c) Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß (1.6.5) konvergiert die Folge $(S_n)_{n \geqq 0}$, denn die Folge ist eine Folge in $\mathbb{R}$ und ist monoton und beschränkt. Genau das haben wir in Teil (b) gezeigt. Damit konvergiert die Reihe, denn: Dass diese Reihe konvergiert, bedeutet per definitionem genau, dass die Folge der Partialsummen konvergiert.

(d) Nach Teil (a) gilt $S_n \leqq 2 - 2^{-n}$ für alle $n \geqq 0$. Wegen Lemma 1.5.5 folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} S_n \leqq \lim_{n \to \infty} (2 - 2^{-n}) = 2.$$

Aufgabe H 42. *Geometrische Reihe und Teleskopreihe*

Konvergiert die Reihe? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4k^2 - 1}$ **(b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ **(c)** $\sum\limits_{k=6}^{\infty} \frac{(-4)^{3k}}{5^{k-1}}$

(d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (2 - u_k)$, wobei $u_0 := 1$ und $u_{k+1} := \frac{1}{2}u_k + 1$ für $k \geqq 0$.

Hinweis zu (a): Umschreiben in $\frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.

Hinweis zu (d): Es ist $2 - u_k$ von der Form q^k mit $q \in \mathbb{R}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Hierzu macht man den Ansatz

$$\begin{aligned} & \frac{4}{4k^2 - 1} = \frac{A}{2k - 1} + \frac{B}{2k + 1} \\ \Rightarrow \quad & 4 = A(2k + 1) + B(2k - 1) \\ \Rightarrow \quad & 0k + 4 = 2(A + B)k + (A - B). \end{aligned}$$

Deshalb

$$A + B = 0 \text{ und } A - B = 4 \Rightarrow A = 2 \text{ und } B = -2.$$

Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{4k^2-1}$. Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4k^2-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{2k-1} - \frac{2}{2k+1} \right)$.
Wir erhalten

$$S_n = \underbrace{\left(\frac{2}{1} - \frac{2}{3}\right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right)}_{k=3} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{2}{2n-3} - \frac{2}{2n-1}\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}\right)}_{k=n}$$

Deshalb

$$S_n = 2 - \frac{2}{2n+1}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{2}{2n+1}\right) = 2.$$

Insbesondere konvergiert die Reihe.

(b) $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$. Die n-te Partialsumme ist

$$S_n = \underbrace{(\ln(2) - \ln(1))}_{k=1} + \underbrace{(\ln(3) - \ln(2))}_{k=2} + \cdots + \underbrace{(\ln(n) - \ln(n-1))}_{k=n-1} + \underbrace{(\ln(n+1) - \ln(n))}_{k=n-1}.$$

Somit ist $S_n = -\ln(1) + \ln(n+1) = \ln(n+1)$. Deshalb

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

d.h. die Reihe konvergiert nicht.

(c) Sei $a_k := \frac{(-4)^{3k}}{5^{k-1}}$ für $k \in \mathbb{N}$. Es ist $a_k = \frac{((-4)^3)^k}{5^k \cdot 5^{-1}} = 5 \cdot \left(-\frac{64}{5}\right)^k$. Wir haben

$$\sum_{k=6}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{5} a_k = 5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{64}{5}\right)^k - 5 \cdot \sum_{k=0}^{5} \left(-\frac{64}{5}\right)^k$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{64}{5}\right)^k$ ist eine geometrische Reihe mit $q = -\frac{64}{5}$. Nach 1.8.4 haben wir

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $q = -\frac{64}{5}$ gilt $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \infty$ nach 1.5.8. Daraus folgt $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{64}{5}\right)^k = \infty$ und daher $\sum_{k=6}^{\infty} \frac{(-4)^{3k}}{5^{k-1}} = 5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{64}{5}\right)^k - 5 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{64}{5}} - \frac{\left(\frac{64}{5}\right)^6}{1-\frac{64}{5}} \right) = \infty$, die Reihe konvergiert nicht.

(d) Sei $b_k := 2 - u_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Es ist

$$b_{k+1} = 2 - u_{k+1} = 2 - \left(\frac{1}{2}u_k + 1\right) = 1 - \frac{1}{2}u_k = \frac{1}{2}(2 - u_k) = \frac{1}{2} \cdot b_k.$$

Wir haben

$$\begin{array}{rcl} b_0 &=& 2-u_0 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ b_1 &=& \frac{1}{2}\cdot b_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ b_2 &=& \frac{1}{2}\cdot b_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\vdots& \\ b_n &=& \frac{1}{2}\cdot b_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{array} .$$

Also ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ eine geometrische Reihe mit $q = \dfrac{1}{2}$. Nach 1.8.4 haben wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

und die Reihe konvergiert.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0 bis 2 Punkte.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 43. *Majorantenkriterium*

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(x+y) \geqq \sqrt{xy}$ gilt für $x, y \in \mathbb{R}_0^+$.

(b) Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $u_n, v_n \in \mathbb{R}_0^+$ für $n \in \mathbb{N}$.

Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ konvergente Reihen.

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}$ eine konvergente Reihe ist, welche

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n} \leqq \frac{1}{2}\big((\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n) + (\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n)\big)$ erfüllt.

(c) Berechnen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

(d) Zeigen Sie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n((n+1)(n+2))^{1/2}} \leqq \frac{7}{8}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)
$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(x+y) \geqq \sqrt{xy} \quad &\Leftrightarrow \quad (x+y) \geqq 2\sqrt{xy}\\
&\Leftrightarrow \quad (x+y)^2 \geqq (2\sqrt{xy})^2\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+2xy+y^2 \geqq 4xy\\
&\Leftrightarrow \quad x^2-2xy+y^2 \geqq 0\\
&\Leftrightarrow \quad (x-y)^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

(b) Nach (a) ist: $\sqrt{u_n v_n} \leqq \frac{1}{2}(u_n+v_n)$. Nach 1.9.3 und dem Majorantenkriterium 1.9.10 folgt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n} \leqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{2}(u_n+v_n)\big) = \frac{1}{2}\big((\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n) + (\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n)\big)$: Die Summe von zwei konvergenten Reihe ist ebenfalls konvergent, daher wird die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}$ durch eine konvergente Reihe majorisiert, und deshalb ist sie auch konvergent.

(c) Hierzu macht man den Ansatz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}\\
\Rightarrow \qquad 1 &= A(n+1) + Bn\\
\Rightarrow \qquad 0n+1 &= (A+B)n + A.
\end{aligned}$$

Deshalb

$$A = 1 \text{ und } B = -1.$$

Sei $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$. Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Wir erhalten

$$S_N = \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)}_{n=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{n=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{n=3} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)}_{n=N-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)}_{n=N}$$

Deshalb
$$S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$$
und
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$
Ähnlich ist
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) = \frac{3}{4}.$$

(d) Nach (b) und (c) ist
$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{n(n+2)}\right)^{1/2}}_{\frac{1}{n((n+1)(n+2))^{1/2}}} \leqq \frac{7}{8}.$$

Aufgabe H 44. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Sei $a \in \mathbb{R}^+$ ein Parameter. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz in Abhängigkeit von a.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\frac{2}{n}}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{e^{3n} + e^{-3n}}$ **(e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3+(-1)^n)^n}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$ **(h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)\right|$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $u_n := \dfrac{n!}{a^n}$. Nach 1.5.9 ist es $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Daraus folgt nach Lemma 1.9.1, dass die Reihe divergiert.

(b) Sei $u_n := n^{-1+\frac{2}{n}}$. Es ist $u_n \geqq \dfrac{1}{n}$, weil $n^{\frac{2}{n}} \geqq 1$. Da die harmonische Reihe divergiert, muss die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergieren.

(c) Sei $u_n := \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$. Es ist
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{a^n \cdot a}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)(1+a^{n+1})}}{\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}} = \frac{a}{1+a^{n+1}}.$$
Daraus folgt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} a, & 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2}, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases} .$$
Darum ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$, und nach 1.9.13 konvergiert die Reihe.

(d) Es ist $\frac{e^{2n}}{e^{3n}+e^{-3n}} < \frac{e^{2n}}{e^{3n}} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ konvergiert, weil $\frac{1}{e} < 1$. Nach 1.9.10 konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{e^{3n}+e^{-3n}}$ ebenfalls.

(e) Sei $u_n := \frac{2^n}{(3+(-1)^n)^n}$. Es ist $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Daraus folgt nach Lemma 1.9.1, dass die Reihe divergiert.

(f) Sei $u_n := \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^n$. Es ist $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|\sin(n)|}{n}$ und $0 < \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| < \frac{1}{n}$. Darum

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = 0 < 1.$$

Nach 1.9.16 konvergiert die Reihe.

(g) Sei $u_n = (-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$. Die Folge $|u_n|$ ist monoton mit

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0.$$

Daraus folgt nach Lemma 1.9.5, dass die Reihe konvergiert.

(h) Wie wir in (g) gesehen haben ist $\left|(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$. Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{(1+\frac{1}{n^2})}+1\right)} > \frac{1}{n\left(\sqrt{1+1}+1\right)}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, muss die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right|$ divergieren.

Aufgabe H 45. *Stetigkeit*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq -1 \\ 2|x| & \text{für } -1 < x < 2 \\ 4 & \text{für } x \geqq 2 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(b) Sei eine Fehlerschranke $1 > \varepsilon > 0$ gegeben.
Finden Sie in Abhängigkeit von ε ein $\delta_1 > 0$ mit $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ für $x \in [2, 2+\delta_1)$ und ein $\delta_2 > 0$ mit $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ für $x \in (2-\delta_2, 2]$.
Sei $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Zeigen Sie $f(U_\delta(2)) \subseteqq U_\varepsilon(f(2))$.
Ist f an der Stelle 2 stetig?

(c) Finden Sie ein $\varepsilon > 0$, für welches kein $\delta > 0$ existiert mit $f(U_\delta(-1)) \subseteqq U_\varepsilon(f(-1))$.
Ist f an der Stelle -1 stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a)

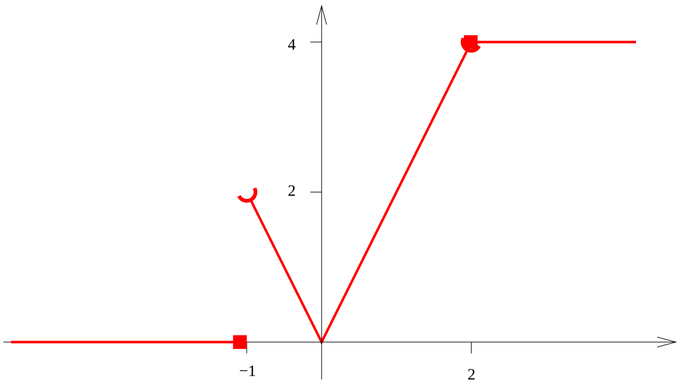


Abbildung 1: Die Funktion f

(b)

- Sei $x \geqq 2$. Dann haben wir: $f(x) = 4$ und $|f(x) - f(2)| = |4 - 4| = 0$, das für alle $\varepsilon > 0$ kleiner als ε ist. Deshalb kann man für δ_1 irgendetwas wählen, z.B. $\delta_1 = 2017\varepsilon$.
- Sei $x \in (0, 2]$. Dann haben wir: $f(x) = 2|x| = 2x$ und
$$|f(x) - f(2)| = |2x - 4| = 4 - 2x.$$
Sei $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Beachten Sie, dass $(2 - \delta_2, 2] \subsetneqq (0, 2]$ (weil $\varepsilon < 1 \Rightarrow 2 - \frac{\varepsilon}{2} > 1$). Wenn $x \in (2 - \delta_2, 2]$ ist, haben wir also: $|f(x) - f(2)| = |2x - 4| = 4 - 2x$. Schliesslich:
$$x \in (2-\delta_2, 2] \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2-x < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 4-2x < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon.$$
- Sei $x \in U_\delta(2)$.
Für $x \geqq 2$ folgt aus $|x - 2| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \leqq \delta_1$, dass $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ d.h. $f(x) \in U_\varepsilon(f(2))$ gilt.
Für $x \leqq 2$ folgt aus $|x - 2| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \leqq \delta_2$ ebenfalls, dass $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ d.h. $f(x) \in U_\varepsilon(f(2))$ gilt.
Daraus folgt $f(U_\delta(2)) \subseteqq U_\varepsilon(f(2))$.
- Um die Stetigkeit zu beweisen muss die $\varepsilon - \delta-$Beschreibung für alle $\varepsilon > 0$ überprüft werden. Soweit haben wir es nur für $1 > \varepsilon > 0$ getan. Sei dann $\varepsilon \geqq 1$. Man wählt $\varepsilon' \in (0, 1)$, wir haben gezeigt, dass es ein $\delta_{\varepsilon'}$ existiert so dass $|x - 2| < \delta_{\varepsilon'} \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon'$.
Sei $\delta_\varepsilon := \delta_{\varepsilon'}$, dann $|x - 2| < \delta_\varepsilon = \delta_{\varepsilon'} \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon' < \varepsilon$.
Deswegen gilt die $\varepsilon - \delta-$Beschreibung für alle $\varepsilon > 0$ und f ist an der Stelle 2 stetig.

(c) Sei $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$. Es existiert $0 < \delta' < \frac{1}{2}$ so dass $U_{\delta'}(-1) \subseteqq U_\delta(-1)$. Für alle $x \in (-1, -1 + \delta') \subseteqq (-1, -\frac{1}{2})$ gilt dann $f(x) = -2x$ und $|f(x) - f(-1)| = |-2x - 0| = -2x$.
Aber $x < -1 + \delta' \Rightarrow -x > 1 - \delta' > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow -2x > 1$, das heisst $|f(x) - f(-1)| > \varepsilon$. Wir haben gezeigt, dass $f(U_{\delta'}(-1)) \nsubseteqq U_\varepsilon(f(-1))$ ist. Daraus folgt $f(U_\delta(-1)) \nsubseteqq U_\varepsilon(f(-1))$ (weil $U_{\delta'}(-1) \subseteqq U_\delta(-1)$). So gilt die $\varepsilon - \delta-$Beschreibung an der Stelle -1 für $\varepsilon = 1$ nicht. Darum ist f an der Stelle -1 nicht stetig.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 46. *Funktionsgrenzwerte*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.
Die erst später einzuführende Regel von l'Hospital darf nicht verwendet werden.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5-17x+3x^4+1}{8x^3-3x^2+4x^5-\sqrt{x}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x+\tan(4x)}{3x}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^5-17x+3x^4+1}{8x^3-3x^2+4x^5-\sqrt{x}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\left(7-\frac{17}{x^4}+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(\frac{8}{x^2}-\frac{3}{x^3}+4-\frac{1}{\sqrt{x^9}}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{7-\frac{17}{x^4}+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^5}}{\frac{8}{x^2}-\frac{3}{x^3}+4-\frac{1}{\sqrt{x^9}}}\\ &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2-5)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}\\ &= \lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5})\\ &= 6\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\ &= 1\end{aligned}$$

(d) Es ist
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$
und
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(4x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\cdot\frac{\tan(4x)}{4x}\overset{u=4x}{=}\lim_{u\to 0}\frac{4}{3}\cdot\frac{\tan(u)}{u}\overset{1.12.5}{=}\frac{4}{3}.$$
Daraus folgt
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\tan(4x)}{3x}\overset{1.12.1}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan(4x)}{3x}=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2.$$

Aufgabe H 47. *Stetigkeit*
Wir betrachten die Funktion
$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto f(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x=0\\ x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} & \text{für } x\neq 0.\end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Zeigen Sie dass $\frac{1}{x}\leqq\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\leqq 1+\frac{1}{x}$ für $x>0$.
Berechnen Sie $\lim_{x\to 0+0} f(x)$ mittels eines Sandwich-Arguments.

(c) Ist f eine gerade oder ungerade Funktion?
Leiten Sie davon die Werte von $\lim_{x\to 0-0} f(x)$ ab.

(d) Ist f an der Stelle 0 stetig?

Lösungshinweise hierzu:

(a)

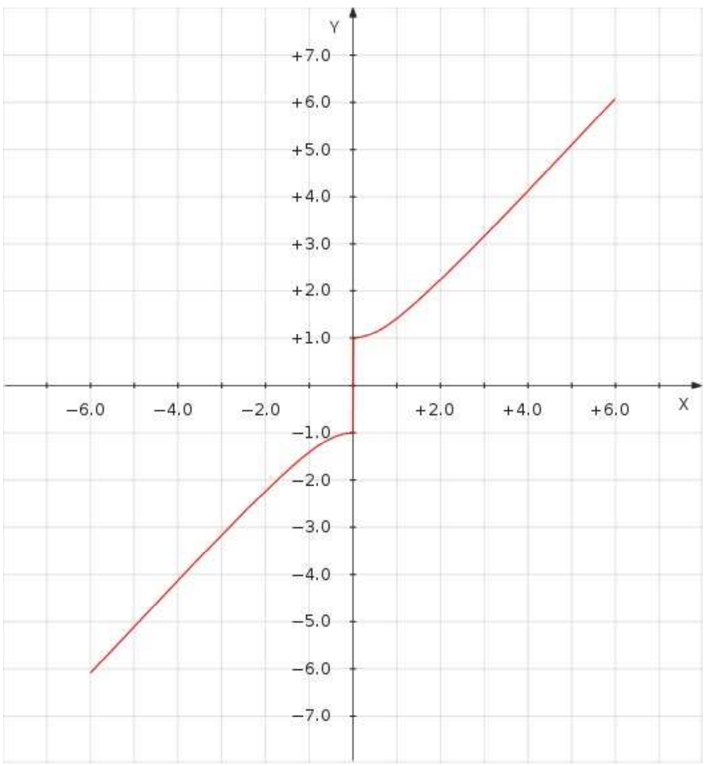


Abbildung 2: Die Funktion f

(b) Es ist $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \geqq \sqrt{\frac{1}{x^2}} \overset{x\geq 0}{=} \frac{1}{x}$. Zudem

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \leqq 1+\frac{1}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}\right)^2 \leqq \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 1+\frac{1}{x^2} \leqq 1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x} \geqq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \geqq 0
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein Sandwich (vgl. 1.5.9) wegen $x > 0$:

$$1 \leqq x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \leqq x+1$$

Nun gilt $\lim\limits_{x\to 0+0} 1 = \lim\limits_{x\to 0+0}(x+1) = 1$, und wir schließen $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1$.

(c) Für $x \neq 0$ ist $f(-x) = -x\sqrt{1+\frac{1}{(-x)^2}} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -f(x)$, und $f(0) = 0$. Daraus folgt, dass f eine ungerade Function ist. Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-0} f(x) \quad &\overset{f \text{ ungerade}}{=} \quad \lim_{x\to 0-0}(-f(-x)) \\
&= \quad -\lim_{x\to 0-0} f(-x) \\
&\overset{u=-x}{=} \quad -\lim_{u\to 0+0} f(u) \\
&\overset{(b)}{=} \quad -1
\end{aligned}$$

(d) Nein, wegen $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$.

Aufgabe H 48. *Intervallhalbierungsmethode*

Sei $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = x^3 - 20$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(b) Zeigen Sie, dass f im Intervall $[1,4]$ genau eine Nullstelle ξ hat.

(c) Wenden Sie die Intervallhalbierungsmethode auf die Funktion $f(x)$ mit dem Startintervall $[1,4]$ an, um a, $b \in [1,4]$ zu finden mit $a < \xi < b$ und mit $b - a < 0{,}2$.
Hinweis: Funktionswerte sind mit einem Taschenrechner zu berechnen.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

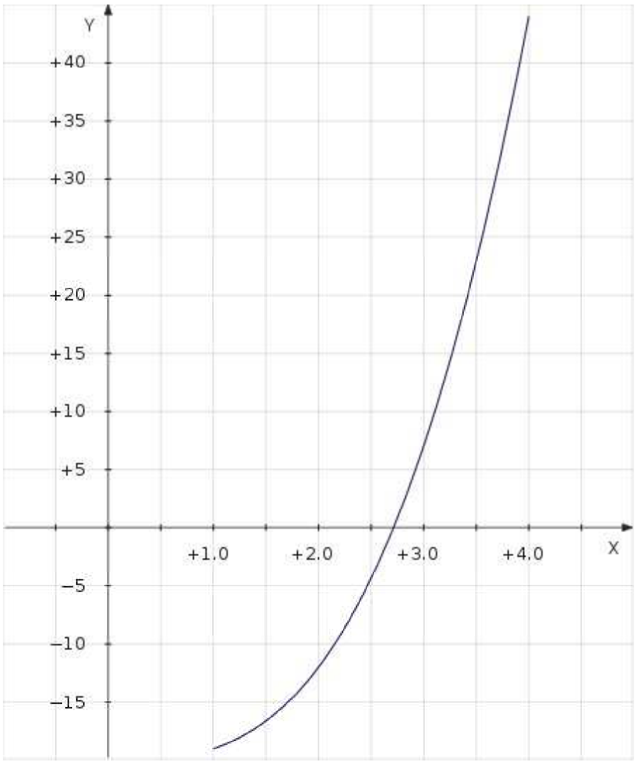


Abbildung 3: Die Funktion f

(b) Es ist $f(1) = -19 < 0$ und $f(4) = 44 > 0$. Nach 1.13.5 hat f im Intervall $(1,4)$ eine Nullstelle ξ. Da f monoton ist, gib es genau eine Nullstelle.

(c) Schritt 1: Sei $c_1 := \frac{1+4}{2} = 2{,}5$. Es ist $f(c_1) = -4{,}375 < 0$. Wir setzen $a_1 := 2{,}5$ und $b_1 := 4$.
Schritt 2: Sei $c_2 := \frac{2{,}5+4}{2} = 3{,}25$. Es ist $f(c_2) \approx 14{,}328 > 0$. Wir setzen $a_2 := 2{,}5$ und $b_2 := 3{,}25$.
Schritt 3: Sei $c_3 := \frac{2{,}5+3{,}25}{2} = 2{,}875$. Es ist $f(c_3) \approx 3{,}764 > 0$. Wir setzen $a_3 := 2{,}5$ und $b_3 := 2{,}875$.
Schritt 4: Sei $c_4 := \frac{2{,}5+2{,}875}{2} = 2{,}6875$. Es ist $f(c_4) \approx -0{,}589 < 0$. Wir setzen $a_4 := 2{,}6875$ und $b_4 := 2{,}875$.

Schritt 4 ist der letzte Schritt, weil $b_4 - a_4 < 0{,}2$. Wir setzen also $a := a_4$ und $b := b_4$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 49. *Konvergenz von Potenzreihen*

Schreiben Sie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ geeignet.

Bestimmen Sie in den Fällen **(c)** und **(d)** die Häufungspunkte von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ und damit $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt und den Konvergenzradius von $f(z)$.

Bestimmen Sie in den Fällen **(b)** und **(c)**, für welche Werte von $z \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe $f(z)$ absolut konvergent, konvergent bzw. divergent ist. Betrachten Sie hierbei insbesondere die beiden reellen Punkte auf dem Rand des Konvergenzkreises.

(a) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z\mathrm{i}-3)^n}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$

(b) $f(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-z)^n}{\sqrt{n}}$

(c) $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\pi^k z^{2k+1}}{2k+2}$

(d) $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\left(1+\mathrm{i}^k\right)^k}{k+1}(1+z)^k$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z\mathrm{i}-3)^n}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1}(z+3\mathrm{i})^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

mit $a_n = \dfrac{\mathrm{i}^n}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$ und dem Entwicklungspunkt $z_0 = -3\mathrm{i}$.

Wir berechnen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\mathrm{i}^{n+1}\cdot(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1}{(2n+3)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1\cdot \mathrm{i}^n}\right| = \left|\frac{\mathrm{i}}{2n+3}\right| = \frac{1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Damit ist der Konvergenzradius $\rho = +\infty$.

(b) Es ist $f(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-z)^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} z^n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ und dem Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

Wir berechnen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot(-1)^n}\right| = \left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right| = \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Damit ist der Konvergenzradius $\rho = 1$.

Die reellen Randpunkte des Konvergengenzkreises sind die $z \in \mathbb{R}$ so dass $|z-z_0| = \rho$, das heißt $|z-0| = 1$, somit sind die reelle Randpunkte -1 und 1.

Dann machen wir folgende Fallunterscheidung:

$|z| < 1$**:** In diesem Fall liegt z im Konvergenzkreis und die Reihe $f(z)$ konvergiert absolut.

$|z| > 1$**:** In diesem Fall divergiert die Reihe $f(z)$.

$z = -1$**:** z liegt auf dem Rand des Konvergenzkreises und die Reihe muss gesondert betrachtet werden:

$$f(-1) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{((-1)\cdot(-1))^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Wegen $\sqrt{n} \leqq n$ für $n \geqq 2$ ist diese Reihe minorisiert durch die harmonische Reihe, die divergent ist. Es folgt aus dem Minoranten-Kriterium, dass $f(-1)$ divergiert.

$z = 1$**:** z liegt auf dem Rand des Konvergenzkreises und die Reihe muss gesondert betrachtet werden:

$$f(1) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Dies ist eine alternierende Reihe. Da die Folge $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert, können wie das Leibniz-Kriterium nutzen um zu schließen, dass $f(1)$ konvergiert.

Wir beobachten, dass $f(1)$ nicht absolut konvergiert, da $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert.

(c) Es ist $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k}{2k+2} z^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit $a_n = \begin{cases} 0 & \text{, für } n \text{ gerade} \\ \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n+1} & \text{, für } n \text{ ungerade} \end{cases}$ und $z_0 = 0$.

Für die Bestimmung der Häufungspunkte von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten wir die obigen Teilfolgen mit n gerade bzw. n ungerade:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad 0 & \text{, für } n \text{ gerade} \\ \frac{\pi^{\frac{n-1}{2n}}}{\sqrt[n]{n+1}} & \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \sqrt{\pi} & \text{, für } n \text{ gerade} \end{cases},$$

denn $\lim\limits_{n\to\infty} \pi^{\frac{n-1}{2n}} = \pi^{\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}} = \pi^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$. Weiter gilt $1 \leqq \sqrt[n]{n+1} \leqq \sqrt[n]{2n}$ für $n \geqq 2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} 1 &\leqq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} \\ &\leqq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right) = 1\cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. Somit sind die Häufungspunkte 0 und $\sqrt{\pi}$.

Für die Bestimmung des Konvergenzradius verwenden wir die Wurzelformel: Nach obiger Rechnung gilt $a = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{\pi}$ und somit ist der Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 0$.

Zur Betrachtung der reellen Werte $z \in \mathbb{R}$ machen wir folgenden Fallunterscheidung:

$|z| < \frac{1}{\sqrt{\pi}}$**:** In diesem Fall liegt z im Konvergenzkreis und die Reihe $f(z)$ konvergiert absolut.

$|z| > \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$**:** In diesem Fall divergiert die Reihe $f(z)$.

$z = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$**:** z liegt auf dem Rand des Konvergenzkreises und die Reihe muss gesondert betrachtet werden:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k}{2k+2} \frac{1}{(-\sqrt{\pi})^{2k+1}} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \\ &\overset{[1]}{=} -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \overset{[2]}{=} -\infty. \end{aligned}$$

Dabei wurde bei [1] die Indexverschiebung $l = k+1$ durchgeführt und bei [2] die Divergenz der harmonischen Reihe verwendet.

$|z| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$**:** z liegt wieder auf dem Rand des Konvergenzkreises und die Reihe muss gesondert betrachtet werden:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k}{2k+2} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{2k+1}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \\ &\overset{[3]}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \overset{[4]}{=} \infty. \end{aligned}$$

Dabei wurde bei [3] ebenfalls die Indexverschiebung $l = k+1$ durchgeführt und bei [4] die Divergenz der harmonischen Reihe verwendet.

(d) Es ist $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i}^k)^k}{k+1}(1+z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i}^k)^k}{k+1}(z-(-1))^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit $a_n = \dfrac{(1+\mathrm{i}^n)^n}{n+1}$ und $z_0 = -1$.

Zur Bestimmung der Häufungspunkte von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ sehen wir $\mathrm{i}^{4l} = 1$, $\mathrm{i}^{4l+1} = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^{4l+2} = -1$ und $\mathrm{i}^{4l+3} = -\mathrm{i}$ für $l \in \mathbb{N}_0$. Daher führen wir eine entsprechende Fallunterscheidung für die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ durch:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{\left|\dfrac{2^n}{n+1}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt[n]{n+1}} & \text{, für } n = 4l \text{ mit } l \in \mathbb{N}_0 \\ \sqrt[n]{\left|\dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{n+1}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} & \text{, für } n = 4l+1 \text{ mit } l \in \mathbb{N}_0 \\ \sqrt[n]{\left|\dfrac{0}{n+1}\right|} = 0 & \text{, für } n = 4l+2 \text{ mit } l \in \mathbb{N}_0 \\ \sqrt[n]{\left|\dfrac{(1-\mathrm{i})^n}{n+1}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} & \text{, für } n = 4l+3 \text{ mit } l \in \mathbb{N}_0 \end{cases}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n+1}} &= 2 && \text{, für } n = 4l \text{ mit } l \in \mathbb{N}_0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} &= \sqrt{2} && \text{, für } n \in \{4l+1, 4l+3 \mid l \in \mathbb{N}_0\} \\ \lim_{n\to\infty} 0 &= 0 && \text{, für } n = 4l+2 \text{ mit } l \in \mathbb{N}_0 \end{aligned},$$

denn wie in **(c)** gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. Somit sind die Häufungspunkte 0, $\sqrt{2}$ und 2. Für die Bestimmung des Konvergenzradius verwenden wir die Wurzelformel: Nach obiger Rechnung gilt $a = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ und somit ist der Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{2}$. Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = -1$.

Aufgabe H 50. *Formel von Euler und de Moivre*

Schreiben Sie $f(x)$ als Linearkombination von Funktionen der Form $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie sodann $f(x)$ als Linearkombinationen von Funktionen der Form $\sin(nx)$ und $\cos(mx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) $f(x) = \cos(5x)^4 \sin(3x)$ **(b)** $f(x) = \sin(3x)\cos(x) - \cos(x)^3 \sin(4x)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit Hilfe der binomischen Formeln und der Formel von Euler und de Moivre erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(5x)^4 \sin(3x) \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x}\right)\right)^4 \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{32\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}20x} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}10x} + 6 + 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}10x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}20x}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}\right) \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{32}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}23x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}17x} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}13x} - 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}7x} + 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} - 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}\right. \\
&\qquad \left. +4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}7x} - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}13x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}17x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}23x}\right)
\end{aligned}$$

sodann

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-\mathrm{i}}{32}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}23x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}23x}\right) - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}17x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}17x}\right) + 4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}13x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}13x}\right)\right. \\
&\qquad \left. -4\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}7x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}7x}\right) + 6\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}\right)\right) \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{32}\left(2\mathrm{i}\sin(23x) - 2\mathrm{i}\sin(17x) + 8\mathrm{i}\sin(13x) - 8\mathrm{i}\sin(7x) + 12\mathrm{i}\sin(3x)\right) \\
&= \frac{1}{16}\sin(23x) - \frac{1}{16}\sin(17x) + \frac{1}{4}\sin(13x) - \frac{1}{4}\sin(7x) + \frac{3}{8}\sin(3x).
\end{aligned}$$

(b) Mit Hilfe der binomischen Formeln und der Formel von Euler und de Moivre erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(3x)\cos(x) - \cos(x)^3\sin(4x) \\
&= \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right)^3\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) - \frac{1}{16\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}\right) \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}\right) - \frac{-\mathrm{i}}{16}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}7x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}\right. \\
&\qquad \left. +3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}7x}\right)
\end{aligned}$$

sodann

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-\mathrm{i}}{4}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}\right)+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}\right)\right)-\frac{-\mathrm{i}}{16}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}7x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}7x}\right)+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right.\\
&\quad \left.+3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x}\right)+3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}\right)\right)\\
&= \frac{-\mathrm{i}}{4}\left(2\mathrm{i}\sin(4x)+2\mathrm{i}\sin(2x)\right)-\frac{-\mathrm{i}}{16}\left(2\mathrm{i}\sin(7x)+2\mathrm{i}\sin(x)+6\mathrm{i}\sin(5x)+6\mathrm{i}\sin(3x)\right)\\
&= \frac{1}{2}\sin(4x)+\frac{1}{2}\sin(2x)-\frac{1}{8}\sin(7x)-\frac{1}{8}\sin(x)-\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{3}{8}\sin(3x).
\end{aligned}$$

Aufgabe H 51. *Approximation von* $(1+x)^{\alpha}$

Seien $f\colon [-1,\infty)\to\mathbb{R}\colon x\to(1+x)^{\frac{3}{2}}$ und $g\colon [-1,\infty)\to\mathbb{R}\colon x\to(1+x)^{\frac{1}{2}}$.

(a) Stellen Sie die Binomialreihe für $f(x)$ auf. Bestimmen Sie davon die Partialsumme $p_k(x)$ von Grad k für $k\in\{1,2,3,4\}$.

(b) Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$ und $p_1(x)$ und $p_2(x)$ und $p_3(x)$ auf $x\in[-1,5]$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(c) Berechnen Sie $|f(0{,}5)-p_2(0{,}5)|$ und $|f(0{,}5)-p_3(0{,}5)|$ und $|f(0{,}5)-p_4(0{,}5)|$ mittels Taschenrechner auf 4 Nachkommastellen genau.

(d) Stellen Sie die Binomialreihe für $g(x)$ auf. Bestimmen Sie davon die Partialsumme $q_4(x)$ von Grad 4.
Berechnen Sie $f(x)-(1+x)g(x)$. Berechnen Sie $p_4(x)-(1+x)q_4(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Binomialreihe für f ist $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{3}{2}}{k}x^k$. Dazu berechnen wir die ersten 5 Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{3}{2}}{0} &= 1\\
\binom{\frac{3}{2}}{1} &= \frac{3}{2}\\
\binom{\frac{3}{2}}{2} &= \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot 1} = \frac{3}{8}\\
\binom{\frac{3}{2}}{3} &= \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{1}{16}\\
\binom{\frac{3}{2}}{4} &= \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{3}{128}.
\end{aligned}$$

Somit erhält man die Partialsummen

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= 1+\frac{3}{2}x\\
p_2(x) &= 1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2\\
p_3(x) &= 1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3\\
p_4(x) &= 1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{128}x^4
\end{aligned}$$

(b)

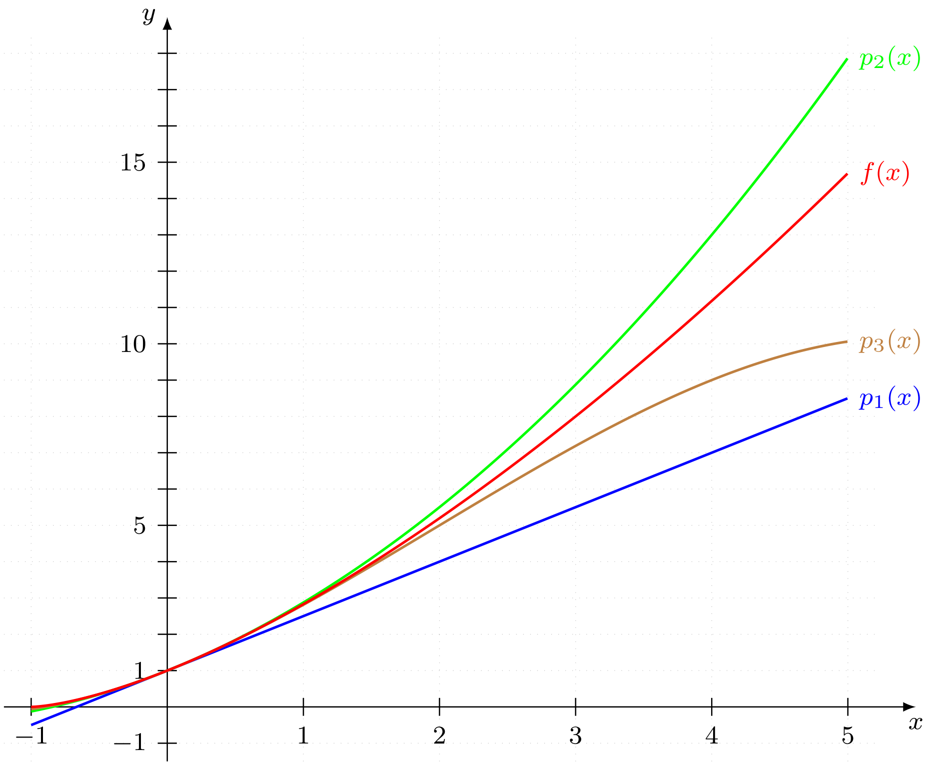


Abbildung 4: Die Funktionen p_1, p_2, p_3 und f

(c) Es gilt für die Fehler

$$\begin{aligned} |f(0,5) - p_2(0,5)| &\approx 0,0066 \\ |f(0,5) - p_3(0,5)| &\approx 0,0012 \\ |f(0,5) - p_4(0,5)| &\approx 0,0003 \end{aligned}$$

(d) Entweder verwendet man $q_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$ aus der Vorlesung oder berechnet q_4 analog zu p_4 in **(a)**. Es gilt nun

$$f(x) - (1+x)g(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} - (1+x)\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}} \;=\; 0$$

und

$$\begin{aligned} & p_4(x) - (1+x)q_4(x) \\ = \; & \left(1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4\right) - (1+x)\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4\right) \\ = \; & 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 - \left(1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 - \frac{5}{128}x^5\right) \\ = \; & \frac{5}{128}x^5. \end{aligned}$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 52. *Differenzierbarkeit*

Wie betrachten die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ x\mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{x}} & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |x^2 - 4|$$

(a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, ob g an den Stellen $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ differenzierbar ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Funktion f ist an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar, wenn die Links- und Rechts-Limites des Differentialquotienten an der Stelle $x_0 = 0$ existieren und dieselben sind. So berechnen wir

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{x\mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{x}}}{x} = \lim_{x \to 0-0} \mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{x}} = \mathrm{e}$$

und

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x\mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{x}}}{x} = \lim_{x \to 0+0} \mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{x}} = \mathrm{e}$$

Das heisst, f ist an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar.

(b) Die Funktion g ist an der Stelle $x_1 = -3$ differenzierbar, wenn die Links- und Rechts-Limites des Differentialquotienten an der Stelle $x_1 = -3$ existieren und dieselben sind. So berechnen wir

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_1 - 0} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} &= \lim_{x \to -3-0} \frac{|x^2 - 4| - 5}{x + 3} = \lim_{x \to -3-0} \frac{x^2 - 4 - 5}{x + 3} \\ &= \lim_{x \to -3-0} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \to -3-0} x - 3 = -6\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_1 + 0} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} &= \lim_{x \to -3+0} \frac{|x^2 - 4| - 5}{x + 3} = \lim_{x \to -3+0} \frac{x^2 - 4 - 5}{x + 3} \\ &= \lim_{x \to -3+0} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \to -3+0} x - 3 = -6\end{aligned}$$

Das heisst, g ist an der Stelle $x_1 = -3$ differenzierbar.

Die Funktion g ist an der Stelle $x_2 = 1$ differenzierbar, wenn die Links- und Rechts-Limites des Differentialquotienten an der Stelle $x_2 = 1$ existieren und dieselben sind. So berechnen wir

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_2 - 0} \frac{g(x) - g(x_2)}{x - x_2} &= \lim_{x \to 1-0} \frac{|x^2 - 4| - |-3|}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{-x^2 + 4 - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1-0} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} -x - 1 = -2\end{aligned}$$

und

$$\lim_{x\to x_2+0}\frac{g(x)-g(x_2)}{x-x_2}=\lim_{x\to 1+0}\frac{|x^2-4|-|-3|}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{-x^2+4-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+0}\frac{1-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}-x-1=-2$$

Das heisst, g ist an der Stelle $x_1=1$ differenzierbar.

Die Funktion g ist an der Stelle $x_3=2$ differenzierbar, wenn die Links- und Rechts-Limites des Differentialquotienten an der Stelle $x_3=2$ existieren und dieselben sind. So berechnen wir

$$\lim_{x\to x_3-0}\frac{g(x)-g(x_3)}{x-x_3}=\lim_{x\to 2-0}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{-x^2+4}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}-x-2=-4$$

und

$$\lim_{x\to x_3+0}\frac{g(x)-g(x_3)}{x-x_3}=\lim_{x\to 2+0}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}x+2=4$$

Das heisst, g ist an der Stelle $x_3=2$ nicht differenzierbar.

Aufgabe H 53. *Ableitungen*

Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von f. Wo ist f differenzierbar? Berechnen Sie f'. Berechnen Sie bei **(a)** auch f''.

(a) $f(x)=(\mathrm{e}^x+x^4)\cos(-2x)$

(b) $f(x)=\dfrac{x^3}{2^x}+\sqrt{x}$

(c) $f(x)=\ln(\sqrt{3x^2-12})$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Exponentialfunktion und polynomiale Funktionen sind auf $\mathbb{R}$ definiert, somit ist die Summe (e^x+x^4) auch auf $\mathbb{R}$ definiert. Die Cosinusfunktion und polynomiale Funktionen sind auf $\mathbb{R}$ definiert, somit ist die Verkettung $\cos(-2x)$ auch auf $\mathbb{R}$ definiert. Schliesslich ist der maximale reelle Definitionsbereich des Produktes $(\mathrm{e}^x+x^4)\cos(-2x)$ ebenfalls $\mathbb{R}$. Alle diese Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar, sodass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Die Ableitung ist:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\mathrm{e}^x+4x^3)\cos(-2x)+(\mathrm{e}^x+x^4)\cdot(-2)\cdot(-\sin(-2x))\\ &= (\mathrm{e}^x+4x^3)\cos(-2x)+2\,(\mathrm{e}^x+x^4)\sin(-2x). \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\mathrm{e}^x+12x^2)\cos(-2x)+(\mathrm{e}^x+4x^3)\cdot(-2)\cdot(-\sin(-2x))\\ &\quad +2\,(\mathrm{e}^x+4x^3)\sin(-2x)+2\,(\mathrm{e}^x+x^4)\cdot(-2\cos(-2x))\\ &= (\mathrm{e}^x+12x^2)\cos(-2x)+2\,(\mathrm{e}^x+4x^3)\sin(-2x)\\ &\quad +2\,(\mathrm{e}^x+4x^3)\sin(-2x)-4\,(\mathrm{e}^x+x^4)\cos(-2x)\\ &= (-3\mathrm{e}^x-4x^4+12x^2)\cos(-2x)+4\,(\mathrm{e}^x+4x^3)\sin(-2x). \end{aligned}$$

(b) Es gilt $f(x)=\dfrac{x^3}{2^x}+\sqrt{x}=\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{x\ln(2)}}+\sqrt{x}$. Die Exponentialfunktion und polynomiale Funktionen sind auf $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar und die Exponentialfunktion ist immer positiv, somit ist der Quotient $\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{x\ln(2)}}$ auch auf $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar.

Die Wurzelfunktion ist auf $[0, +\infty)$ definiert, aber nur auf $(0, +\infty)$ differenzierbar. Der maximale reelle Definitionsbereich der Summe $\frac{x^3}{\mathrm{e}^{x\ln(2)}} + \sqrt{x}$ ist dann $[0, +\infty)$, aber diese Funktion ist nur auf $(0, +\infty)$ differenzierbar.
Ihre Ableitung ist:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2\mathrm{e}^{x\ln(2)} - x^3\ln(2)\mathrm{e}^{x\ln(2)}}{\mathrm{e}^{2x\ln(2)}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{x^2(3 - x\ln(2))}{\mathrm{e}^{x\ln(2)}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{x^2(3 - x\ln(2))}{2^x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

(c) Die Wurzelfunktion ist auf $[0, +\infty)$ definiert, darum muss $3x^2 - 12 \geqq 0$ sein. Diese letzte Funktion ist gleich null für $x = -2$ und $x = 2$ und ist $\geqq 0$, wenn $x \leqq 2$ und $x \geqq 2$. Darum ist die Verkettung $\sqrt{3x^2 - 12}$ auf $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ definiert, aber nur auf $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ differenzierbar, da die Wurzelfunktion an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist. Die Logarithmusfunktion ist auf $(0, +\infty)$ definiert, darum muss $\sqrt{3x^2 - 12}$ positiv sein. Deswegen haben wir die zusätzliche Bedingung: $x \neq \pm 2$. Schliesslich ist die Verkettung $\ln(\sqrt{3x^2 - 12})$ auf $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ definiert und ist auf diesem ganzen Bereich differenzierbar. Tatsächlich sind die Logarithmusfunktion und polynomiale Funktionen auf ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar. Da die Wurzelfunktion an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist, müssten wir die Punkte, an denen $3x^2 - 12$ null ist, rausnehmen, aber diese zwei Punkte ± 2 waren schon ausgeschlossen.
Die Ableitung von f ist:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 12}} \\ &= \frac{3x}{3x^2 - 12} \\ &= \frac{x}{x^2 - 4}. \end{aligned}$$

Wir beobachten, dass $f(x)$ als $f(x) = \frac{1}{2}\ln(3x^2 - 12)$ umgeschrieben werden kann. Dann ist es einfacher, f abzuleiten, weil wir dann die Kettenregel nur einmal und nicht zweimal nutzen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot \frac{1}{3x^2 - 12} \\ &= \frac{3x}{3x^2 - 12} \\ &= \frac{x}{x^2 - 4}. \end{aligned}$$

Aufgabe H 54. *Differenzierbarkeit und Tangente*
Sei $m \in \mathbb{R}$ ein Parameter.
Wir betrachten die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -(1 + x)^3 + 2 & \text{für } x \leqq 0 \\ x^2 + mx + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $m \in \{2, 0, -3\}$.

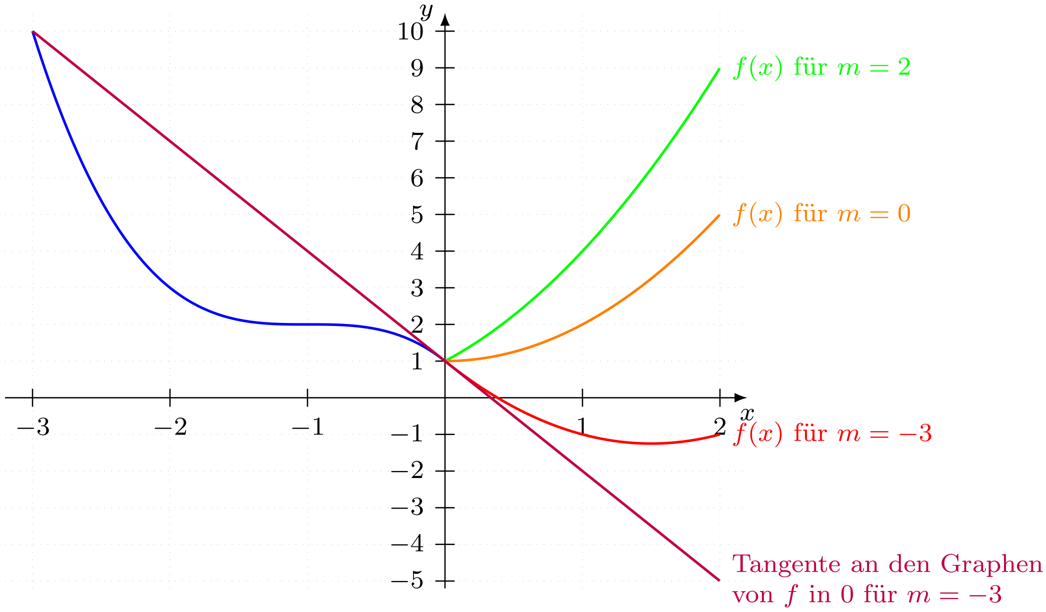
(b) Sei $m = 0$. Ist f stetig?

(c) Für welchen Wert des Parameters m ist f an der Stelle 0 differenzierbar?

(d) Bestimmen Sie für den in **(c)** bestimmten Wert von m die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle 0. Skizzieren Sie diese Tangente an den Graphen.

Lösungshinweise hierzu:

(a)



(b) Für $m = 0$ ist die Funktion gleich

$$f(x) = \begin{cases} -(1+x)^3 + 2 & \text{für } x \leqq 0 \\ x^2 + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Auf $(-\infty, 0)$ und $(0, +\infty)$ ist f über polynomiale Ausdrücke definiert. Deswegen ist diese Funktion auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig. Wir berechnen dann die Links- und Rechts-Limites von f an der Stelle 0:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} -(1+x)^3 + 2 = 1 = f(0)$$

und

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} x^2 + 1 = 1 = f(0).$$

Beide Grenzwerte haben den gleichen Wert $f(0)$, darum ist f auch an der Stelle 0 stetig.

(c) Die Funktion f ist an der Stelle 0 differenzierbar, wenn die Links- und Rechts-Limites des Differentialquotienten an der Stelle 0 existieren und dieselben sind. So berechnen wir

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-(1+x)^3 + 2 - 1}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0-0} \frac{-1 - 3x - 3x^2 - x^3 + 1}{x} = \lim_{x \to 0-0} -3 - 3x - x^2 = -3$$

und

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x^2 + mx + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0+0} x + m = m.$$

Das heisst, f ist an der Stelle 0 differenzierbar, falls $m = -3$.

(d) Für $m = -3$ können wir dann die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle 0 aufschreiben:
$$y = -3x + 1.$$
Die Tangente ist auf dem Bild zu Aufgabe **(a)** gezeichnet.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 55. *Funktionsgrenzwerte mit l'Hospital*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital.
Geben Sie dabei an, ob ein Ausdruck der Form "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\frac{-\infty}{\infty}$", "$\frac{\infty}{-\infty}$" oder "$\frac{-\infty}{-\infty}$" vorliegt.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^x - 2^x}{9^x - 3^x}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\arctan(2x) - \dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\tan(x)} - \dfrac{1}{x\sin(x)}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

Lösungshinweise hierzu:

(a)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{4^x - 2^x}{9^x - 3^x} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(4^x - 2^x\right)'}{\left(9^x - 3^x\right)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4^x \cdot \ln(4) - 2^x \cdot \ln(2)}{9^x \cdot \ln(9) - 3^x \cdot \ln(3)} \\
&= \frac{\ln(4) - \ln(2)}{\ln(9) - \ln(3)} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{4}{2}\right)}{\ln\left(\frac{9}{3}\right)} \\
&= \frac{\ln(2)}{\ln(3)}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} x\left(\arctan(2x) - \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan(2x) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \\
&\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\arctan(2x) - \frac{\pi}{2}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2}{1+4x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^2}{1+4x^2}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+4\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\frac{1}{x^2}+4}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\tan(x)} - \frac{1}{x\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} - \frac{1}{x\sin(x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{x\sin(x)} - \frac{1}{x\sin(x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x\sin(x)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{(\cos(x)-1)'}{(x\sin(x))'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{(-\sin(x))'}{(\sin(x)+x\cos(x))'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

Es ist $\lim\limits_{x\to 1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1$ und deshalb muss man $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ berechnen:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{\left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{2}{\pi}$$

Deshalb ist

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}.$$

Aufgabe H 56. *Mittelwertsatz*

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \arctan(t)$.

(a) Sei $x > 0$. Beweisen Sie, dass es ein $\xi \in (0,x)$ gibt mit

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

(b) Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für $x > 0$ mittels **(a)**.

$$\frac{x}{1+x^2} \leqq \arctan(x) \leqq x$$

(c) Skizzieren Sie die Graphen der drei Funktionen aus **(b)** auf dem Intervall $[0,2]$.

(d) Zeigen Sie, dass $\tan : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion ist. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ mittels **(b)**.

$$\tan\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \leqq x \leqq \tan(x)\ .$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $x > 0$. Die Funktion f ist auf dem Intervall $[0,x]$ stetig und differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz 2.4.4 existiert ein $\xi \in (0,x)$ so, dass

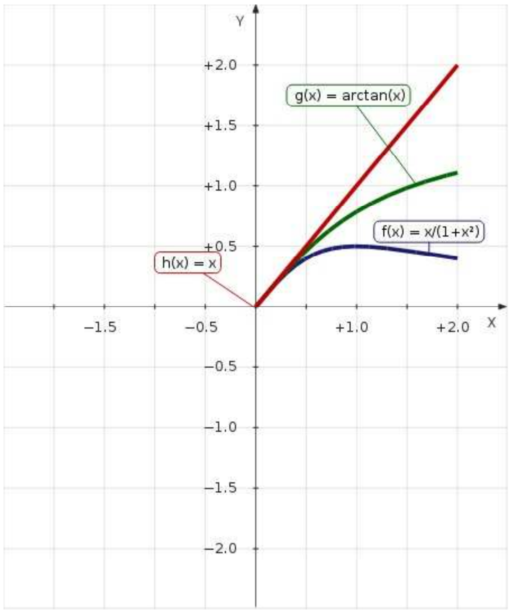
$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Es ist $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ und es folgt

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

(b)
$$\begin{aligned}
0 < \xi < x \quad &\Rightarrow \quad 0 < \xi^2 < x^2 \\
&\Rightarrow \quad 1 < \xi^2 + 1 < x^2 + 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < 1 \\
&\overset{(a)}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{1+x^2} < \frac{f(x)-f(0)}{x-0} < 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan(x)}{x} < 1 \\
&\overset{x>0}{\Rightarrow} \quad \frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x \\
&\Rightarrow \quad \frac{x}{1+x^2} \leqq \arctan(x) \leqq x
\end{aligned}$$

(c)



(d) Es ist

$$(\tan(x))' = \frac{1}{(\cos(x))^2} > 0.$$

Nach 2.4.8 ist die Funktion $\tan(x)$ streng monoton wachsend. Deshalb gilt nach (b):

$$\frac{x}{1+x^2} \leqq \arctan(x) \leqq x \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \leqq \tan\left(\arctan(x)\right) \leqq \tan(x)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \leqq x \leqq \tan(x).$$

(Es ist $\tan\left(\arctan(x)\right) = x$, denn die Umkehrfunktion von $\tan$ ist $\arctan$).

Aufgabe H 57. *Taylorentwicklung und Fehlerabschätzung*
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^x \cos(x)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(f, x, \pi)$.

(b) Finden Sie eine reelle Zahl a so, dass

$$\left|f\left(x\right) - T_3\left(f, x, \pi\right)\right| \leqq a\left|x - \pi\right|^4$$

für alle $x \in [\pi - 1, \pi + 1]$ gilt.

(c) Bestimmen Sie ein $b \in (0, 1)$ so, dass

$$|f(x) - T_3(f, x, \pi)| \leqq 10^{-4}$$

für alle $x \in [\pi - b, \pi + b]$ ist.

(d) Wir betrachten die Taylorreihe $T(f, x, 0) =: \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit $c_n \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie hierin c_{4k}, c_{4k+1}, c_{4k+2} und c_{4k+3} für $k \geqq 0$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die ersten drei Ableitungen von $f(x) = \mathrm{e}^x \cos(x)$ lauten

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \cos(x) - \mathrm{e}^x \sin(x), \qquad f''(x) = -2\mathrm{e}^x \sin(x), \qquad f'''(x) = -2\mathrm{e}^x \cos(x) - 2\mathrm{e}^x \sin(x).$$

Deshalb gilt

$$f(\pi) = -\mathrm{e}^\pi, \qquad f'(\pi) = -\mathrm{e}^\pi, \qquad f''(\pi) = 0, \qquad f'''(\pi) = 2\mathrm{e}^\pi.$$

Setzt man diese Ableitungen in die Definition des Taylorpolynoms 3–ter Stufe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$ ein, so erhält man

$$T_3(f, x, \pi) = -\mathrm{e}^\pi - \mathrm{e}^\pi(x - \pi) + \frac{\mathrm{e}^\pi}{3}(x - \pi)^3.$$

(b) Für $n = 3$ und $x \in [\pi - 1, \pi + 1]$ ist

$$|f(x) - T_3(f, x, \pi)| = |R_3(f, x, \pi)| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\right| |x - \pi|^4,$$

mit einem ξ im Intervall $(\pi - 1, \pi + 1)$. Es ist $f^{(4)}(x) = -4\mathrm{e}^x \cos(x)$. Deshalb:

$$\left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\right| |x - \pi|^4 = \frac{\left|\mathrm{e}^\xi\right| |\cos(\xi)|}{6} |x - \pi|^4 \leqq \frac{\mathrm{e}^\xi}{6} |x - \pi|^4.$$

Aus $\pi - 1 < \xi < \pi + 1$ und wegen der Monotonie der Exponentialfunktion folgt $\mathrm{e}^\xi < \mathrm{e}^{\pi+1}$, sodass

$$|f(x) - T_3(f, x, \pi)| \leqq \frac{\mathrm{e}^{\pi+1}}{6} |x - \pi|^4$$

und damit die gewünschte Ungleichung mit $a := \dfrac{\mathrm{e}^{\pi+1}}{6}$.

(c) Für $0 < b < 1$ ist $[\pi - b, \pi + b] \subsetneqq (\pi - 1, \pi + 1)$, so dass die Abschätzung aus (b) benutzt werden kann.
Für $x \in [\pi - b, \pi + b]$ ist $x - \pi \in [-b, b]$, d. h. $|x - \pi| \leqq b$. Es folgt:

$$|f(x) - T_3(f, x, \pi)| \overset{(b)}{\leqq} a \cdot |x - \pi|^4 \leqq ab^4.$$

Aus der Bedingung $ab^4 \leqq 10^{-4}$ folgt $b^4 \leqq \dfrac{10^{-4}}{a}$, also

$$b \leqq \sqrt[4]{\frac{10^{-4}}{a}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt[4]{\frac{6}{\mathrm{e}^{\pi+1}}}.$$

Die Abschätzung ist somit für jedes positive $b \leqq \dfrac{1}{10} \sqrt[4]{\dfrac{6}{\mathrm{e}^{\pi+1}}}$ gültig.

(d)
$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x \cos(x) \\ f'(x) &= \mathrm{e}^x \cos(x) - \mathrm{e}^x \sin(x) \\ f''(x) &= -2\mathrm{e}^x \sin(x) \\ f'''(x) &= -2\mathrm{e}^x \sin(x) - 2\mathrm{e}^x \cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= -4\mathrm{e}^x \cos(x) \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $f^{(4)}(x) = -4f(x)$. Deshalb:

$$
\begin{aligned}
f^{(4)}(x) &= -4f(x) \\
f^{(5)}(x) &= -4f'(x) \\
f^{(6)}(x) &= -4f''(x) \\
f^{(7)}(x) &= -4f'''(x) \\
f^{(8)}(x) &= -4f^{(4)}(x) = (-4)^2 f(x)
\end{aligned}
$$

Ähnlich:

$$
\begin{aligned}
f^{(9)}(x) &= (-4)^2 f'(x) \\
f^{(10)}(x) &= (-4)^2 f''(x) \\
f^{(11)}(x) &= (-4)^2 f'''(x) \\
f^{(12)}(x) &= (-4)^2 f^{(4)}(x) = (-4)^3 f(x) \\
&\vdots \\
f^{(4k)}(x) &= (-4)^k f(x) \\
f^{(4k+1)}(x) &= (-4)^k f'(x) \\
f^{(4k+2)}(x) &= (-4)^k f''(x) \\
f^{(4k+3)}(x) &= (-4)^k f'''(x)
\end{aligned}
$$

Aus 2.6.6 für $x_0 = 0$ ist

$$
\begin{aligned}
c_{4k} &= \frac{f^{(4k)}(0)}{(4k)!} = \frac{(-4)^k f(0)}{(4k)!} = \frac{(-4)^k}{(4k)!} \\
c_{4k+1} &= \frac{f^{(4k+1)}(0)}{(4k+1)!} = \frac{(-4)^k f'(0)}{(4k+1)!} = \frac{(-4)^k}{(4k+1)!} \\
c_{4k+2} &= \frac{f^{(4k+2)}(0)}{(4k+2)!} = \frac{(-4)^k f''(0)}{(4k+2)!} = 0 \\
c_{4k+3} &= \frac{f^{(4k+3)}(0)}{(4k+3)!} = \frac{(-4)^k f'''(0)}{(4k+3)!} = \frac{(-2)(-4)^k}{(4k+3)!}
\end{aligned}
$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 58. *Integration*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int \cos(5x)^4 \sin(3x)\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\int \sin(3x)\cos(x) - \cos(x)^3 \sin(4x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^{1/5} \arctan(5x)\,\mathrm{d}x$ **(d)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln(x)\cdot x^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Aufgabe **H 50** hilft in **(a)** und **(b)**. In **(c)** kann partielle Integration benutzt werden. In **(d)** forme man x^x um.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned}
&\int \cos(5x)^4 \sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
\overset{H50\,(a)}{=}\;& \int \frac{1}{16}\sin(23x) - \frac{1}{16}\sin(17x) + \frac{1}{4}\sin(13x) - \frac{1}{4}\sin(7x) + \frac{3}{8}\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
=\;& -\frac{1}{16\cdot 23}\cos(23x) + \frac{1}{16\cdot 17}\cos(17x) - \frac{1}{4\cdot 13}\cos(13x) + \frac{1}{4\cdot 7}\cos(7x) \\
& -\frac{3}{8\cdot 3}\cos(3x) + C \\
=\;& -\frac{1}{368}\cos(23x) + \frac{1}{272}\cos(17x) - \frac{1}{52}\cos(13x) + \frac{1}{28}\cos(7x) - \frac{1}{8}\cos(3x) + C.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\int \sin(3x)\cos(x) - \cos(x)^3\sin(4x)\,\mathrm{d}x \\
\overset{H50\,(b)}{=}\;& \int \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{8}\sin(7x) - \frac{1}{8}\sin(x) - \frac{3}{8}\sin(5x) - \frac{3}{8}\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
=\;& -\frac{1}{2\cdot 4}\cos(4x) - \frac{1}{2\cdot 2}\cos(2x) + \frac{1}{8\cdot 7}\cos(7x) + \frac{1}{8}\cos(x) + \\
& +\frac{3}{8\cdot 5}\sin(5x) + \frac{3}{8\cdot 3}\cos(3x) + C \\
=\;& -\frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{56}\cos(7x) + \frac{1}{8}\cos(x) + \frac{3}{40}\sin(5x) + \\
& +\frac{1}{8}\cos(3x) + C.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/5} \arctan(5x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/5} (x)'\cdot\arctan(5x)\,\mathrm{d}x \\
&= [x\cdot\arctan(5x)]_0^{1/5} - \int_0^{1/5} x\cdot(\arctan(5x))'\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}\cdot\arctan(1) - 0\cdot\arctan(0) - \int_0^{1/5} x\cdot\frac{5}{1+25x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

mit $u = 1 + 25x^2,\ \mathrm{d}\,u = 50x\,\mathrm{d}\,x$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{4} - \int_1^2 \frac{1}{10u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\pi}{20} - \frac{1}{10}\left[\ln(u)\right]_1^2$$

$$= \frac{\pi}{20} - \frac{1}{10}\left(\ln(2) - \ln(1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{20} - \frac{1}{10} \cdot \ln(2).$$

(d) $$\int_2^3 \frac{\ln(x)\cdot x^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{\ln(x)\cdot \mathrm{e}^{\ln(x^x)}}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_2^3 \frac{\ln(x)\cdot \mathrm{e}^{x\ln(x)}}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_2^3 \ln(x)\cdot \mathrm{e}^{x\ln(x)-x}\,\mathrm{d}x$$

mit $u = x\ln(x) - x,\ \mathrm{d}\,u = \left(\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} - 1\right)\mathrm{d}\,x = \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$

$$= \int_{2\ln(2)-2}^{3\ln(3)-3} \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$$

$$= \left[\mathrm{e}^u\right]_{2\ln(2)-2}^{3\ln(3)-3}$$

$$= \mathrm{e}^{3\ln(3)-3} - \mathrm{e}^{2\ln(2)-2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{3\ln(3)}}{\mathrm{e}^3} - \frac{\mathrm{e}^{2\ln(2)}}{\mathrm{e}^2}$$

$$= \frac{3^3}{\mathrm{e}^3} - \frac{2^2}{\mathrm{e}^2}$$

$$= \frac{27}{\mathrm{e}^3} - \frac{4}{\mathrm{e}^2}.$$

Aufgabe H 59. *Integration, lokale Extrema und Wendepunkte*

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F zu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \to \cos(x)\sinh(x)$.
Finden Sie eine lokale Extremstelle von F.

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F zu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \to \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.
Skizzieren Sie den Graphen von F. Finden Sie einen Wendepunkt von F.

(c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F zu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \to x^2\mathrm{e}^{-2x}$ mit $F(0) = 0$.
Finden Sie $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $F'(x_0) = 0$ so, dass x_0 keine lokale Extremstelle von F ist.

(d) Bestimmen Sie $\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ unter Verwendung der Substitution $x(t) = 2\sin(t)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man kann hier eine Stammfunktion mit Hilfe partieller Integration finden:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\cos(x)}_{h(x)}\underbrace{\sinh(x)}_{g'(x)}\,\mathrm{d}\,x &= [\cos(x)\cosh(x)] - \int -\sin(x)\cosh(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= [\cos(x)\cosh(x)] + \int \underbrace{\sin(x)}_{k(x)}\underbrace{\cosh(x)}_{l'(x)}\,\mathrm{d}\,x \\ &= [\cos(x)\cosh(x)] + [\sin(x)\sinh(x)] - \int \cos(x)\sinh(x)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

Das heisst $\displaystyle\int \cos(x)\sinh(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(\cos(x)\cosh(x) + \sin(x)\sinh(x)\right) + C$, mit $C \in \mathbb{R}$. Da *eine* Stammfunktion gesucht ist, wählen wir $C = 0$ und erhalten

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x)\cosh(x) + \sin(x)\sinh(x)\right).$$

Zur Bestimmung der lokalen Extremstellen von F betrachten wir die folgende notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned}F'(x) = 0 &\Leftrightarrow f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(x)\sinh(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\cos(x) = 0 \\ \sinh(x) = 0\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = 0\end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}.\end{aligned}$$

Dann müssen wir gucken, ob sich das Vorzeichen von f in der Umgebung dieser Stellen ändert oder nicht. In der Umgebung von 0 ist das Vorzeichen von $\cos(x)$ konstant positiv und das Vorzeichen von $\sinh(x)$ ändert sich von negativ nach positiv, darum ist 0 ein lokales Minimum von F. Da *eine* lokale Extremstelle von F gefragt ist, können wir $x = 0$ als Ergebnis geben. Ausserdem, beobachten wir dass die andere Nullstellen von f auch Extremstellen von F sind. Tatsächlich:

- $\star$ in der Umgebung von $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^{\geqq 0}$ ist das Vorzeichen von $\sinh(x)$ konstant positiv und das Vorzeichen von $\cos(x)$ ändert sich von positiv nach negativ, das heisst die Stellen $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^{\geqq 0}$ sind lokale Maxima von F;
- $\star$ in der Umgebung von $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^{<0}$ ist das Vorzeichen von $\sinh(x)$ konstant negativ und das Vorzeichen von $\cos(x)$ ändert sich von positiv nach negativ, das heisst die Stellen $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^{<0}$ sind lokale Minima von F;
- $\star$ in der Umgebung von $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}^{\geqq 0}$ ist das Vorzeichen von $\sinh(x)$ konstant positiv und das Vorzeichen von $\cos(x)$ ändert sich von negativ nach positiv, das heisst die Stellen $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^{\geqq 0}$ sind lokale Minima von F;

- ⋆ in der Umgebung von $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}^{<0}$ ist das Vorzeichen von $\sinh(x)$ konstant negativ und das Vorzeichen von $\cos(x)$ ändert sich von negativ nach positiv, das heisst die Stellen $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^{<0}$ sind lokale Maxima von F.

(b) Man kann hier eine Stammfunktion mit Hilfe Substitution finden:

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x$$

mit $u = 1 + x^2, \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 2x$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}\int \frac{-\mathrm{d}\,u}{u^2} = -\frac{1}{2}\int -\mathrm{d}\,u \cdot u^{-2} = -\frac{1}{2}\left[u^{-1}\right] + C \\ &= -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C, \end{aligned}$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Da *eine* Stammfunktion gesucht ist, wählen wir $C = 0$ und erhalten

$$F(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

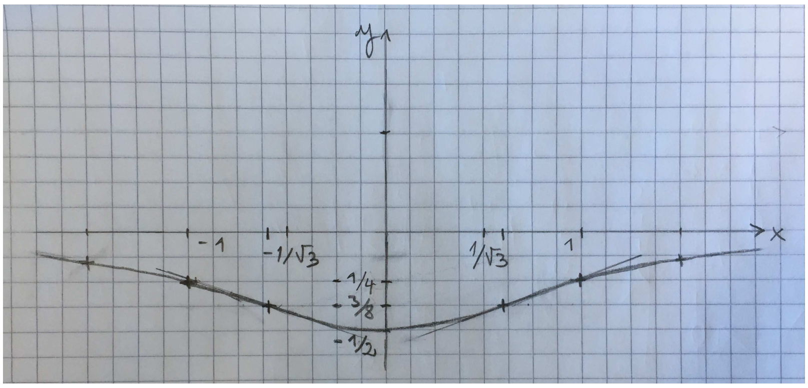


Abbildung 5: Graphen von F

Zur Bestimmung der Wendepunkten von F betrachten wir die folgende notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} F''(x) = 0 &\Leftrightarrow f'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1\cdot(1+x^2)^2 - x\cdot(2x)\cdot 2\cdot(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(1+x^2)^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}. \end{aligned}$$

Dann beobachten wir dass es einen Vorzeichenwechsel von F'' in der Umgebung dieser beiden Stellen gibt, darum sind -1 und 1 Wendepunkte von F.

(c) Man kann hier eine Stammfunktion mit Hilfe partieller Integration finden:

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{x^2}_{h(x)} \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{g'(x)} \,\mathrm{d}\,x &= \left[x^2 \frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right] - \int 2x \frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2} \,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[x^2 \frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right] + \int \underbrace{x}_{k(x)} \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{l'(x)} \,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[x^2 \frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right] + \left[x \frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right] - \int \frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2} \,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[x^2 \frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right] + \left[x \frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right] + \left[\frac{-\mathrm{e}^{-2x}}{4}\right] + C \\
&= -\frac{(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{-2x}}{4} + C
\end{aligned}
$$

Wir suchen die Stammfunktion F, die $F(0) = 0$ erfüllt. Das heisst $(0+0+1)\frac{\mathrm{e}^0}{4} + C = 0$, i.e. $C = -\frac{1}{4}$. Wir erhalten

$$
F(x) = -\frac{(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{-2x}}{4} - \frac{1}{4}.
$$

Um $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $F'(x_0) = 0$, sodass x_0 keine lokale Extremstelle von F ist, zu finden, darf es keinen Vorzeichenwechsel von $F' = f$ an der Stelle x_0 geben. Die Stelle $x_0 = 0$ erfüllt diese beide Bedingungen, da $f(0) = 0$ und die Quadratfunktion und Exponentialfunktion immer positiv sind.

(d)

$$
\int \sqrt{4 - x^2} \,\mathrm{d}\,x =
$$

mit $x(t) = 2\sin(t)$, $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 2\cos(t)$

$$
\begin{aligned}
&= \int \sqrt{4 - 4(\sin(t))^2} 2\cos(t) \,\mathrm{d}\,t = 2 \int \sqrt{1 - (\sin(t))^2} 2\cos(t) \,\mathrm{d}\,t \\
&= 4 \int \sqrt{(\cos(t))^2} \cos(t) \,\mathrm{d}\,t = 4 \int |\cos(t)| \cos(t) \,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}
$$

da $x(t) = 2\sin(t)$ bijektiv von $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nach $(-2, 2)$ ist und $\sin(t)$ auf diesem Interval positiv ist:

$$
\begin{aligned}
&= 4 \int (\cos(t))^2 \,\mathrm{d}\,t = 2 \int 1 + \cos(2t) \,\mathrm{d}\,t = 2t + \sin(2t) + C \\
&= 2t + \sin(2t) + C = 2t + 2\sin(t)\cos(t) + C \\
&= 2t + 2\sin(t)\sqrt{1 - (\sin(t))^2} + C \\
&= 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + C.
\end{aligned}
$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H 60. *Potenzreihe für den Arcustangens*

(a) Bestimmen Sie eine Potenzreihenentwicklung für $f\colon (-1,+1) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ unter Verwendung der geometrischen Reihe.

(b) Zeigen Sie, dass für $x \in (-1,+1)$ die Potenzreihe

$$F(x) \ := \ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

konvergiert.

(c) Weisen Sie mittels **(a)** nach, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan(x) - F(x)) = 0$ ist für $x \in (-1,+1)$. Überprüfen Sie $\arctan(0) - F(0) = 0$. Folgern Sie, dass

$$\arctan(x) \ = \ F(x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

ist für $x \in (-1,+1)$.

(d) Bestimmen Sie $w := \sqrt{3} \arctan(1/\sqrt{3})$.

Zeigen Sie mittels **(c)**, dass $w = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{-k}}{2k+1}$ ist.

Bestimmen Sie $w_3 := \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \frac{3^{-k}}{2k+1}$.

Zeigen Sie mittels 1.9.5, dass $|w - w_3| \leqq 3^{-6}$ ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $x^2 < 1$, weil $x \in (-1,+1)$. Deshalb:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \overset{1.8.4}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

(b) Es ist $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{, für } n \text{ gerade} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} & \text{, für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für die Bestimmung der Häufungspunkte von $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten wir die obigen Teilfolgen mit n gerade bzw. n ungerade:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 & \text{, für } n \text{ gerade} \\ \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 & \text{, für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für die Bestimmung des Konvergenzradius verwenden wir die Wurzelformel: Nach obiger Rechnung gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ und somit ist der Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{1} = 1$. Deshalb konvergiert die Potenzreihe $F(x)$ für $x \in (-1,+1)$.

(c) Aus **(b)**: $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{, für } n \text{ gerade} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} & \text{, für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aus 2.6.10 gibt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot n)x^{n-1}$. Es ist

$$a_n \cdot n = \begin{cases} 0 & \text{, für } n \text{ gerade} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{, für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Deshalb,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \overset{(a)}{=} \frac{1}{1+x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x).$$

Es folgt

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow F(x) = \arctan(x) + C.$$

Es ist $F(0) = \arctan(0) + C \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$. Deshalb:

$$\arctan(x) \;=\; F(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(d)

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{3}\arctan(1/\sqrt{3}) \\ &\overset{(c)}{=} \sqrt{3}F(1/\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(1/\sqrt{3})^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \sqrt{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(1/\sqrt{3})^{2k} \cdot (1/\sqrt{3})}{2k+1} \\ &= \sqrt{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(1/3)^k \cdot (1/\sqrt{3})}{2k+1} \\ &= \sqrt{3}(1/\sqrt{3})\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(1/3)^k}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(1/3)^k}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3^{-k}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} w_3 &= \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{3^{-k}}{2k+1} \\ &= (-1)^0\frac{3^0}{2\cdot 0+1}+(-1)^1\frac{3^{-1}}{2\cdot 1+1}+(-1)^2\frac{3^{-2}}{2\cdot 2+1}+(-1)^3\frac{3^{-3}}{2\cdot 3+1} \\ &= 1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189} \\ &= \frac{856}{945}. \end{aligned}$$

Die Folge $\left(\left|(-1)^k\frac{3^{-k}}{2k+1}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{3^{-k}}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monotone Nullfolge. Aus 1.9.5 gilt:

$$|w-w_3| \leqq |a_4| = \frac{3^{-4}}{2\cdot 4+1} = 3^{-6}.$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 61. *Partialbruchzerlegung und Integration*

Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+4}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{4}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{9x}{(x^3-1)^2}\,\mathrm{d}x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zunächst muss hier eine Polynomdivision durchgeführt werden, da der Grad des Zähler-Polynoms ebenso groß ist wie der Grad des Nenner-Polynoms:

$$\frac{x^2+3x+4}{x^2+2x} = 1 + \frac{x+4}{x^2+2x}$$

Die Partialbruchzerlegung muss nun für $\frac{x+4}{x^2+2x}$ durchgeführt werden. Wegen $x^2 + 2x = x\cdot(x+2)$ ergibt sich der Ansatz

$$\frac{x+4}{x^2+2x} \overset{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx}{x^2+2x} \ .$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ 2A &= 4 \end{aligned}$$

Dies kann man direkt lösen oder man erhält mittels Gaußverfahren folgendes:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Man erhält also die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x+4}{x^2+2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}$$

Damit lässt sich das Integral bestimmen:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+3x+4}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x &= \int 1\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= x + 2\ln|x| - \ln|x+2| + k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) Mit $x^2-1 = (x+1)(x-1)$ ergibt sich der folgende Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{4}{(x^2-1)^2} = \frac{4}{(x-1)^2(x+1)^2} &\overset{!}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A\cdot(x^3+x^2-x-1) + B\cdot(x^2+2x+1)}{(x^2-1)^2} \\ &\quad + \frac{C\cdot(x^3-x^2-x+1) + D\cdot(x^2-2x+1)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
A + C &= 0\\
A + B - C + D &= 0\\
-A + 2B - C - 2D &= 0\\
-A + B + C + D &= 4
\end{aligned}$$

Dies kann man direkt lösen oder man erhält mittels Gaußverfahren folgendes:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Man erhält also die Partialbruchzerlegung

$$\frac{4}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Damit lässt sich das Integral bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\
&\qquad + \int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= -\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}\\
&= \ln|x+1| - \ln|x-1| - \frac{2x}{x^2-1} + k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(c) Es gilt $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Weiter besitzt das Polynom $x^2 + x + 1$ mit der Mitternachtsformel keine reellen Nullstellen (Diskriminante ist $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$). Somit ergibt sich der folgende Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{9x}{(x^3-1)^2} &= \frac{9x}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}\\
&\overset{!}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}\\
&= \frac{A\cdot(x^5+x^4+x^3-x^2-x-1) + B\cdot(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)}{(x^3-1)^2}\\
&\qquad + \frac{(Cx+D)\cdot(x^4-x^3-x+1) + (Ex+F)\cdot(x^2-2x+1)}{(x^3-1)^2}\\
&= \frac{A\cdot(x^5+x^4+x^3-x^2-x-1) + B\cdot(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)}{(x^3-1)^2}\\
&\qquad + \frac{C\cdot(x^5-x^4-x^2+x) + D\cdot(x^4-x^3-x+1)}{(x^3-1)^2}\\
&\qquad + \frac{E\cdot(x^3-2x^2+x) + F\cdot(x^2-2x+1)}{(x^3-1)^2}
\end{aligned}$$

Dies kann man mittels Einsetzungsverfahren lösen oder man erhält mittels Gaußverfahren folgendes:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Man erhält also die Partialbruchzerlegung

$$\frac{9x}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{(x^2+x+1)^2}$$

Damit lässt sich das Integral bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{9x}{(x^3-1)^2}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&\quad -\int \frac{3}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&\quad -3\cdot\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - 3\cdot\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Für die beiden letzten Terme wird die Substitution $u := \frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ verwendet (vergleiche mit Formel aus Buch (Lemma 3.4.9): $\Delta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$). Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\int \frac{9x}{(x^3-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|\right] + \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\arctan(u)\right]_{u=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \\
&\quad -3\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta^2}\cdot\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\int\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u + \left[\frac{u}{2\cdot(u^2+1)}\right]_{u=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}\right) \\
&= \left[-\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] \\
&\quad -\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\arctan(u) + \frac{u}{2\cdot(u^2+1)}\right]_{u=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \\
&= -\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \\
&\quad -\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2x+1}{x^2+x+1} + k \quad \text{mit } k\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen und mit $x^2+x+1>0$ (nach obiger Rechnung hat es keine Nullstellen und es gilt $0^2+0+1=1>0$) erhält man somit

$$\begin{aligned}
\int \frac{9x}{(x^3-1)^2}\,\mathrm{d}x &= -\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \\
&\quad -\frac{2x+1}{x^2+x+1} + k \quad \text{mit } k\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Aufgabe H 62. *Obersumme und Untersumme*

Sei $f\colon [-1,2]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{x^2+x+2}{x+2}$.
Wir betrachten die Partition $Q = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ des Intervalls $[-1,2]$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
Stellen Sie die Untersumme $\underline{S}(f,Q)$ graphisch als Flächeninhalt dar.

(b) Berechnen Sie $I := \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Berechnen Sie $\underline{S}(f,Q)$ und $\overline{S}(f,Q)$. Bestätigen Sie hiermit $\underline{S}(f,Q) \leqq I \leqq \overline{S}(f,Q)$ unter Verwendung eines Taschenrechners.

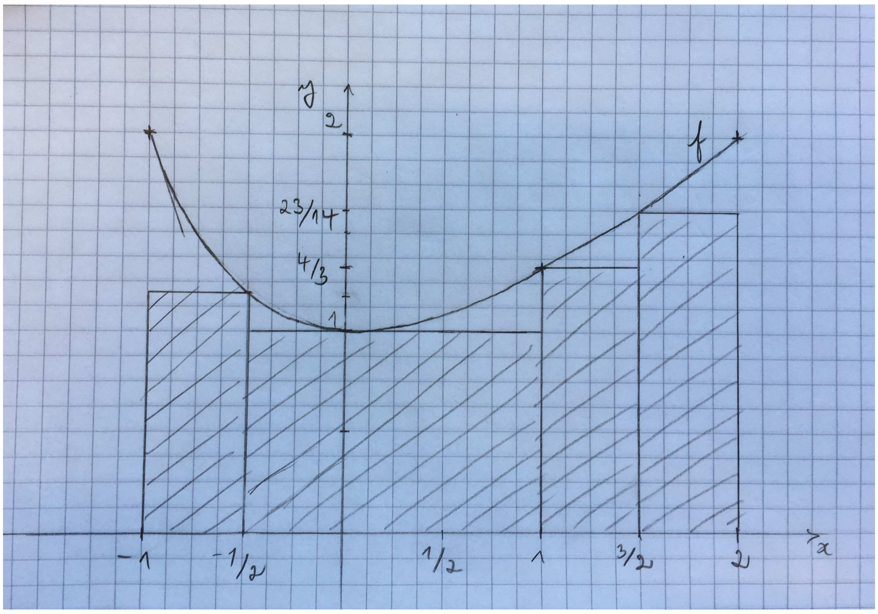
(d) Finden Sie $a\in\left(-\frac{1}{2},1\right)$ so, dass sich für die Partition $R := \left\{-1,-\frac{1}{2},a,1,\frac{3}{2},2\right\}$ die Gleichheit $\underline{S}(f,R) = \underline{S}(f,Q)$ ergibt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x+2} = x-1+\frac{4}{x+2}$ mit Polynomdivision. Weiterhin ist die Diskriminante des Nenners immer negativ und $f(0)=1>0$, womit $f(x)>0$ für $x\in[-1,2]$ folgt. Zudem f hat den Tiefpunkt $(0,1)$ wegen $f'(0) = 1-\frac{4}{(0+2)^2} = 0$ und $f''(0) = \frac{8}{(0+2)^3} = 1 > 0$. Mit einer Wertetabelle

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	2	$\frac{7}{6}$	1	$\frac{11}{10}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{23}{14}$	2

lassen sich der Graph von f und seine Untersumme $\underline{S}(f, Q)$ gut skizzieren.



(b) Es ist

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{2} x - 1 + \frac{4}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + 4\ln|x+2|\right]_{-1}^{2} \\ &= (2 - 2 + 4\ln(4)) - \left(\frac{1}{2} + 1 + 4\ln(1)\right) \\ &= 8\ln(2) - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(c) Die Funktion f fällt im Bereich $[-1, 0]$ monoton und wächst im Bereich $[0, 2]$ monoton. Daher lassen sich mit obiger Wertetabelle die Untersumme

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, Q) &= \left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot f(0) + \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot f(1) \\ &\quad + \left(2 - \frac{3}{2}\right) \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{25}{7} \approx 3,571 \end{aligned}$$

und die Obersumme

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, Q) &= \left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) \cdot f(-1) + \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot f(1) + \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) \\ &\quad + \left(2 - \frac{3}{2}\right) \cdot f(2) \\ &= \frac{135}{28} \approx 4,821 \end{aligned}$$

leicht berechnen. Weiterhin ist $I = 8\ln(2) - \dfrac{3}{2} \approx 4,045$ und somit gilt $\underline{S}(f,Q) \leqq I \leqq \overline{S}(f,Q)$.

(d) Wir haben in **(a)** gezeigt, dass f in $x_0 = 0$ einen Tiefpunkt hat, was hier verwendet wird. Vergleicht man nun die Untersumme $\underline{S}(f,R)$ mit der Untersumme $\underline{S}(f,R)$, so besteht der einzige Unterschied bei der Berechnung im Intervall $[-\frac{1}{2},1]$. Dies gilt, da R eine Verfeinerung von Q durch Hinzunahme von genau einem Punkt (dem Punkt a) ist. Es ergibt sich somit die folgende Gleichung, die für $\underline{S}(f,R) = \underline{S}(f,Q)$ erfüllt sein muss:

$$\left(a - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \left(\min_{y\in[-\frac{1}{2},a]} f(y)\right) + (1-a)\cdot\left(\min_{y\in[a,1]} f(y)\right) = \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 1 \qquad (*)$$

Hier sind nun 3 Fälle zu betrachten

$a < 0$ Dann ergibt sich $\min\limits_{y\in[-\frac{1}{2},a]} f(y) > 1$ und $\min\limits_{y\in[a,1]} f(y) = 1$ (vgl. Tiefpunkt von f). Somit ergibt sich aus $(*)$:

$$\begin{aligned}\left(a - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \left(\min_{y\in[-\frac{1}{2},a]} f(y)\right) &+ (1-a)\cdot\left(\min_{y\in[a,1]} f(y)\right)\\ &> \left(a - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 1 + (1-a)\cdot 1 = \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 1\end{aligned}$$

$a = 0$ Dann ergibt sich $\min\limits_{y\in[-\frac{1}{2},a]} f(y) = 1$ und $\min\limits_{y\in[a,1]} f(y) = 1$ (vgl. Tiefpunkt von f). Somit ergibt sich aus $(*)$:

$$\begin{aligned}\left(a - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \left(\min_{y\in[-\frac{1}{2},a]} f(y)\right) &+ (1-a)\cdot\left(\min_{y\in[a,1]} f(y)\right)\\ &= \left(a - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 1 + (1-a)\cdot 1 = \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 1\end{aligned}$$

$a > 0$ Dann ergibt sich $\min\limits_{y\in[-\frac{1}{2},a]} f(y) = 1$ und $\min\limits_{y\in[a,1]} f(y) > 1$ (vgl. Tiefpunkt von f). Somit ergibt sich aus $(*)$:

$$\begin{aligned}\left(a - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \left(\min_{y\in[-\frac{1}{2},a]} f(y)\right) &+ (1-a)\cdot\left(\min_{y\in[a,1]} f(y)\right)\\ &> \left(a - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 1 + (1-a)\cdot 1 = \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot 1\end{aligned}$$

Der gesuchte Wert ist also $a = 0$.
Insbesondere verbessert sich die Untersumme $\underline{S}(f,R)$ als Approximation von I im Vergleich zu $\underline{S}(f,Q)$ für alle $a \neq 0$.

Aufgabe H 63. *Integrale und Flächeninhalte*

(a) Skizzieren Sie den Graphen von $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\sin(x)$.
Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und von der x-Achse eingeschlossen wird.
Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, von der Geraden $y = 2x$ und von der Geraden $x = \pi$ eingeschlossen wird.
Skizzieren Sie diese Flächen.

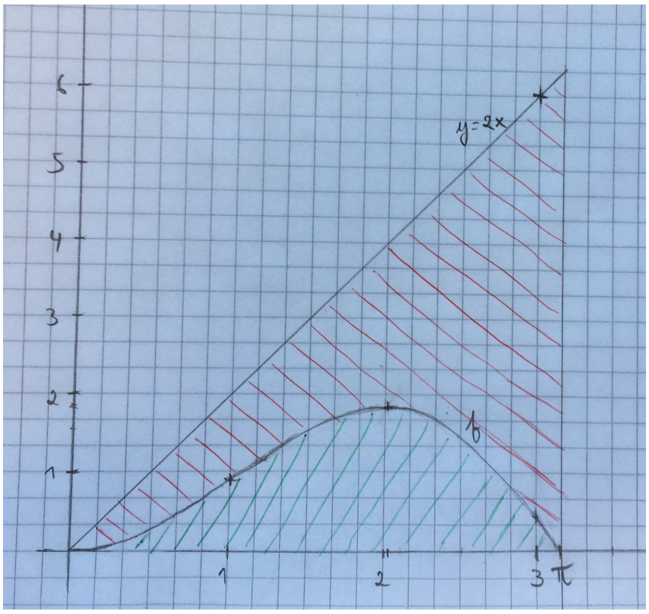
(b) Sei $g\colon (-1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + 2$. Sei $h\colon (-1,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{x+2}{x+1}$.
Skizzieren Sie die Graphen von g und h.
Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von diesen Graphen zwischen ihren Schnittpunkten eingeschlossen wird.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Hierzu müssen zuerst die Nullstellen von f berechnet werden. Aus $f(x) = x\sin(x) = 0$ folgt $x = 0$ oder $\sin(x) = 0$, was genau für $x \in \{0, \pi\}$ erfüllt ist. Somit sind die Nullstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = \pi$. Die Fläche A_1 zwischen f und der x-Achse errechnet man über ein Integral. Dieses wird mittels partieller Integration bestimmt. Zudem wird $f(x) \geqq 0$ für $x \in [0,\pi]$ verwendet.

$$A_1 = \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \big[-x\cos(x)\big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\,\mathrm{d}x = \big[-x\cos(x) + \sin(x)\big]_0^\pi = \pi$$

Als Nächstes skizzieren wir f, die Gerade $y = 2x$, die Fläche A_1 und die Fläche A_2 zwischen f, der Geraden $y = 2x$ und der Geraden $x = \pi$.



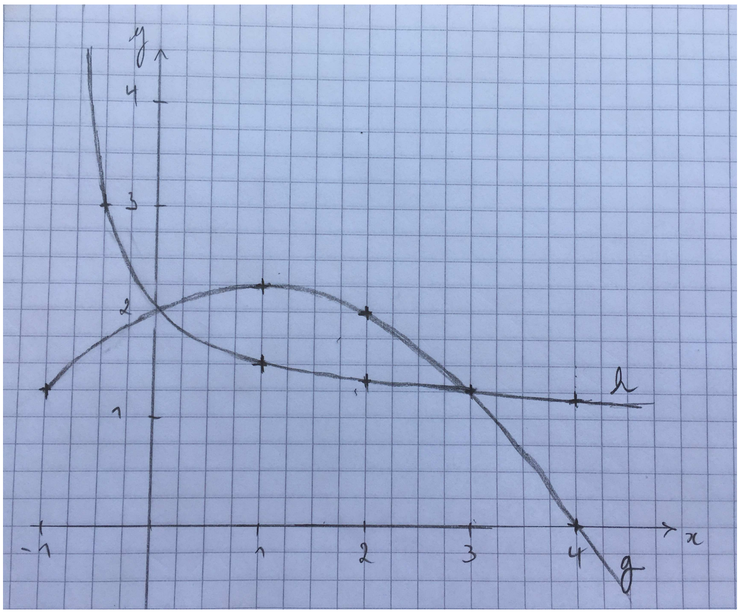
Wie in der Skizze erkennbar, kann man A_2 als Differenz eines Dreiecks mit Breite π und Höhe 2π und dem Wert von A_1 bestimmen:

$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2\pi - A_1 = \pi^2 - \pi$$

(b) Es ist $g(x) = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + 2 = -\dfrac{1}{4}(x-1)^2 + \dfrac{9}{4}$ eine Parabel und $h(x) = \dfrac{x+2}{x+1} = 1 + \dfrac{1}{x+1}$ eine Hyperbel mit waagrechter Asymptote $y = 1$ und senkrechter Asymptote $x = -1$. Ihre Schnittpunkte werden wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
g(x) = h(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 - 2x - 8}_{=(x+2)(x-4)} = -4\cdot\frac{x+2}{x+1}\\
&\overset{x\neq -2}{\Leftrightarrow} \quad (x-4)(x+1) + 4 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x = 0\\
&\Leftrightarrow \quad x \in \{0, 3\}
\end{aligned}$$

Also sind die Schnittpunkte $(0,2)$ und $(3,\frac{5}{4})$. Damit lassen sich die Graphen von g und h skizzieren:



Die von den Graphen eingeschlossene Fläche A berechnet sich nun über das folgende Integral. Dabei wird $g(x) \geqq h(x)$ für $x \in [0,3]$ verwendet.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 - \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x - \ln|x+1|\right]_0^3 \\ &= 3 - 2\ln(2) \end{aligned}$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 64. *Uneigentliche Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 \mathrm{e}^{(x^3)}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^{2} 2x\ln(x-1)\,\mathrm{d}x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der Integrand ist auf dem Intervall $(0,\infty)$ stetig, aber an der Stelle 0 nicht definiert. Die Problemstellen sind also die beiden Grenzen 0 und $+\infty$, darum teilen wir das Integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Aus den Beispielen 3.7.8 und 3.7.9 der Vorlesung wissen wir, da $2 > 1$, dass das erste Integral nicht existiert und dass das zweite existiert (und positiv ist). Dann

$$\lim_{\beta\to 0}\int_\beta^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \geqq \lim_{\beta\to 0}\int_\beta^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = +\infty$$

somit ist $\displaystyle\lim_{\beta\to 0}\int_\beta^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = +\infty$ und das Integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ existiert nicht.

(b) Die Funktion $x^2\mathrm{e}^{(x^3)}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, das Problem ist also die untere Grenze $-\infty$. Es gilt, mit der Substitution $u = x^3$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 3x^2$, dass

$$\int x^2\mathrm{e}^{(x^3)}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\mathrm{e}^u}{3}\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{\mathrm{e}^u}{3}\right] = \left[\frac{\mathrm{e}^{(x^3)}}{3}\right]$$

so dass

$$\int_{-\infty}^{0} x^2\mathrm{e}^{(x^3)}\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to-\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{(x^3)}}{3}\right]_\beta^0 = \frac{1}{3} - \underbrace{\lim_{\beta\to-\infty}\mathrm{e}^{(\beta^3)}}_{0} = \frac{1}{3}$$

(c) Der Integrand ist auf dem Intervall $(1,2]$ stetig, aber an der Stelle 1 nicht definiert. Mit Hilfe partieller Integration erhält man:

$$\begin{aligned}\int_1^2 2x\ln(x-1)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\beta\to 1}\int_\beta^2 2x\ln(x-1)\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\beta\to 1}\left[x^2\ln(x-1)\right]_\beta^2 - \lim_{\beta\to 1}\int_\beta^2 \frac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}\,x\\ &= \lim_{\beta\to 1}\left[x^2\ln(x-1)\right]_\beta^2 - \lim_{\beta\to 1}\int_\beta^2 x+1+\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

(mit Polynomdivision gilt $x^2 = (x-1)\cdot(x+1)+1$)

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\beta\to 1}\left[x^2\ln(x-1)\right]_\beta^2 - \lim_{\beta\to 1}\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)\right]_\beta^2 \\
&= \lim_{\beta\to 1} 4\ln(1) - \beta^2\ln(\beta-1) - \frac{4}{2} - 2 - \ln(1) + \frac{\beta^2}{2} + \beta + \ln(\beta-1) \\
&= \lim_{\beta\to 1}(1-\beta^2)\ln(\beta-1) + \frac{\beta^2}{2} + \beta - 4 \\
&= \underbrace{\lim_{\beta\to 1} -\underbrace{(\beta+1)}_{\to 2}\underbrace{(\beta-1)\ln(\beta-1)}_{\to 0}}_{0} + \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

da die Regel von l'Hospital gilt

$$
\lim_{\beta\to 1}(\beta-1)\ln(\beta-1) = \lim_{\beta\to 1}\frac{\ln(\beta-1)}{\frac{1}{\beta-1}} = \lim_{\beta\to 1}\frac{\frac{1}{\beta-1}}{\frac{-1}{(\beta-1)^2}} = \lim_{\beta\to 1} 1-\beta = 0.
$$

(d) Der Integrand ist auf dem Intervall $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ stetig, aber an der Stelle 0 nicht definiert. Wir integrieren zuerst unbestimmt die einzelnen Integrale. Es folgt

$$
\int \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left[\ln|x|\right] = \frac{1}{2}\left[\ln(x)\right] \quad \text{da } x \text{ auf } \left(0,\tfrac{\pi}{4}\right) \text{ positiv ist}
$$

und mit der Substitution $u = \sin(2x)$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 2\cos(2x)$ folgt weiter

$$
\int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{2}\left[\ln|u|\right] = \frac{1}{2}\left[\ln|\sin(2x)|\right] = \frac{1}{2}\left[\ln(\sin(2x))\right]
$$

da $\sin(2x)$ auf $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ positiv ist. Zusammen ergibt sich

$$
\int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left[\ln(\sin(2x)) - \ln(x)\right] = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)\right]
$$

Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{\beta\to 0}\int_\beta^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)\right]_\beta^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{4}}\right) - \frac{1}{2}\lim_{\beta\to 0}\ln\left(\frac{\sin(2\beta)}{\beta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{\pi}\right) - \frac{1}{2}\lim_{\beta\to 0}\ln\left(2\underbrace{\frac{\sin(2\beta)}{2\beta}}_{\to 1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{\pi}\right) - \frac{1}{2}\ln(2) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)
\end{aligned}
$$

(noch einmal mit der Regel von l'Hospital oder 1.12.5).

Aufgabe H 65. *Konvergenz uneigentlicher Integrale*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale konvergieren.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+\cos(x)}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{-1}\ln(\cos(x)+2)}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \tan(\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$

Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \tan(\mathrm{e}^{-k})$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $f(x) := \mathrm{e}^{-x\sqrt{x}}$ und $g(x) := \mathrm{e}^{-x}$. Die Funktionen f und g sind im Intervall $[0,+\infty)$ stetig und positiv und es ist

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x(1-\sqrt{x})} = 0.$$

Nach 3.7.11 (2) folgt aus der Konvergenz von $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ die Konvergenz von $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Es ist

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{\beta\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\beta} = \lim_{\beta\to\infty} -\mathrm{e}^{-\beta}+1 = 1.$$

Deshalb, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ konvergiert auch.

(b) Sei $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x^2+\cos(x)}}$ und $g(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{x}$. Die Funktionen f und g sind im Intervall $[2,+\infty)$ stetig und positiv und es ist

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+\cos(x)}} = 1.$$

Nach 3.7.11 (1) folgt, dass $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ das gleiche Konvergenzverhalten. Nach 3.7.9 divergiert das Integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Deshalb divergiert auch das Integral $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+\cos(x)}}\,\mathrm{d}x$.

(c) 0 ist eine uneigentliche Stelle. Sei $f(x) := \dfrac{x^{-1}\ln(\cos(x)+2)}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\ln(\cos(x)+2)}{x^{\frac{4}{3}}}$ und $g(x) := \dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$. Die Funktionen f und g sind im Intervall $[0,1)$ stetig und positiv und es ist

$$\lim_{x\to0+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0+0}\ln(\cos(x)+2) = \ln(3).$$

Nach 3.7.11 (1) folgt, dass $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\displaystyle\int_0^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$ das gleiche Konvergenzverhalten. Nach 3.7.8 konvergiert das Integral $\displaystyle\int_0^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1}\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$. Deshalb konvergiert auch das Integral $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^{-1}\ln(\cos(x)+2)}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

(d) Der Integrand und die Funktion e^{-x} sind auf dem Intervall $[0,\infty)$ stetig und positiv. Man kann die Substitution $y=\mathrm{e}^{-x}$ (da $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$) machen und dann gilt nach 1.12.5

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\tan(\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{-x}}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\tan(y)}{y}\right)=1.$$

Nach 3.7.11 (1) folgt, dass $\int_0^{+\infty}\left(\tan\left(\mathrm{e}^{-x}\right)\right)\mathrm{d}\,x$ und $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ das gleiche Konvergenzverhalten haben und wir haben schon in **(a)** gesehen dass $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert.

Da $\tan(x)$ monoton steigend auf dem Intervall $(0,1]$ ist und e^{-x} monoton fallend auf dem Intervall $(-\infty,0]$ ist, ist $\tan\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$ monoton fallend auf $(-\infty,0]$. Dank Satz 3.8.1 konvergiert dann auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\tan(\mathrm{e}^{-k})$.

Aufgabe H 66. *Potenzreihen*

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon(-\rho,\rho)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\,.$$

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f'.

(c) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für f.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j\ \text{mit}\ a_j=\begin{cases}\frac{1}{j} & \text{für } j=4n+1\\ 0 & \text{für } j=4n,\ 4n+2 \text{ oder } 4n+3\end{cases}$$

Wir bestimmen den größten Häufungspunkt als Grenzwert der folgenden konvergenten (der zweite Häufungspunkt ist offensichtlich 0). Es gilt

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\sqrt[j]{\left|\frac{1}{j}\right|}=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\sqrt[j]{j}}=1,$$

also ist der Konvergenzradius $\rho=\frac{1}{1}=1$.

(b) Summandenweises Ableiten ergibt

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}$$

Innerhalb des Konvergenzbereichs gilt $|x^4|<1$, daher handelt es sich um eine konvergente geometrische Reihe und es gilt

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^4)^n=\frac{1}{1-x^4}.$$

(c) Um f' zu integrieren, muss man erst die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{1-x^4}$ durchführen. Da $1-x^4 = (1-x^2)(1+x^2) = (1-x)(1+x)(1+x^2)$, ergibt sich der folgende Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^4} &\overset{!}{=} \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2} \\ &= \frac{A(x^3+x^2+x+1) + B(-x^3+x^2-x+1) + C(-x^3+x) + D(-x^2+1)}{1-x^4}\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A-B-C &= 0\\ A+B-D &= 0\\ A-B+C &= 0\\ A+B+D &= 1\end{aligned}$$

Dies kann man direkt lösen oder man erhält mittels Gaußverfahren folgendes:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2\end{array}\right)$$

Man erhält also die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{2(1+x^2)}$$

Damit lässt sich das Integral bestimmen:

$$\begin{aligned}f(x) = \int \frac{1}{1-x^4}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\ln|1-x| + \frac{1}{4}\ln|1+x| + \frac{1}{2}\arctan(x) + k\\ &= -\frac{1}{4}\ln(1-x) + \frac{1}{4}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\arctan(x) + k\\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\arctan(x) + k\end{aligned}$$

mit $k \in \mathbb{R}$. Da $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{0^{4n+1}}{4n+1} = 0$, hat man $k = 0 - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) + \frac{1}{2}\arctan(0) = 0$.
Schiesslich erhält man:

$$f(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\arctan(x).$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 67. *Stetigkeit und Ableitungen*

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2\sin(y)}{x^2y+x^4+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0). \end{cases}$

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)$.

Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig ist.

(b) Sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto y\ln\left(z^2+x^4+1\right)+\cosh(yz)$. Sei $P=(1,2,0)$.

Sei $v=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$. Bestimmen Sie $\nabla g(P)$, $\partial_v g(P)$ und $\mathrm{H}g(P)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{3\cdot\frac{1}{n^2}}$$
$$\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{n^3}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{3\cdot\left(-\frac{2}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

mit der Regel von l'Hospital bei $(*)$. Somit hat man die zwei Folgen $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ und $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)$ mit Grenzwert $(0,0)$, für die gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = f(0,0) \neq \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)$$

Folglich ist f nicht stetig.

(b) Zunächst berechnen wir die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}g(x,y,z) &= \frac{4x^3y}{z^2+x^4+1} \\
\frac{\partial}{\partial y}g(x,y,z) &= \ln\left(z^2+x^4+1\right)+z\sinh(yz) \\
\frac{\partial}{\partial z}g(x,y,z) &= \frac{2yz}{z^2+x^4+1}+y\sinh(yz)
\end{aligned}$$

Somit erhält man den Gradienten von g an der Stelle P wie folgt:

$$\nabla g(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}g(P) \\ \frac{\partial}{\partial y}g(P) \\ \frac{\partial}{\partial z}g(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \ln(2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}g(x,y,z)$, $\frac{\partial}{\partial y}g(x,y,z)$, $\frac{\partial}{\partial z}g(x,y,z)$ existieren in $\mathbb{R}^3$ und sind stetig, das heißt g ist stetig partiell differenzierbar. Daher lässt sich Satz 4.3.12 anwenden:

$$\partial_v g(P) = \nabla g(P) \bullet v = \begin{pmatrix} 4 \\ \ln(2) \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}}$$

Für die Hesse-Matrix berechnen wir nun zuerst die zweiten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} g(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} g(x,y,z) &&= \frac{12x^2y}{z^2+x^4+1} - \frac{16x^6y}{(z^2+x^4+1)^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} g(x,y,z) &&= \frac{4x^3}{z^2+x^4+1} \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} g(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} g(x,y,z) &&= -\frac{8x^3yz}{(z^2+x^4+1)^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial y \partial y} g(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} g(x,y,z) &&= z^2\cosh(yz) \\
\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} g(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} g(x,y,z) &&= \frac{2z}{z^2+x^4+1} + \sinh(yz) + yz\cosh(yz) \\
\frac{\partial^2}{\partial z \partial z} g(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} g(x,y,z) &&= \frac{2y}{z^2+x^4+1} - \frac{4yz}{(z^2+x^4+1)^2} + y^2\cosh(yz)
\end{aligned}$$

Da $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist, gilt $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}g(P) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}g(P)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}g(P) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}g(P)$ und $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}g(P) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}g(P)$ und man erhält

$$Hg(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x}g(P) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}g(P) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}g(P) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}g(P) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial y}g(P) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}g(P) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}g(P) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}g(P) & \frac{\partial^2}{\partial z \partial z}g(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe H 68. *Mengen*

Sei $M_1 = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \subseteqq \mathbb{R}$. Sei $M_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subseteqq \mathbb{R}$. Sei $M_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 > y \geqq |x|\right\} \subseteqq \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^3$:

$$M_4 = M_3^\circ \times (0,1), \quad M_5 = \mathbb{R} \times [1,3] \times [0,1], \quad M_6 = M_5 \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1 \geqq x \geqq -1\right\},$$

$$M_7 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \tfrac{1}{4} > |x| \text{ und } 2 < y < 3 \text{ und } z = 1\right\},$$

$$M_8 = \{0\} \times M_1 \times \overline{M_2}, \qquad M_9 = \overline{M_4} \cup M_8 .$$

(a) Skizzieren Sie die Teilmengen M_6, M_7 und M_9 von $\mathbb{R}^3$ in dasselbe Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie für M_2, M_3 und M_8 die inneren Punkte und die Randpunkte.

(c) Welche der Mengen M_2, M_3, M_4, M_5 und M_8 sind abgeschlossen?
Welche dieser Mengen sind weder abgeschlossen noch offen?

(d) Finden Sie unter den Mengen M_k, wobei $k \in \{1, \dots, 9\}$, eine Menge, die nicht beschränkt ist, eine Menge, die nicht konvex ist und eine Menge, die kompakt ist.

Lösungshinweise hierzu:

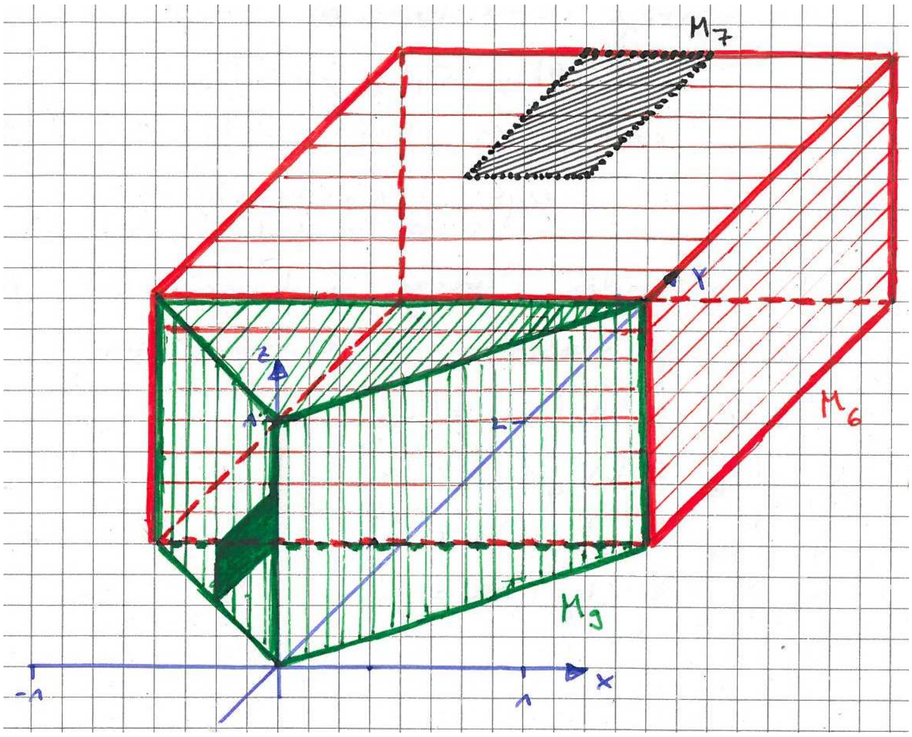
(a) Es ist

$$\begin{aligned} M_6 &= [-1,1] \times [1,3] \times [0,1] \\ M_7 &= \left(-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right) \times (2,3) \times \{1\} \\ M_9 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \geqq y \geqq |x|\right\} \cup \left(\{0\} \times \left[-\tfrac{1}{2}, 0\right] \times \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}\right]\right) \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\overline{M_4} = \overline{M_3^\circ} \times [0,1] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \geqq y \geqq |x|\right\} \times [0,1] \, .$$

Dies lässt sich daran sehen, dass M_4 ein Prisma mit dreieckiger Grundfläche ist, ausgenommen der Oberfläche. Somit ist sein Abschluss das Prisma mit der gesamten Oberfläche. Damit lässt sich eine Skizze dieser Mengen anfertigen:



Hierbei gehören gepunktete Linien nicht zur Menge (vgl. M_7) und gestrichelte Linien sind „unsichtbar“. Die Schraffur soll verdeutlichen, dass die Mengen nicht nur aus ihren Kanten oder Oberflächen bestehen (d.h. die Mengen sind anschaulich gesprochen „ausgefüllt“). Zur besseren Sichtbarkeit der Mengen wurde insbesondere darauf verzichtet, diese Mengen mit Farbe auszufüllen.

(b) Es ist $M_2^\circ = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ und $\partial M_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$, denn $M_2 \subseteqq \mathbb{R}$ ist ein Intervall. Daher sind die Randpunkte des Intervalls genau der Rand und das Innere ist das offene Intervall zu den gleichen Grenzen.

Es beschreibt M_3 die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,1)$ und $(-1,1)$ in $\mathbb{R}^2$, bei dem die Kante zwischen den Punkten $(-1,1)$ und $(1,1)$ fehlt. Somit sind die inneren Punkte von M_3 gegeben durch die inneren Punkte des Dreiecks, also $M_3^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 > y > |x|\right\}$. Die Randpunkte von M_3 sind gegeben durch die Kanten des Dreiecks:

$$\partial M_3 = \left\{(x,1) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq x \leqq 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq x \leqq 1 \text{ und } y = |x|\right\} \, .$$

Da $M_8 \subsetneqq \mathbb{R}^3$ eine Fläche (mit Rand) im dreidimensionalen Raum beschreibt, besitzt M_8 keine inneren Punkte, das heißt $M_8^\circ = \emptyset$. Aus selbem Grund sind alle Punkte von M_8 bereits Randpunkte, das heißt $\partial M_8 = M_8 = \{0\} \times \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$.

(c) Die Menge M_2 ist nach Aufgabenteil **(b)** weder offen (sonst würde $M_2 = M_2^\circ$ gelten) noch abgeschlossen (sonst würde $\partial M_2 \subsetneqq M_2$ gelten).

Die Menge M_3 ist nach Aufgabenteil **(b)** weder offen (sonst würde $M_3 = M_3^\circ$ gelten) noch abgeschlossen (sonst würde $\partial M_3 \subsetneqq M_3$ gelten)

Die Menge M_4 ist nicht abgeschlossen da sie ihren Randpunkt $(0,0)$ nicht enthält. M_4 ist offen, da sie keinen ihrer Randpunkte enthält (M_4 ist das Innere eines Prismas mit dreieckiger Grundfläche, vgl. **(a)**).

Die Menge M_5 ist abgeschlossen, denn der Rand von M_5 ist

$$\partial M_5 = (\mathbb{R} \times [1,3] \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times [1,3] \times \{1\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\} \times [0,1]) \cup (\mathbb{R} \times \{3\} \times [0,1]) \ .$$

Daher ist $\partial M_5 \subseteqq M_5$.

Die Menge M_8 ist abgeschlossen nach **(b)**, denn $\partial M_8 \subseteqq M_8$.

(d) Die Menge M_5 ist unbeschränkt, da die Folge $(n,1,0)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgenglieder in M_5 hat und $\lim_{n\to\infty} |(n,1,0)| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} = +\infty$. Somit können nicht alle Punkte dieser Folge in $U_S(0)$ liegen, egal, wie groß $S \in \mathbb{R}$ gewählt wird. Also kann auch M_5 nicht in dieser Umgebung $U_S(0)$ liegen.

Die Menge M_9 ist nicht konvex, da die beiden $(0,0,0), \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in M_9$ in M_9 liegen, aber der Mittelpunkt $(0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ der Verbindungsstrecke nicht im M_9 liegt.

Nach **(c)** sind die Mengen M_5 und M_8 abgeschlossen und nach obigem zudem beschränkt. Damit sind sie insbesondere kompakt. Als Zusatzhinweis: Weitere kompakte Mengen sind M_1, M_6 und M_9, da sie ebenfalls abgeschlossen und beschränkt sind.

Aufgabe H 69. *Modell: Eine unstetige, aber partiell differenzierbare Funktion*

Wir betrachten die Funktion f von **Aufgabe P 69**. Das in der Präsenzübung benutzte Modell des Graphen von f finden Sie auch unter:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/04

(a) Bestimmen Sie die Niveaulinien N_t von f zum Niveau t für $t = -1$ und $-1/3$.
Welche farbigen Linien des Modells stellen N_{-1} und $N_{-1/3}$ dar?

(b) Zeigen Sie, dass $-1 \leqq f(x,y) \leqq 1$ ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Was ist die Niveaumenge N_2 von f zum Niveau 2?
Hinweis: Verwenden Sie $(x+y^2)^2 \geqq 0$ und $(x-y^2)^2 \geqq 0$.

(c) Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{t}{n})$.
Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0,0)$ und mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$.
Ist f stetig?

(d) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f im Ursprung.
Sei $\alpha \in [0, 2\pi]$. Sei $v = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Berechnen Sie $\partial_v f(0,0)$. Ist hierfür Satz 4.3.12 anwendbar?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für die Niveaumenge N_{-1} führen wir folgende Rechnung für $(x,y) \neq (0,0)$ durch:

$$\begin{aligned} f(x,y) = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad y^4 + 2xy^2 + x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(y^2 + x\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -y^2 \;. \end{aligned}$$

Somit ist die Niveaulinie $N_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y^2 \neq 0\}$ eine Parabel ohne den Scheitelpunkt $(0,0)$. Sie wird im Modell durch die hellgrüne Linie gekennzeichnet.
Für die Niveaumenge $N_{-1/3}$ führen wir folgende Rechnung für $(x,y) \neq (0,0)$ durch:

$$\begin{aligned} f(x,y) = -\frac{1}{3} \qquad &\Leftrightarrow \qquad y^4 + 6xy^2 + x^2 = 0 \\ &\overset{\text{Mitternachtsformel}}{\Leftrightarrow} \qquad x = \frac{-6y^2 \pm \sqrt{36y^4 - 4y^4}}{2} \\ &\Leftrightarrow \qquad x = \left(-3 \pm \sqrt{8}\right) y^2 \;. \end{aligned}$$

Somit besteht die Niveaulinie $N_{-1/3} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (-3 \pm \sqrt{8})y^2 \neq 0\}$ aus zwei Parabeln ohne den Scheitelpunkt $(0,0)$. Sie wird im Modell durch die dunkelgrünen Linien gekennzeichnet.

(b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt $x^2 + y^4 \geqq 0$ und es folgt

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy^2 + y^4 = \left(x + y^2\right)^2 \geqq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\left(x^2 + y^4\right) \leqq 2xy^2 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \leqq \frac{2xy^2}{y^4 + x^2} = f(x,y) \;. \end{aligned}$$

Ebenso gilt für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy^2 + y^4 = \left(x - y^2\right)^2 \geqq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x^2 + y^4\right) \geqq 2xy^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \geqq \frac{2xy^2}{y^4 + x^2} = f(x,y) \;. \end{aligned}$$

Zudem gilt $-1 \leqq 0 = f(0,0) \leqq 1$ und somit folgt $-1 \leqq f(x,y) \leqq 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Hiermit folgt insbesondere $f(x,y) \neq 2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Also ist $N_2 = \emptyset$.

(c) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{t}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2t^2}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{t^4}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2t^2}{n + \frac{t^4}{n}} = 0 \;.$$

Nach Aufgaben **P69** Teil **(b)** ist $f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \in N_1$. Somit gilt insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \;.$$

Weiter ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = (0,0) \;.$$

Also erfüllt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$ die geforderten Eigenschaften.

Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right) = (0,0) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$$

ist f im Punkt $(0,0)$ unstetig. Insbesondere ist f nicht stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(d) Mit dem Differenzenquotienten erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0\ ,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0\ .$$

Für die Bestimmung von $\partial_v f(0,0)$ kann Satz 4.3.12 nicht angewendet werden, da f nicht stetig ist. Daher wird $\partial_v f(0,0)$ ebenfalls über den Differenzenquotienten berechnet:

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(hv)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h^3\cos(\alpha)\sin(\alpha)^2}{h^3\cos(\alpha)^2 + h^5\sin(\alpha)} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2 + h^2\sin(\alpha)}$$

Hier werden nun der Fall $\cos(\alpha)=0$ und $\cos(\alpha)\neq 0$ unterschieden.

$\cos(\alpha)=0$: Dann gilt insbesondere $\sin(\alpha)\neq 0$ und man erhät

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2 + h^2\sin(\alpha)} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\ .$$

$\cos(\alpha)\neq 0$: Dann gilt

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2 + h^2\sin(\alpha)} = \frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2} = \frac{2\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)}\ .$$

Bemerkung: Mit den Richtungsableitungen nach v hat man insbesondere auch die partiellen Ableitungen bestimmt, denn

$$\partial_{(1,0)} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) \qquad \text{und} \qquad \partial_{(0,1)} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)\ .$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 70. *Kritische Stellen und ihr Typ*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x - y^2 + 1)\,(x^2 - y^2 - 1)$.

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f im Bereich $x \in [-4, 4]$.
Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung von f und notieren Sie diese in Ihrer Skizze.

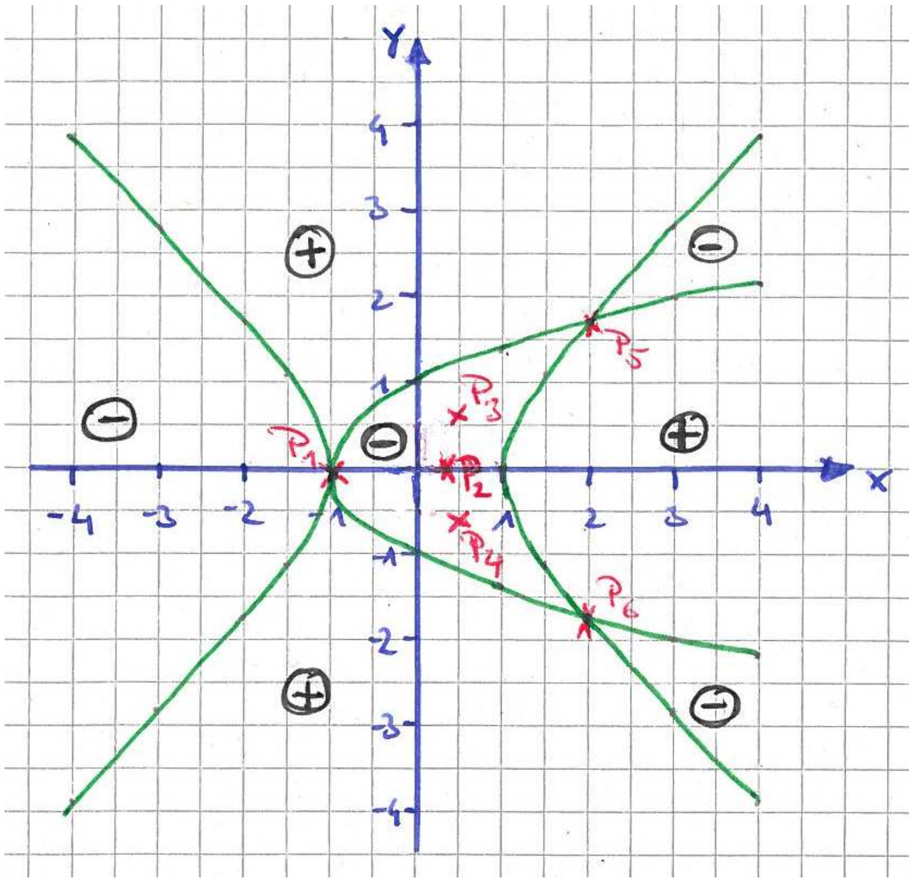
(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle ihren Typ.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $f(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y^2 - 1$ oder $x^2 - y^2 + 1 = 0$ gilt. Die Gleichung $x = y^2 - 1$ beschreibt ein Parabel, bei der x als Funktion von y betrachtet wird. Die Gleichung $x^2 - y^2 + 1 = 0$ beschreibt eine Hyperbel. Damit lässt sich eine Skizze der Nullstellenmenge anfertigen:



Die Nullstellenmenge ist hierbei grün skizziert. Zudem sind bereits die kritischen Punkte (rot) aus Aufgabenteil **(c)** eingetragen. Die Vorzeichenverteilung (schwarz) erhält man durch Einsetzen geeigneter Punkte oder durch Prüfen der beiden Faktoren von f auf Positivität bzw. Negativität.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} (x^2-y^2-1)+2x\,(x-y^2+1) \\ -2y\,(x^2-y^2-1)-2y\,(x-y^2+1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2xy^2+3x^2-y^2+2x-1 \\ -2y\,(x^2-2y^2+x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2xy^2+3x^2-y^2+2x-1 \\ -2x^2y+4y^3-2xy \end{pmatrix} , \\
\mathrm{H}f(x,y) &= \begin{pmatrix} -2y^2+6x+2 & -4xy-2y \\ -4xy-2y & -2x^2+12y^2-2x \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

(c) Zur Bestimmung der kritischen Punkte wird das Gleichungssystem $\nabla f(x,y) = 0$ gelöst. Aus $-2y\,(x^2-2y^2+x)=0$ folgt $y=0$ oder $x^2-2y^2+x=0$.

Falls $y_{1/2}=0$**:** Aus $-2xy^2+3x^2-y^2+2x-1=0$ folgt dann $3x^2+2x-1=0$. Somit gilt

$$x_{1/2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{4}}{3} = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3} ,$$

also $x_1=-1$ und $x_2=\frac{1}{3}$.

Falls $x^2-2y^2+x=0$**:** Dann gilt $y^2 = \frac{1}{2}\,(x^2+x)$. Durch Einsetzen in $-2xy^2+3x^2-y^2+2x-1=0$ folgt

$$\begin{aligned}
& -x^3-x^2+3x^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2x-1=0 \\
\Leftrightarrow\ & -x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-1=0 \\
\Leftrightarrow\ & -2x^3+3x^2+3x-2=0
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen findet man die Nullstelle $x=-1$. Dies führt wieder zur Lösung $(x_1,y_1)=(-1,0)$. Mit Polynomdivision erhält man

$$\big(-2x^3+3x^2+3x-2\big) : (x+1) = -2x^2+5x-2 .$$

Daraus ergeben sich die Nullstellen

$$x_{3/4/5/6} = \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} ,$$

also $x_{3/4}=\frac{1}{2}$ und $x_{5/6}=2$. Die zugehörigen y-Werte $y_3=\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$, $y_4=-\frac{\sqrt{6}}{4}$, $y_5=\sqrt{3}$ und $y_6=-\sqrt{3}$ ergeben sich dann aus $y^2=\frac{1}{2}\,(x^2+x)$.

Also besitzt f die kritischen Punkte $P_1=(-1,0)$, $P_2=(\frac{1}{3},0)$, $P_3=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{4})$, $P_4=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{6}}{4})$, $P_5=(2,\sqrt{3})$ und $P_6=(2,-\sqrt{3})$.

(d) Aus der Vorzeichenverteilung kann man ablesen, dass P_1, P_5 und P_6 Sattelpunkte sind, da in einer beliebig kleinen Umgebung dieser kritischen Punkte sowohl positive als auch negative Funktionswerte auftauchen. Bei P_5 und P_6 kann man alternativ den Typ auch mittels der Hesse-Matrix bestimmen.

Zur Bestimmung des Typs der kritischen Punkte P_2, P_3 und P_4 wird die Hesse-Matrix verwendet:

$$\mathrm{H}f(P_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

ist indefinit, also ist P_2 ein Sattelpunkt.

$$\det\left(\mathrm{H}f(P_3)\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{17}{4} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix} = \frac{27}{4}$$

und mit $\frac{17}{4} > 0$ (bzw. $\operatorname{Sp}\mathrm{H}f(P_3) = \frac{29}{4} > 0$ ist folglich $\mathrm{H}f(P_3)$ positiv definit. Also ist P_3 ein Tiefpunkt.

$$\det\left(\mathrm{H}f(P_4)\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{17}{4} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix} = \frac{27}{4}$$

und mit $\frac{17}{4} > 0$ (bzw. $\operatorname{Sp}\mathrm{H}f(P_4) = \frac{29}{4} > 0$ ist folglich $\mathrm{H}f(P_4)$ positiv definit. Also ist P_4 ein Tiefpunkt.

Bemerkung: Die Punkte P_2, P_3 und P_4 befinden sich in einer kompakten Menge (siehe Skizze), in der f nur nicht-positive Werte annimmt. Auf dieser Menge muss die Funktion f ein Maximum und ein Minimum annehmen. Das Maximum 0 wird auf dem Rand angenommen. Daher muss mindestens einer dieser kritischen Punkte ein Minimum sein. Jedoch ist der Typ der einzelnen Punkte hier nicht aus der Vorzeichenverteilung ersichtlich.

Aufgabe H 71. *Modell: Schmiegquadriken*

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \cos(x)\cos(y)$.

Das in der Präsenzübung benutzte Modell eines Ausschnitts des Graphen von f finden Sie auch unter:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/05

In den Präsenzübungen haben Sie Gradient und Hesse-Matrix von f berechnet.

(a) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f.

(b) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle von f den Typ.

(c) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle das Taylorpolynom der Stufe 2.

(d) Ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$, dann ist $f(x,y) - g(x)g(y) = 0$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\left|T_2(f,(x,y),(0,0)) - T_2(g,x,0)\,T_2(g,y,0)\right| < \frac{\varepsilon^4}{4}$$

ist für $(x,y) \in U_\varepsilon(\,(0,0)\,)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Man betrachte die Gleichung

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) \\ -\cos(x)\sin(y) \end{pmatrix} = 0\,.$$

Aus $-\sin(x)\cos(y) = 0$ folgt $\sin(x) = 0$ oder $\cos(y) = 0$.

Falls $\sin(x) = 0$**:** Dann ist $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Damit gilt $\cos(x) = (-1)^k \neq 0$. Aus $-\cos(x)\sin(y)$ folgt somit $\sin(y) = 0$, also $y = l\pi$ mit $l \in \mathbb{Z}$.

Falls $\cos(y) = 0$**:** Dann ist $y = \frac{\pi}{2} + l\pi$ mit $l \in \mathbb{Z}$. Damit gilt $\sin(y) = (-1)^l \neq 0$. Aus $-\cos(x)\sin(y)$ folgt somit $\cos(x) = 0$, also $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Die kritischen Punkte von f sind somit $P_{k,l} = (k\pi, l\pi)$ mit $k,l \in \mathbb{Z}$ und $Q_{k,l} = (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi)$ mit $k,l \in \mathbb{Z}$.

(b) Die Hesse-Matrix von f ist

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x)\cos(y) & \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x)\sin(y) & -\cos(x)\cos(y) \end{pmatrix} .$$

Mit $\cos(k\pi) = (-1)^k$ und $\sin(k\pi) = 0$ ist

$$\mathrm{H}f(P_{k,l}) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+l+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{k+l+1} \end{pmatrix}$$

positiv definit für $k+l$ ungerade und negativ definit für $k+l$ gerade. Daher ist $P_{k,l}$ eine Minimalstelle für $k+l$ ungerade und eine Maximalstelle für $k+l$ gerade.
Mit $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ ist

$$\det \mathrm{H}f(Q_{k,l}) = \det \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+l} \\ (-1)^{k+l} & 0 \end{pmatrix} = -1 ,$$

also ist $\mathrm{H}f(Q_{k,l})$ indefinit. Daher ist $Q_{k,l}$ ein Sattelpunkt.

(c) Es ist

$$\begin{aligned} & T_2(f,(x,y),P_{k,l}) \\ = \;& f(P_{k,l}) + \nabla f(P_{k,l}) \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P_{k,l} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P_{k,l} \right)^{\mathsf{T}} \mathrm{H}f(P_{k,l}) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P_{k,l} \right) \\ = \;& (-1)^{k+l} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-k\pi \\ y-l\pi \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} (-1)^{k+l+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{k+l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-k\pi \\ y-l\pi \end{pmatrix} \\ = \;& (-1)^{k+l} + \frac{1}{2}(-1)^{k+l+1}(x-k\pi)^2 + \frac{1}{2}(-1)^{k+l+1}(y-l\pi)^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & T_2(f,(x,y),Q_{k,l}) \\ = \;& f(Q_{k,l}) + \nabla f(Q_{k,l}) \bullet \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - Q_{k,l} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - Q_{k,l} \right)^{\mathsf{T}} \mathrm{H}f(Q_{k,l}) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - Q_{k,l} \right) \\ = \;& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2}-k\pi \\ y-\frac{\pi}{2}-l\pi \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+l} \\ (-1)^{k+l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2}-k\pi \\ y-\frac{\pi}{2}-l\pi \end{pmatrix} \\ = \;& (-1)^{k+l} \left(x - \frac{\pi}{2} - k\pi \right) \left(y - \frac{\pi}{2} - l\pi \right) \end{aligned}$$

(d) Es ist $T_2(f,(x,y),(0,0)) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ und $T_2(g,x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} & |T_2(f,(x,y),(0,0)) - T_2(g,x,0)T_2(g,y,0)| \\ = \;& \left| 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^2y^2 \right) \right| \\ = \;& \left| -\frac{1}{4}x^2y^2 \right| \\ = \;& \frac{x^2y^2}{4} . \end{aligned}$$

Nun gilt $(x,y) \in U_\varepsilon(0,0)$ genau dann, wenn $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$, also $x^2+y^2 < \varepsilon^2$. Somit gilt $x^2 < \varepsilon^2$ und $y^2 < \varepsilon^2$. Hiermit folgt

$$|T_2(f,(x,y),(0,0)) - T_2(g,x,0)T_2(g,y,0)| = \frac{x^2y^2}{4} \quad < \quad \frac{\varepsilon^4}{4} .$$

Aufgabe H 72. *Kritische Stellen und ihr Typ, Schmiegquadriken*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto (2x_1^2 + (x_2-1)^2 - 1)\,(x_1^2 - x_2)$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f im Bereich $x_1 \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.
Bestimmen Sie die Vorzeichenverteilung von f und notieren Sie diese in Ihrer Skizze.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f.
Bestimmen sie für jede kritische Stelle deren Typ.

(d) Bestimmen Sie die Schmiegquadrik an f an der Stelle $(\frac{1}{3}, 0)$, deren euklidische Normalform und ihre Gestalt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt $f(x_1, x_2) = 0$ genau dann, wenn $2x_1^2 + (x_2-1)^2 - 1 = 0$ oder $x_2 = x_1^2$ gilt. Die Gleichung $2x_1^2 + (x_2-1)^2 - 1$ beschreibt ein Ellipse mit x_2 Werten im Bereich $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Die Gleichung $x_2 = x_1^2$ beschreibt eine Parabel, bei der x_2 als Funktion von x_1 betrachtet wird. Wegen

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + (x_2-1)^2 - 1 = 0 \text{ und } x_2 = x_1^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x_1^2 + (x_1^2-1)^2 - 1 = x_1^4 = 0 \text{ und } x_2 = x_1^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0\,. \end{aligned}$$

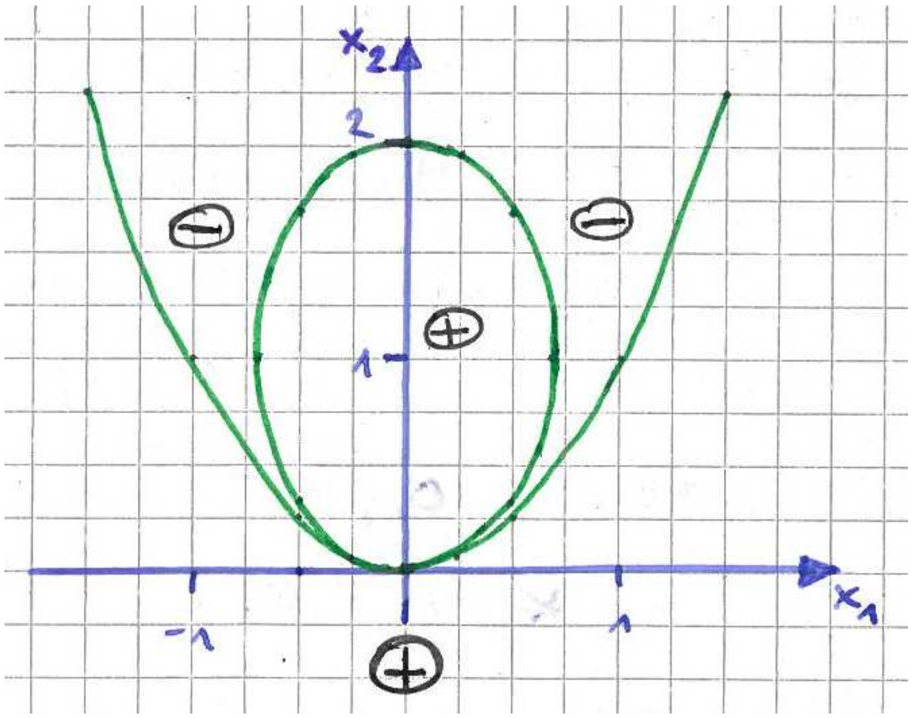
ist $(0,0)$ der einzige Schnittpunkt dieser beiden Kurven. Weiter gilt für die Punkte der Ellipse

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + (x_2-1)^2 - 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x_2-1)^2 = 1 - 2x_1^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x_2 = 1 \pm \sqrt{1-2x_1^2} \\ &\Rightarrow \quad x_2 \geqq 1 - \sqrt{1-2x_1^2} \end{aligned}$$

Zudem gilt $1 - \sqrt{1-2x_1^2} \geqq x_1^2$ für $x_1 \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, denn

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1-2x_1^2} \geqq x_1^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - x_1^2 \geqq \sqrt{1-2x_1^2} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - 2x_1^2 + x_1^4 \geqq 1 - 2x_1^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1^4 \geqq 0 \quad \text{dies gilt da } x_1 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Anschaulich gesprochen heißt das, dass die Ellipse oberhalb der Parabel liegt (in x_2-Richtung). Damit lässt sich eine Skizze der Nullstellenmenge anfertigen:



Die Nullstellenmenge ist hierbei grün skizziert. Die Vorzeichenverteilung (schwarz) erhält man durch Einsetzen geeigneter Punkte oder durch Prüfen der beiden Faktoren von f auf Positivität bzw. Negativität.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_1,x_2) &= \begin{pmatrix} 4x_1(x_1^2-x_2)+2x_1(2x_1^2+(x_2-1)^2-1) \\ 2(x_2-1)(x_1^2-x_2)+(-1)(2x_1^2+(x_2-1)^2-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x_1(4x_1^2+x_2^2-4x_2) \\ 2x_1^2x_2-4x_1^2-3x_2^2+4x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8x_1^3+2x_1x_2^2-8x_1x_2 \\ 2x_1^2x_2-4x_1^2-3x_2^2+4x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{H}f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 24x_1^2+2x_2^2-8x_2 & 4x_1x_2-8x_1 \\ 4x_1x_2-8x_1 & 2x_1^2-6x_2+4 \end{pmatrix} .$$

(c) Zur Bestimmung der kritischen Punkte wird das Gleichungssystem $\nabla f(x_1,x_2)=0$ gelöst. Aus $2x_1(4x_1^2+x_2^2-4x_2)=0$ folgt $x_1=0$ oder $4x_1^2+x_2^2-4x_2=0$.

Falls $x_1=0$**:** Aus $2x_1^2x_2-4x_1^2-3x_2^2+4x_2=0$ folgt $-3x_2^2+4x_2=-3x_2(x_2-\frac{4}{3})=0$. Somit gilt $x_2=0$ oder $x_2=\frac{4}{3}$.

Falls $4x_1^2+x_2^2-4x_2=0$**:** Dann gilt $x_1^2=-\frac{1}{4}x_2^2+x_2$. Durch Einsetzen in $2x_1^2x_2-4x_1^2-3x_2^2+4x_2=0$ folgt

$$-\frac{1}{2}x_2^3+2x_2^2+x_2^2-4x_2-3x_2^2+4x_2=-\frac{1}{2}x_2^3=0 ,$$

also $x_2=0$. Die zugehörige x_1-Wert $x_1=0$ ergibt sich dann aus $x_1^2=-\frac{1}{4}x_2^2+x_2$.

Also besitzt f die kritischen Punkte $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (0, \frac{4}{3})$.
Aus der Vorzeichenverteilung kann man ablesen, dass P_1 ein Sattelpunkt ist, da in einer beliebig kleinen Umgebung von P_1 sowohl positive als auch negative Funktionswerte auftauchen.
Der Punkt P_2 befinden sich in einer kompakten Menge (siehe Skizze), in der f nur nicht-negative Werte annimmt. Auf dieser Menge muss die Funktion f ein Maximum und ein Minimum annehmen. Das Minimum 0 wird auf dem Rand angenommen. Daher muss P_2 ein Maximum sein.

(d) Es ist das Taylorpolynom 2. Stufe gegeben durch

$$\begin{aligned}
& T_2\left(f,(x_1,x_2),(\tfrac{1}{3},0)\right) \\
= \; & f(\tfrac{1}{3},0) + \nabla f(\tfrac{1}{3},0) \bullet \left(x-(\tfrac{1}{3},0)\right) + \frac{1}{2}\left(x-(\tfrac{1}{3},0)\right)^{\mathsf{T}} \mathrm{H}f(\tfrac{1}{3},0)\left(x-(\tfrac{1}{3},0)\right) \\
= \; & \frac{2}{81} + \begin{pmatrix} \frac{8}{27} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{3} \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{3} \\ x_2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{38}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{3} \\ x_2 \end{pmatrix} \\
= \; & \frac{2}{81} + \frac{8}{27}\left(x_1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{4}{9}x_2 + \frac{4}{3}\left(x_1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{19}{9}x_2^2 - \frac{8}{3}\left(x_1 - \frac{1}{3}\right)x_2 \,.
\end{aligned}$$

Die Schmiegquadrik ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned}
Q \; = \; & \left\{(x_1,x_2x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = T_2(f,(x_1,x_2),(\tfrac{1}{3},0))\right\} \\
= \; & \left\{(x_1,x_2x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_3 = \frac{2}{81} + \frac{8}{27}\left(x_1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{4}{9}x_2 + \frac{4}{3}\left(x_1-\frac{1}{3}\right)^2 \\ \qquad - \frac{8}{3}\left(x_1 - \frac{1}{3}\right)x_2 + \frac{19}{9}x_2^2 \end{array}\right\} \\
= \; & \left\{(x_1,x_2x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{2}{27} - \frac{16}{27}x_1 + \frac{4}{9}x_2 - x_3 + \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{8}{3}x_1x_2 + \frac{19}{9}x_2^2 = 0\right\}
\end{aligned}$$

Zunächst bringen wir diese Gleichung auf die Form $x^{\mathsf{T}}Ax + 2b^{\mathsf{T}}x + c = 0$ für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{2}{27} - \frac{16}{27}x_1 + \frac{4}{9}x_2 - x_3 + \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{8}{3}x_1x_2 + \frac{19}{9}x_2^2 = x^{\mathsf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{19}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} x + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{8}{27} \\ \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{=:b}^{\mathsf{T}} x + \underbrace{\frac{2}{27}}_{=:c}$$

1. Schritt: Diagonalisieren von A: Es wird nun eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A bestimmt. Hierzu wird zuerst das charakteristische Polynom von A berechnet:

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \lambda & -\frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{19}{9} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\
= -\lambda\left(\left(\frac{4}{3} - \lambda\right)\left(\frac{19}{9} - \lambda\right) - \frac{16}{9}\right) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{31}{9}\lambda + \frac{28}{27}\right)
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A ergeben sich nun als die Nullstellen von χ_A:

$$\lambda_{1/2} = \frac{\frac{31}{9} \pm \sqrt{\frac{961}{81} - \frac{112}{27}}}{2} = \frac{31}{18} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{625}{81}} = \frac{31}{18} \pm \frac{25}{18} \,.$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{28}{9}$ und $\lambda_3 = 0$. Zugehörige Eigenvektoren erhält man durch das Lösen der entsprechenden homogenen Gleichungssysteme. Eine Orthonormalbasis erhält man durch anschließendes Normieren, da alle Eigenräume eindimensional sind.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{16}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{16}{9} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{28}{9} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{19}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Wir setzen nun die Transformationsmatrix $F = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und führen die Koordinatentransformation $y = F^\intercal x$ durch. Dabei gilt $x = Fy$. Man erhält die Gleichung

$$\begin{aligned} & y^\intercal F^\intercal A F y + 2b^\intercal F y + c = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y^\intercal \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{28}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y + 2 \begin{pmatrix} -\frac{14}{135} \\ \frac{16}{45} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} y + \frac{2}{27} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{3} y_1^2 + \frac{28}{9} y_2^2 - 2 \cdot \frac{14}{135} y_1 + 2 \cdot \frac{16}{45} y_2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) y_3 + \frac{2}{27} = 0 . \end{aligned}$$

2. Schritt: Verschiebung: Nun wird (zu y_1 und y_2) quadratisch ergänzt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} y_1^2 + \frac{28}{9} y_2^2 - 2 \cdot \frac{14}{135} y_1 + 2 \cdot \frac{16}{45} y_2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) y_3 + \frac{2}{27} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{3} \left(y_1 - 3 \cdot \frac{14}{135}\right)^2 + \frac{28}{9} \left(y_2 + \frac{9}{28} \cdot \frac{16}{45}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) y_3 + \frac{2}{1701} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{3} \left(y_1 - \frac{14}{45}\right)^2 + \frac{28}{9} \left(y_2 + \frac{4}{35}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left(y_3 - \frac{2}{1701}\right) = 0 . \end{aligned}$$

Nun werden mittels der Verschiebung $z = y + \begin{pmatrix} -\frac{14}{45} \\ \frac{4}{35} \\ -\frac{2}{1701} \end{pmatrix}$ die linearen Terme in y_1 und y_2 beseitigt, sowie der konstanten Term. Man erhält die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} z_1^2 + \frac{28}{9} z_2^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) z_3 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{2}{3} z_1^2 - \frac{56}{9} z_2^2 + 2 z_3 = 0 \end{aligned}$$

Die euklidische Normalform der Schmiegquadrik Q ist folglich

$$-\frac{2}{3}z_1^2 - \frac{56}{9}z_2^2 + 2z_3 = 0\ .$$

Die affine Normalform erhält man durch die Transformation $\tilde{z}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}z_1$, $\tilde{z}_2 = \sqrt{\frac{56}{9}}z_1$ und $\tilde{z}_3 = -z_3$. Man erhält die Gleichung

$$\begin{aligned} & -\tilde{z}_1^2 - \tilde{z}_2^2 - 2\tilde{z}_3 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \tilde{z}_1^2 + \tilde{z}_2^2 + 2\tilde{z}_3 = 0\ . \end{aligned}$$

Aus der Liste der affinen Normalformen (vgl. HM1) kann man nun die Gestalt der Schmiegquadrik ablesen: Q ist ein elliptischer Paraboloid.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 73. *Lagrange-Multiplikatoren*

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto 4y-2z+8$.

Sei $E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2=1\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x-y-z=0\right\}$.

(a) Bestimmen Sie ein $S>0$ mit $E \subseteqq U_S(0,0,0)$. Ist E kompakt?

(b) Erstellen Sie das Gleichungssystem nach Lagrange für die Ermittlung der lokalen Extremstellen von $f|_E$, also von der Einschränkung von f auf E. Wie viele Nebenbedingungen müssen beachtet werden?

(c) Finden Sie die kritischen Stellen, indem Sie das Gleichungssystem aus **(b)** lösen.

(d) Bestimmen Sie $\max(f(E))$ und $\min(f(E))$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $(x,y,z) \in E$. Es ist $-1 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq y \leqq 1$ (weil $x^2+y^2=1$) und $z=2x-y$. Deshalb gilt $-2 \leqq 2x \leqq 2$ und $1 \geqq -y \geqq -1 \Rightarrow -2-1 \leqq 2x-y \leqq 2+1 \Rightarrow -3 \leqq z \leqq 3$. Es ist

$$\left.\begin{array}{rcl} -1 & \leqq x \leqq & 1 \\ -1 & \leqq y \leqq & 1 \\ -3 & \leqq z \leqq & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} |x| \leqq & 1 \\ |y| \leqq & 1 \\ |z| \leqq & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} x^2 \leqq & 1 \\ y^2 \leqq & 1 \\ z^2 \leqq & 9 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Deshalb gilt $(x,y,z) \in E \Rightarrow$
$$\begin{aligned} |(x,y,z)| &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ &\leqq \sqrt{1+1+9} \\ &< \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

Es folgt $(x,y,z) \in U_4(0,0,0) \Rightarrow E \subseteqq U_4(0,0,0) \Rightarrow$ die Menge E ist beschränkt.
Die Funktionen $(x,y,z) \mapsto x^2-y^2-1$ und $(x,y,z) \mapsto 2x-y-z$ sind stetig und nach 4.2.16 (zweiter Punkt) sind die Mengen $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$ und $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x-y-z=0\right\}$ daher abgeschlossen. Deshalb ist E abgeschlossen.
Zusammenfasst ist E beschränkt und abgeschlossen $\Rightarrow$ E ist kompakt.

(b) Seien $g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x^2+y^2-1$ und $g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto 2x-y-z$.
Wir berechnen

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (0,4,-2)^\intercal$, $\operatorname{grad} g_1(x,y,z) = (2x,2y,0)^\intercal$ und $g_2(x,y,z) = (2,-1,-1)^\intercal$.

Kandidaten für Extremstellen ergeben sich als Lösungen von

$$\left.\begin{array}{rcl} \operatorname{grad} f(x,y,z) + \lambda_1 \operatorname{grad} g_1(x,y,z) + \lambda_2 \operatorname{grad} g_2(x,y,z) & = & (0,0,0)^\intercal \\ g_1(x,y,z) & = & 0 \\ g_2(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (0,4,-2)^\intercal + \lambda_1(2x,2y,0)^\intercal + \lambda_2(2,-1,-1)^\intercal & = & (0,0,0)^\intercal \\ x^2+y^2 & = & 1 \\ 2x-y-z & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$2\lambda_1 x + 2\lambda_2 = 0 \tag{2}$$
$$2\lambda_1 y - \lambda_2 + 4 = 0 \tag{3}$$
$$-\lambda_2 - 2 = 0 \tag{4}$$
$$x^2+y^2 = 1 \tag{5}$$
$$2x-y-z = 0 \tag{6}$$

(c) $(3) \Rightarrow \lambda_2 = -2$. Deshalb: $(1) \Rightarrow x = \dfrac{2}{\lambda_1}$ und $(2) \Rightarrow y = -\dfrac{3}{\lambda_1}$.
Deshalb: $(4) \Rightarrow \dfrac{4}{\lambda_1^2} + \dfrac{9}{\lambda_1^2} = 1 \Rightarrow \lambda_1^2 = 13 \Rightarrow \lambda_1 = \pm\sqrt{13}$.

- $\underline{\lambda_1 = \sqrt{13}}$: Es ist $x = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ und $y = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$. Deshalb: $(5) \Rightarrow z = \dfrac{7}{\sqrt{13}}$. Dies liefert den kritischen Punkt $P_1(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}})$.
- $\underline{\lambda_1 = -\sqrt{13}}$: Es ist $x = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ und $y = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$. Deshalb: $(5) \Rightarrow z = -\dfrac{7}{\sqrt{13}}$. Dies liefert den kritischen Punkt $P_2(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}})$.

(d) Die Menge E ist nach (a) Kompakt, und die $f|_E$ ist stetig. Nach 4.2.18 besitzt $f|_E$ ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum auf E. Diese finden sich also unter den eben bestimmten Kandidaten:

$$f(P_1) = -\frac{26}{\sqrt{13}} + 8 \quad \text{und } f(P_2) = \frac{26}{\sqrt{13}} + 8 > f(P_1).$$

Deshalb: $\max(f(E)) = f(P_1)$ und $\min(f(E)) = f(P_2)$.

Aufgabe H 74. *Kettenregel*
Sei $P := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Sei $E := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > |u|\}$.
Sei $f\colon P \to E\colon (x,y) \mapsto f(x,y) = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f(x,y)$ für $(x,y) \in P$. Bestimmen Sie $\mathrm{J}f(1,2)$.

(b) Bestimmen Sie die Inverse $f^{-1}\colon E \to P\colon (u,v) \mapsto f^{-1}(u,v)$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{J}(f^{-1})(u,v)$ für $(u,v) \in E$.

(d) Sei $(x,y) \in P$. Sei $(u,v) := f(x,y)$. Bestimmen Sie das Matrixprodukt

$$\mathrm{J}(f^{-1})(u,v)\ \mathrm{J}f(x,y)$$

unter Verwendung von **(a)** und **(c)**. Bestimmen Sie dieses Matrixprodukt erneut, nun unter Verwendung der Kettenregel.

Lösungshinweise hierzu:

(a) $\mathrm{J}f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$. Deshalb: $\mathrm{J}f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Seien $u = x^2 - y^2$ und $v = x^2 + y^2$.
Es ist $u + v = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{u+v}{2} \overset{x>0}{\Rightarrow} x = \sqrt{\dfrac{u+v}{2}}$.
Ähnlich: $v - u = 2y^2 \Rightarrow y^2 = \dfrac{v-u}{2} \overset{y>0}{\Rightarrow} y = \sqrt{\dfrac{v-u}{2}}$.
Es folgt $f^{-1}\colon E \to P\colon (u,v) \mapsto f^{-1}(u,v) := \left(\sqrt{\dfrac{u+v}{2}}, \sqrt{\dfrac{v-u}{2}}\right)$.

(c) $\mathrm{J}(f^{-1})(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\sqrt{\frac{u+v}{2}}}{\partial u} & \frac{\partial\sqrt{\frac{u+v}{2}}}{\partial v} \\ \frac{\partial\sqrt{\frac{v-u}{2}}}{\partial u} & \frac{\partial\sqrt{\frac{v-u}{2}})}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2(u+v)}} & \frac{1}{2\sqrt{2(u+v)}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2(v-u)}} & \frac{1}{2\sqrt{2(v-u)}} \end{pmatrix}$.

(d) $\mathrm{J}(f^{-1})(u,v)\ \mathrm{J}f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2(u+v)}} & \frac{1}{2\sqrt{2(u+v)}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2(v-u)}} & \frac{1}{2\sqrt{2(v-u)}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{\sqrt{2(u+v)}} & 0 \\ 0 & \frac{2y}{\sqrt{2(v-u)}} \end{pmatrix}.$

Wir haben in **(b)** berechnet, dass $x = \sqrt{\frac{u+v}{2}}$ und $y = \sqrt{\frac{v-u}{2}}$ ist. Deshalb:

$$\frac{2x}{\sqrt{2(u+v)}} = \frac{2y}{\sqrt{2(v-u)}} = 1.$$

Es folgt $\mathrm{J}(f^{-1})(u,v)\ \mathrm{J}f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Wir werden das gleiche Ergebnis mit der Kettenregel beweisen: Es ist $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ $\Rightarrow (f^{-1} \circ f)(x,y) = (x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Deshalb:

$$\mathrm{J}(f^{-1} \circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seien $a := (x,y)$ und $b := f(x,y) = (u,v)$. Nach 4.8.3 gilt:
$\mathrm{J}(f^{-1} \circ f)(a) = \mathrm{J}(f^{-1})(b)\mathrm{J}f(a) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{J}(f^{-1})(b)\ \mathrm{J}f(a) = \mathrm{J}(f^{-1})(u,v)\ \mathrm{J}f(x,y).$

Aufgabe H 75. *Modell: Multiplikatormethode nach Lagrange*
Das in den Präsenzübungen benutzte Modell stellt den Graphen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto xy^2$$

im Ausschnitt $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{x^2+y^2} \leqq \frac{6}{5}\right\}$ dar. Sie finden dieses Modell auch unter: www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/06
Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2+y^2-1$.
Sei $P = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Sei $Q = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. Es liegen P und Q in der Nullstellenmenge von g, also auf dem schwarzen Kreis.

(a) Bestimmen Sie einen Vektor v_P, der auf $\nabla g(P)$ senkrecht steht und Länge 1 hat. Bestimmen Sie einen Vektor v_Q, der auf $\nabla g(Q)$ senkrecht steht und Länge 1 hat.

(b) Bestimmen Sie $\partial_{v_P} f(P)$. Bestimmen Sie $\partial_{v_Q} f(Q)$. Interpretieren Sie diese Ergebnisse als Steigungen gewisser Tangenten an die blaue Kurve.

(c) Folgern Sie aus **(b)**, welcher der beiden Punkte P, Q eine kritische Stelle ist für die Methode nach Lagrange für lokale Extremstellen von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

(d) Ist P eine kritische Stelle von $f(x,y)$, wenn die Nebenbedingung keine Rolle mehr spielt?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)^\intercal$. Deshalb: $\nabla g(P) = \left(2\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^\intercal$ und $\nabla g(Q) = \left(2\sqrt{\frac{1}{2}}, 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^\intercal$.

Seien $v_P := (x_1, y_1)^\intercal$ und $v_Q := (x_2, y_2)^\intercal$. Es soll $\nabla g(P) \bullet v_P = 0$ und $\nabla g(Q) \bullet v_Q = 0$ gelten und die Vektoren v_P und v_Q sollen Länge 1 haben, also $x_1^2 + y_1^2 = 1$ und $x_2^2 + y_2^2 = 1$. Es folgt:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\sqrt{\frac{1}{3}}x_1 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}y_1 &=& 0 \\ 2\sqrt{\frac{1}{2}}x_2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}}y_2 &=& 0 \\ x_1^2 + y_1^2 &=& 1 \\ x_2^2 + y_2^2 &=& 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& -\sqrt{2}y_1 \\ x_2 &=& -y_2 \\ 2y_1^2 + y_1^2 &=& 1 \\ y_2^2 + y_2^2 &=& 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& -\sqrt{2}y_1 \\ y_1^2 &=& \frac{1}{3} \\ x_2 &=& -y_2 \\ y_2^2 &=& \frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Zum Beispiel: $v_P = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^\intercal$ und $v_P = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\,, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^\intercal$.

(b) Wir verwenden Satz 4.3.12. Es ist $\nabla f(x,y) = (y^2, 2xy)^\intercal$. Deshalb: $\nabla f(P) = \left(\dfrac{2}{3}\,, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^\intercal$ und $\nabla f(Q) = \left(\dfrac{1}{2}\,, 1\right)^\intercal$. Es folgt:

$$\partial_{v_P} f(P) = \nabla f(P) \bullet v_P = \left(\frac{2}{3}\,, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^\intercal \bullet \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^\intercal = 0$$

und

$$\partial_{v_q} f(Q) = \nabla f(Q) \bullet v_Q = \left(\frac{1}{2}\,, 1\right)^\intercal \bullet \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\,, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^\intercal = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Nach Konstruktion ist v_P ein Vektor der Länge 1 und in P tangential zur Nullstellenmenge von g, also tangential zum schwarzen Kreis. Es ist $\partial_{v_P} f(P)$ die Steigung der Tangenten an der Graphen von f an der Stelle P in Richtung v_P. Somit ist $\partial_{v_P} f(P)$ die Steigung der Tangenten an die blaue Kurve an der Stelle P. Genauso ist $\partial_{v_Q} f(Q)$ die Steigung der Tangenten an die blaue Kurve an der Stelle Q.

(c) Für die Methode nach Lagrange für lokale Extremstellen von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ hat die Tangente an die blaue Kurve an einer kritischen Stelle die Steigung 0. Somit ist P eine kritische Stelle, nicht aber Q.

(d) Nein, weil $\nabla f(P) = \left(\dfrac{2}{3}\,, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^\intercal \neq (0,0)^\intercal$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 76. *Parametrisierung, Potential, Kurvenintegral*

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 3x_1^2 x_2 \end{pmatrix}$.

Sei die Kurve K parametrisiert durch

$$C\colon [-1,3] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto C(t) := \begin{cases} (t,0) & \text{falls } t \in [-1,1) \\ (2-t, t-1) & \text{falls } t \in [1,2) \\ (2-t, 3-t) & \text{falls } t \in [2,3] \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass kein Potential für g existiert.

(b) Skizzieren Sie die Kurve K. Ist K eine geschlossene Kurve?

(c) Berechnen Sie $\oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}x$.

(d) Beweisen Sie nochmals **(a)** mittels Folgerung 5.3.14.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Satz 5.2.4 reicht es zu zeigen, dass $\operatorname{rot} g(x_1, x_2) \neq 0$ ist. Nach 5.2.3 folgt:

$$\operatorname{rot} g(x_1, x_2) = \frac{\partial(2x_1 - 2x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial(3x_1^2 x_2)}{\partial x_1} = -2 - 6x_1x_2 \neq 0.$$

(b)
- Für $t \in [-1,1)$ ist $x_2 = 0$, der zugehörige Teil von K ist daher die Strecke von $(-1,0)$ nach $(1,0)$.
- Für $t \in [1,2)$ ist $x_1 = 2-t$ und $x_2 = t-1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1$. Deshalb ist der zugehörige Teil von K die Strecke $x_2 = -x_1 + 1$ von $(1,0)$ nach $(0,1)$.
- Für $t \in [2,3]$ ist $x_1 = 2-t$ und $x_2 = 3-t \Rightarrow x_2 - x_1 = 1$. Deshalb ist der zugehörige Teil von K die Strecke $x_2 = x_1 + 1$ von $(0,1)$ nach $(-1,0)$.

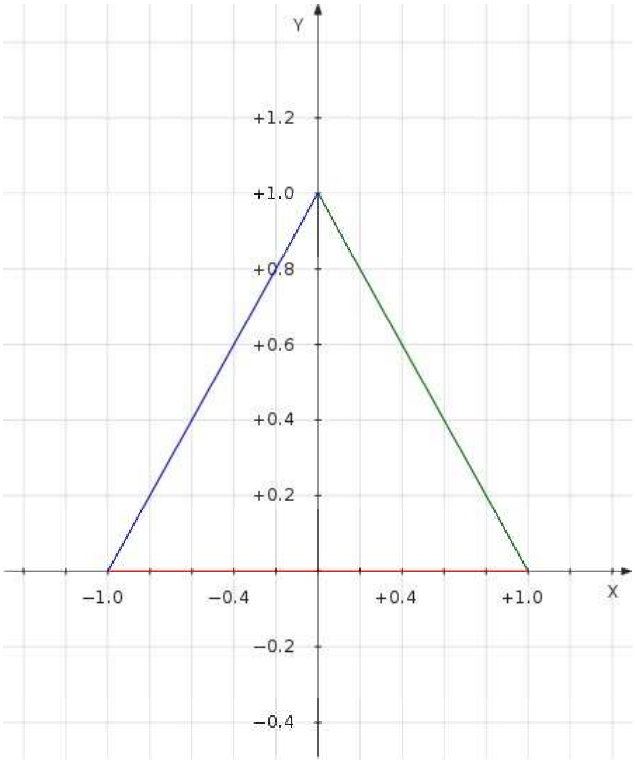


Abbildung 6: Die Kurve K

Nach Definition 5.3.8 ist K eine geschlossene Kurve, weil $C(-1) = (-1, 0) = C(3)$ ist.

(c)
$$\begin{aligned}
\oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} g(C(t)) \bullet C'(t)\ \mathrm{d}\,t + \int_{1}^{2} g(C(t)) \bullet C'(t)\ \mathrm{d}\,t + \int_{2}^{3} g(C(t)) \bullet C'(t)\ \mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t + \int_{1}^{2} \begin{pmatrix} 6-4t \\ 3(2-t)^2(t-1) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t + \\
&\quad + \int_{2}^{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 3(2-t)^2(3-t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-1}^{1} 2t\,\mathrm{d}\,t + \int_{1}^{2} 4t - 6 + 3(2-t)^2(t-1)\,\mathrm{d}\,t + \int_{2}^{3} 2 - 3(2-t)^2(t-3)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-1}^{1} 2t\,\mathrm{d}\,t + \int_{1}^{2} 3t^3 - 15t^2 + 28t - 18\,\mathrm{d}\,t + \int_{2}^{3} 3t^3 - 21t^2 + 48t - 34\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[2t^2\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{3t^4}{4} - 5t^3 + 14t^2 - 18t\right]_{1}^{2} + \left[\frac{3t^4}{4} - 7t^3 + 24t^2 - 34t\right]_{2}^{3} \\
&= 0 + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2.
\end{aligned}$$

(d) Wegen **(b)** ist K eine geschlossene Kurve. Aus **(c)** $\oint_K g(x) \bullet \mathrm{d}x = 2 \neq 0$ folgt nach 5.3.14, dass kein Potential für g existieren kann.

Aufgabe H 77. *Astroide: Länge und Kurvenintegral*

Es laufe die Kurve $A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; \sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_2^2} = 4 \right\}$ von $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie A.

(b) Parametrisieren Sie A mittels $C\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} c\cos(t)^e \\ d\sin(t)^e \end{pmatrix}$ für geeignete Werte $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob C eine reguläre Parametrisierung von A ist.

(c) Berechnen Sie die Länge der Kurve A.

(d) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2\cos(x_1) + x_2^2 \\ \sin(x_1) + 2x_1x_2 - 2x_2 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie das Potential U für g mit $U(0, 0) = 1$.
Berechnen Sie $\int_A g(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

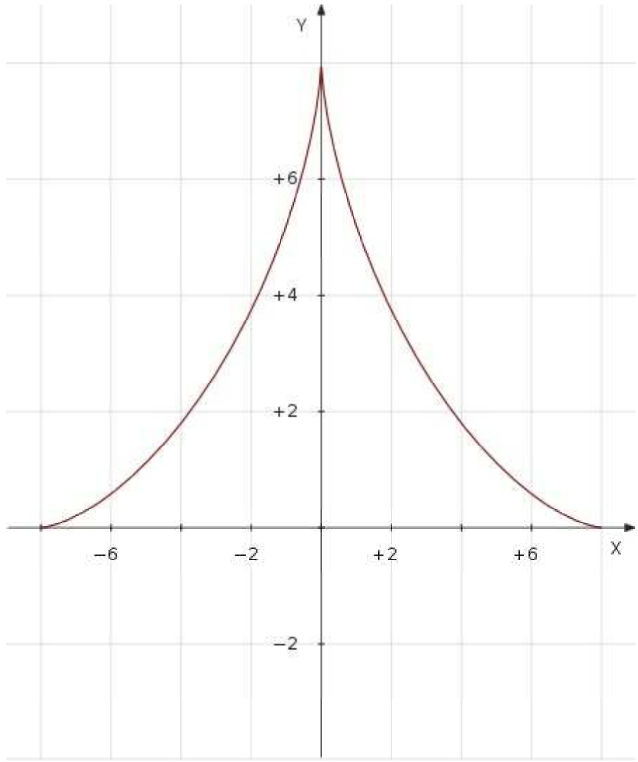


Abbildung 7: Die Kurve A

(b) Sei $C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 8\cos(t)^3 \\ 8\sin(t)^3 \end{pmatrix}$. Es ist

$$\sqrt[3]{((\cos(t)^3)^2} + \sqrt[3]{((\cos(t)^3)^2} = 4\cos(t)^2 + 4\sin(t)^2 = 4\underbrace{\left(\cos(t)^2 + \sin(t)^2\right)}_{1} = 4.$$

Zudem $C(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C(\pi) = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$. Deshalb ist C eine Parametrisierung von A. Es ist:
$C'(t) = \begin{pmatrix} -24\cos(t)^2\sin(t) \\ 24\sin(t)^2\cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow C'(0) = C'\left(\frac{\pi}{2}\right) = C'(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Aus Definition 3.3.1 (Nummer 1.) gilt, dass C keine reguläre Parametrisierung von A ist.

(c) Aus **(b)**: $C'(t) = \begin{pmatrix} -24\cos(t)^2\sin(t) \\ 24\sin(t)^2\cos(t) \end{pmatrix}$. Deshalb:

$$\begin{aligned}
|C'(t)| &= \sqrt{(-24\cos(t)^2\sin(t))^2 + (24\sin(t)^2\cos(t))^2} \\
&= \sqrt{24^2\cos(t)^4\sin(t)^2 + 24^2\sin(t)^4\cos(t)^2} \\
&= \sqrt{24^2\cos(t)^2\sin(t)^2 \cdot (\cos(t)^2 + \sin(t)^2)} \\
&= \sqrt{24^2\cos(t)^2\sin(t)^2 \cdot 1} \\
&= 24\,|\cos(t)\sin(t)|
\end{aligned}$$

Für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist $\sin(t) \geqq 0$ und $\cos(t) \geqq 0 \Rightarrow |C'(t)| = 24\sin(t)\cos(t)$.
Für $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ist $\sin(t) \geqq 0$ und $\cos(t) \leqq 0 \Rightarrow |C'(t)| = -24\sin(t)\cos(t)$.

Es folgt:

$$\begin{aligned}
L(A) &= \int_0^{\pi} |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 24\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 24\sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 12\sin(2t)\,\mathrm{d}\,t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 12\sin(2t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= [-6\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-6\cos(2t)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= -6\cos(\pi) + 6\cos(0) + 6\cos(2\pi) - 6\cos(\pi) \\
&= 24.
\end{aligned}$$

(d) $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} = x_2\cos(x_1) + x_2^2 \Rightarrow\ U(x_1,x_2) = \int x_2\cos(x_1) + x_2^2\,\mathrm{d}\,x_1$. Deshalb:

$$U(x_1,x_2) = x_2\sin(x_1) + x_2^2 x_1 + h(x_2).$$

Es folgt $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \sin(x_1) + 2x_1x_2 + h'(x_2)$.

Zudem $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \sin(x_1) + 2x_1x_2 - 2x_2$.

Deshalb: $h'(x_2) = -2x_2 \Rightarrow h(x_2) = -x_2^2 + c$, mit $c \in \mathbb{R}$. Es folgt:

$$U(x_1,x_2) = x_2\sin(x_1) + x_2^2x_1 - x_2^2 + c.$$

Es ist $U(0,0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow U(x_1,x_2) = x_2\sin(x_1) + x_2^2x_1 - x_2^2 + 1$.

Aus 5.3.10 gilt $\int_A g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = U(-8,0) - U(8,0) = 0$.

Aufgabe H 78. *Modell: Wendelfläche*

Das in den Präsenzübungen benutzte Modell stellt einen Ausschnitt des Graphen der dort eingeführten Funktion p dar. Sie finden dieses Modell auch unter:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Stroppel-Material/3D-Modelle/07

Auf der x_1-x_2-Ebene befindet sich ein Kreisflächenausschnitt. Er hat die äußeren Eckpunkte $\begin{pmatrix} 3\cos(\frac{\pi}{6}) \\ 3\sin(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3\cos(\frac{\pi}{3}) \\ 3\sin(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$, sowie die inneren Eckpunkte $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$.

(a) Parametrisieren Sie den Rand R des Kreisflächenausschnitts.
Im Modell ist R orange markiert.

(b) Sei $D := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Sei $U := p|_D : D \to \mathbb{R}$. Sei $g := \nabla U$. Berechnen Sie g.

(c) Berechnen Sie $\oint_R g(x) \bullet \mathrm{d}x$ unter Verwendung der Parametrisierung aus **(a)**.

(d) Berechnen Sie $\oint_R g(x) \bullet \mathrm{d}x$ unter Verwendung von **(b)**.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Seien $P_1 := \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix}$, $P_2 := \begin{pmatrix} 3\cos(\frac{\pi}{6}) \\ 3\sin(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix}$, $P_3 := \begin{pmatrix} 3\cos(\frac{\pi}{3}) \\ 3\sin(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$ und $P_4 := \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$.
Die Stellen P_1 und P_4 sind auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ und die Stellen P_2 und P_3 sind auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 9$.

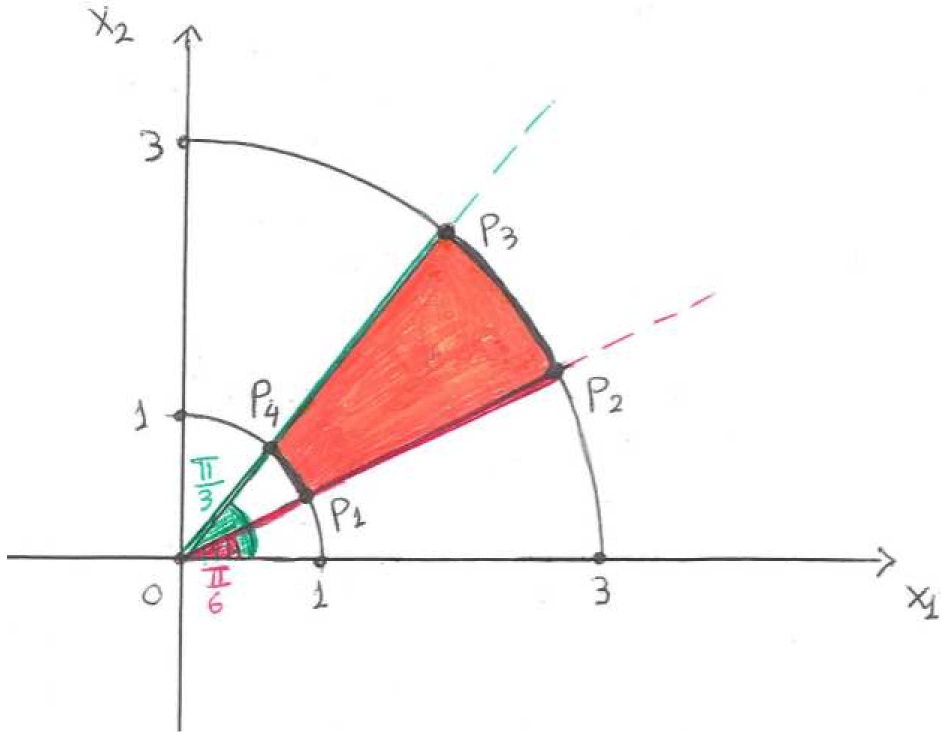


Abbildung 8: Der Rand R

- Die Strecke P_1P_2: Ein Parametrisierung ist

$$C_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto P_1 + t(P_2 - P_1) = \begin{pmatrix} (2t+1)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ (2t+1)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}.$$

- Der Kreisbogen P_2P_3: Ein Parametrisierung ist

$$C_2\colon [1,2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \\ 3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \end{pmatrix}.$$

- Die Strecke P_3P_4: Ein Parametrisierung ist

$$C_3\colon [2,3] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto P_3 + (t-2)(P_4 - P_3) = \begin{pmatrix} (t+1)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ (t+1)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

- Der Kreisbogen P_4P_1: Ein Parametrisierung ist

$$C_4\colon [3,4] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right) \end{pmatrix}.$$

Deshalb wird R parametrisiert durch

$$C\colon [0,4] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto C(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} (2t+1)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ (2t+1)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} & \text{falls } t \in [0,1) \\[2ex] \begin{pmatrix} 3\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \\ 3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \end{pmatrix} & \text{falls } t \in [1,2) \\[2ex] \begin{pmatrix} (t+1)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ (t+1)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} & \text{falls } t \in [2,3) \\[2ex] \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right) \end{pmatrix} & \text{falls } t \in [3,4] \end{cases}$$

(b) $(x_1,x_2) \in D \Rightarrow x_1 > 0$. Deshalb: $U(x_1,x_2) = p|_D(x_1,x_2) \overset{x_1 \geq 0}{=} \arctan(\frac{x_2}{x_1}) + \frac{\pi}{2}$.
Es ist

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{1+\frac{x_2^2}{x_1^2}} \cdot \left(-\frac{x_2}{x_1^2}\right) = -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{1}{1+\frac{x_2^2}{x_1^2}} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}.$$

Deshalb: $g(x_1,x_2) = \nabla U(x_1,x_2) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

(c)
$$\begin{aligned} \int_0^1 g(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \dfrac{-(2t+1)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{(2t+1)^2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + (2t+1)^2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)^2} \\[3ex] \dfrac{(2t+1)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{(2t+1)^2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + (2t+1)^2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)^2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^1 \frac{-2(2t+1)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2(2t+1)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{(2t+1)^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \int_0^1 \frac{0}{(2t+1)^2 \cdot 1}\,\mathrm{d}\,t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ähnlich:

$$\begin{aligned}
\int_2^3 g(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t &= \int_2^3 \begin{pmatrix} \dfrac{-(t+1)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{(t+1)^2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + (t+1)^2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} \\ \dfrac{(t+1)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{(t+1)^2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + (t+1)^2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_2^3 \frac{-(t+1)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + (t+1)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{(t+1)^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \frac{0}{(t+1)^2 \cdot 1}\,\mathrm{d}\,t \\
&= 0
\end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 g(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t &= \int_1^2 \begin{pmatrix} \dfrac{-3\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)}{9\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)^2 + 9\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)^2} \\ \dfrac{3\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)}{9\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)^2 + 9\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)^2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\frac{3\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \\ -\frac{3\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_1^2 \frac{\frac{9\pi}{6}\left(\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)^2\right)}{9\left(\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_1^2 \frac{\frac{9\pi}{6} \cdot 1}{9 \cdot 1}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_1^2 \frac{\pi}{6}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[\frac{\pi}{6}t\right]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Ähnlich:

$$\begin{aligned}
&\int_3^4 g(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_3^4 \begin{pmatrix} \dfrac{-\sin\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right)^2 + \sin\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right)^2} \\[2ex] \dfrac{\cos\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right)}{(\cos\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right)^2 + \sin\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right)^2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right) \\[2ex] -\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_3^4 \frac{-\frac{\pi}{6}\left(\sin\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right)^2 + \cos\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right)^2\right)}{\sin\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right)^2 + \cos\left(\frac{(5-t)\pi}{6}\right)^2}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_3^4 \frac{-\frac{\pi}{6}\cdot 1}{1}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[-\frac{\pi}{6}t\right]_1^2 \\
&= -\frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Deshalb:

$$\begin{aligned}
\oint_R g(x) \bullet \mathrm{d}x &= \int_0^1 g(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_1^2 g(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_2^3 g(C(t)) \bullet C'(t) + \\
&\quad + \int_3^4 g(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= 0 + \frac{\pi}{6} + 0 - \frac{\pi}{6} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d) U ist ein Potential für g (weil $g := \nabla U$). Nach 5.3.14 gilt $\oint_R g(x) \bullet \mathrm{d}x = 0$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe auf folgender Webseite.

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/