

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 71. Folgen und Häufungspunkte

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Häufungspunkte und geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen den Häufungspunkt konvergiert.

- (a) $\left(\frac{3(n+1)-n(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
(b) $\left(\frac{n}{2n+1} \sin\left(\pi \frac{n(-1)^n}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch Kürzen lässt sich die Folge umschreiben zu

$$\frac{3(n+1)-n(-1)^n}{n} = 3 + \frac{3}{n} - (-1)^n.$$

Wir können daher die Folge aufteilen in die Teilfolge aller geraden Folgeglieder

$$a_{2k} = 3 + \frac{3}{2k} - 1 = 2 + \frac{3}{2k} \rightarrow 2 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

und die Teilfolge aller ungeraden Folgeglieder

$$a_{2k+1} = 3 + \frac{3}{2k+1} - (-1) = 4 + \frac{3}{2k+1} \rightarrow 4 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Folglich sind die Häufungspunkte der Folge genau 2 und 4.

(b) Man betrachte zunächst die Folge $\left(\frac{n}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Es gilt hierfür:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Für $n = 2k$ gilt $\sin\left(\pi \frac{n(-1)^n}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0$ und damit folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

Für $n = 4k + 1$ gilt dagegen $\sin\left(\pi \frac{n(-1)^n}{2}\right) = -\sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = -1$ und damit $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{4k+1} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$.

Schließlich gilt für $n = 4k + 3$, dass $\sin\left(\pi \frac{n(-1)^n}{2}\right) = -\sin\left(2\pi k + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$. Damit folgt: $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{4k+3} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Wir haben nun alle Folgeglieder durch Teilfolge abgedeckt. Damit hat die Folge die Häufungspunkte 0, $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$.

Aufgabe H 72. Konvergenzkriterien für Reihen

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren.

- (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{k!} + (-1)^k \frac{1}{k}\right)$
(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10^k}{k!}$
(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^2+k+1}$
(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{3k}-4^k}{11^k}$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k!} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 3e$ konvergiert nach 1.8.6 und 1.9.3. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Damit konvergiert wieder nach 1.9.3 auch die vorliegende Reihe. Wir zeigen durch Widerspruch, dass die Reihe nicht absolut konvergieren kann. Denn wäre das der Fall, würde mit 1.9.3 und der Abschätzung

$$\frac{1}{k} = \left| (-1)^k \frac{1}{k} + \frac{3}{k!} - \frac{3}{k!} \right| \leq \left| (-1)^k \frac{1}{k} + \frac{3}{k!} \right| + \frac{3}{k!}$$

schon folgen, dass die harmonische Reihe konvergiert. Dies ist aber nicht der Fall (vgl. 1.8.5). Also muss unsere Annahme falsch gewesen sein.

- (b) Wir prüfen absolute Konvergenz mittels des Quotienten-Kriteriums. Es gilt:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{10^k}{k!}} \right| = \frac{10}{k+1} \rightarrow 0 < 1$$

für $k \rightarrow \infty$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe damit absolut.

- (c) Wir schätzen ab:

$$\frac{k-1}{k^2+k+1} \geq \frac{k-1}{3k^2} = \frac{1}{3k} - \frac{1}{3k^2} \geq \frac{1}{6k} \quad \text{für } k \geq 2.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k}$ divergiert (harmonische Reihe), folgt mit dem Minoranten-Kriterium, dass die Reihe nicht konvergieren kann.

- (d) Diese Reihe konvergiert wieder absolut. Mit dem Majoranten-Kriterium schätzen wir gegen die geometrische Reihe ab:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{2^{3k} - 4^k}{11^k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{3k}}{11^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{11} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{8}{11}} = \frac{11}{3}.$$

Aufgabe H 73. Potenzreihen

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

- (a) $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k (2x - 1)^k$
 (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Die Reihe lässt sich als geometrische Reihe umschreiben:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k (2x - 1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (6x - 3)^k.$$

Diese konvergiert genau dann, wenn $|6x - 3| < 1$ (vgl. 1.8.4). Dies ist erfüllt für $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$.

- (b) Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe absolut nach dem Majorantenkriterium mit der geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{\sqrt{k}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{1-|x|} - 1.$$

Für $x = -1$ erhalten wir die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, diese konvergiert nach dem Leibnizkriterium.

Für $x = 1$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

deshalb divergiert die Reihe in diesem Fall nach dem Minorantenkriterium.

Für $|x| > 1$ bilden die Folgeglieder in der Reihe keine Nullfolge, hier divergiert die Reihe also ebenfalls.

Insgesamt konvergiert die Reihe damit für $x \in [-1, 1)$.

Aufgabe H 74. Stetigkeit

Es seien zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^2 + x - 2 \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -2, \\ -1 & -2 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x-1} & x > 1. \end{cases}$$

Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen

- (a) f stetig ist.
- (b) g stetig ist.
- (c) $f \cdot g$ stetig ist.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) f ist eine Polynomfunktion und damit stetig in ganz $\mathbb{R}$ (z.B. nach den Grenzwertsätzen für Folgen).
- (b) g ist offenbar unstetig an der Stelle $x = -2$. Ebenso ist g unstetig an der Stelle $x = 1$, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq -1 = g(1),$$

obwohl $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

- (c) $f \cdot g$ ist automatisch stetig in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, weil sowohl f als auch g dort stetig sind. Die Stellen -2 und 1 müssen dagegen gesondert untersucht werden.

Wir zeigen die Stetigkeit in $x = -2$. Sei dafür $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige, gegen -2 konvergente Folge. Wir stellen zunächst fest, dass die Folge $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, da fast alle Folgeglieder entweder den Wert 2 oder den Wert -1 haben. Andererseits konvergiert $f(x_n) \rightarrow f(-2) = 0$ nach Stetigkeit von f . Damit folgt:

$$|f(x_n) \cdot g(x_n)| = |f(x_n)| \cdot |g(x_n)| \leq C |f(x_n)| \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ und eine Konstante $C > 0$.

In $x = 1$ ist $f \cdot g$ dagegen unstetig. Um das einzusehen, faktorisieren wir zunächst die Polynomfunktion $f: f(x) = (x+2)(x-1)$. Damit folgt, dass $f \cdot g$ für $x > 1$ die Form $f(x)g(x) = x+2$ hat. Wie oben überprüfen wir den Grenzwert für die Folge $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot g\left(\frac{n+1}{n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} + 2 = 3 \neq 0 = 0 \cdot (-1) = f(1)g(1).$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 75. Komplexe Wurzeln

Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = i$ und geben Sie sie in der Form $a + bi$ an.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Hat z in Polarkoordinaten die Form $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ so gilt

$$z^3 = r^3 (\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi))$$

und somit $r = 1$ und $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, vgl. 0.4.4. Wir stellen diese komplexen Zahlen nun wieder als reelle Zahlenpaare dar:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2}, \\ z_2 &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2}, \\ z_3 &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i. \end{aligned}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 76. Funktionsgrenzwerte

Bestimmen Sie folgende Funktionsgrenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^5 - 4x^3 + \pi}{2x^5 - 4x^2 + 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin(x^3)}{x^4}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\cos(x))^2 - 2}{\frac{x-5}{2x^3-1}}$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Satz 1.11.8 gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^5 - 4x^3 + \pi}{2x^5 - 4x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Es gilt für $x < 0$ wegen $\frac{2x^3-1}{x-5} > 0$ und $(\cos(x))^2 - 2 \leq -1$:

$$\frac{(\cos(x))^2 - 2}{\frac{x-5}{2x^3-1}} = ((\cos(x))^2 - 2) \cdot \frac{2x^3 - 1}{x - 5} \leq -\frac{2x^3 - 1}{x - 5} \rightarrow -\infty$$

wenn $x \rightarrow -\infty$ wieder nach Satz 1.11.8. Somit folgt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\cos(x))^2 - 2}{\frac{x-5}{2x^3-1}} = -\infty.$$

(c) Wir schreiben den Ausdruck wie folgt um:

$$\frac{\sin(x^3)}{x^4} = \frac{\sin(x^3)}{x^3} \cdot \frac{1}{x}.$$

Es gilt nun nach den Grenzwertsätzen 1.12.1 sowie Beispiel 1.12.5:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin(x^3)}{x^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

Außerdem ist $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ und somit folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin(x^3)}{x^4} = -\infty.$$

Aufgabe H 77. Stetigkeit

Sei $p \geq 0$ ein reeller Parameter. Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{3(2-x)} & \text{für } x < 2, \\ \sqrt{x^2 + px} - \sqrt{x^2 + 8x + 29} & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ in Abhängigkeit von p .

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f in Abhängigkeit von p .

(c) Für welche Werte des Parameters p ist f an der Stelle $x = 2$ stetig?

Lösungshinweise hierzu:**(a)** Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + px} - \sqrt{x^2 + 8x + 29} \right) = \frac{x^2 + px - (x^2 + 8x + 29)}{\sqrt{x^2 + px} + \sqrt{x^2 + 8x + 29}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(p-8)x + 29}{x \left(\sqrt{1 + \frac{p}{x}} + \sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{29}{x^2}} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p-8}{\sqrt{1 + \frac{p}{x}} + \sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{29}{x^2}}} + 0 \\
&= \frac{p-8}{2} = \frac{p}{2} - 4.
\end{aligned}$$

(b) Durch Polynomdivision ergibt sich für $x < 2$

$$f(x) = -\frac{1}{3} (x^2 + 3x + 2).$$

Diese Polynomfunktion hat Nullstellen

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2},$$

das heißt $x_1 = -1$ und $x_2 = -2$. In der Tat liegen beide Stellen in dem zulässigen Bereich $x < 2$. Wir untersuchen noch, ob f weitere Nullstellen für $x \geq 2$ hat. Es gilt dort dann

$$\sqrt{x_3^2 + px_3} = \sqrt{x_3^2 + 8x_3 + 29}$$

Da die Terme unter den Wurzeln auf beiden Seiten stets positiv sind, können wir äquivalent umformen zu $px_3 = 8x_3 + 29$ bzw. $x_3 = \frac{29}{p-8}$, falls $p \neq 8$. Es gilt dabei, dass $x_3 \geq 2$ ist genau dann, wenn $8 < p \leq \frac{45}{2}$. Genau in diesen Fällen hat f folglich mit $x_3 = \frac{29}{p-8}$ noch eine dritte Nullstelle.

(c) f ist stetig in $x = 2$ genau dann, wenn der linksseitige Grenzwert von f an der Stelle 2 mit dem Funktionswert $f(2)$ übereinstimmt [Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt das automatisch.]. Es gilt dabei

$$f(2) = \sqrt{4 + 2p} - \sqrt{4 + 16 + 29} = \sqrt{4 + 2p} - 7$$

und (vgl. **(b)**)

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{3} (x^2 + 3x + 2) = -\frac{1}{3} (4 + 6 + 2) = -4.$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich $\sqrt{4 + 2p} = 3$ bzw. $p = \frac{5}{2}$.**Aufgabe H 78.** ε - δ -Kriterium für Stetigkeit

Verwenden Sie das ε - δ -Kriterium, um zu zeigen, dass die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ an jeder Stelle $x_0 \geq 0$ stetig ist. Geben Sie insbesondere für beliebiges $x_0 \geq 0$ und $\varepsilon > 0$ ein δ_ε als Formel explizit an, so dass die ε - δ -Beschreibung erfüllt ist. Können Sie δ_ε unabhängig von x_0 wählen?

Lösungshinweise hierzu: Wir können $\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$ wählen. Es gilt dann für beliebige $x, x_0 \geq 0$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \sqrt{|x - x_0|} < \varepsilon.$$

Insbesondere kann δ_ε tatsächlich unabhängig von x_0 gewählt werden.

Um die erste Ungleichung einzusehen, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_0 \leq x$. Die Ungleichung ist dann erfüllt genau dann, wenn

$$\sqrt{x} \leq \sqrt{x_0} + \sqrt{x - x_0}.$$

Da beide Seiten nicht negativ sind, erhalten wir durch Quadrieren die äquivalente Ungleichung

$$x \leq x_0 + x - x_0 + 2\sqrt{x_0(x - x_0)} = x + 2\sqrt{x_0(x - x_0)},$$

welche trivialerweise erfüllt ist.

Hinweis: Zum Vergleich mit Alternativlösungen sei (ohne Beweis) erwähnt: Für $x_0 = 0$ ist obige Wahl von δ_ε optimal. Für $x_0 > 0$ und $\varepsilon < 2\sqrt{x_0}$ ist die optimale Wahl von δ_ε dagegen gegeben durch

$$\delta_{\varepsilon, x_0} = \varepsilon(2\sqrt{x_0} - \varepsilon).$$

Jedes größere δ_ε erfüllt die Anforderungen nicht.

Aufgabe H 79. Umkehrfunktion

Gegeben sei die Funktion $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-2x - x^2} & \text{falls } -2 \leq x < 0, \\ \sqrt{1 - x^2} - 1 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- Prüfen Sie, ob f stetig ist.
- Finden Sie möglichst große Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die Einschränkung $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ bijektiv ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} rechnerisch.
- Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine geeignete Skizze.

Lösungshinweise hierzu:

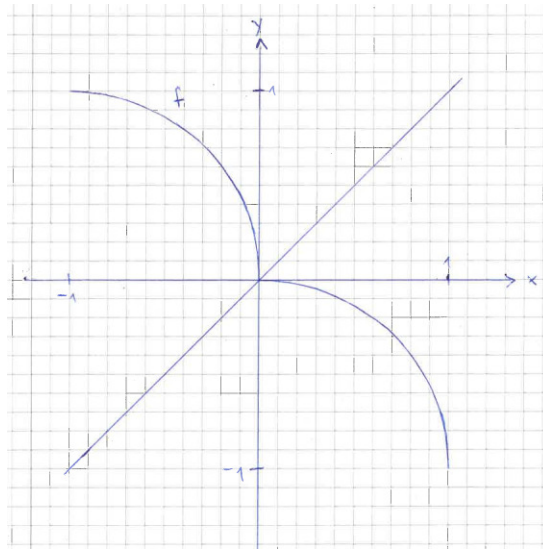
- Wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion genügt es zu prüfen, dass wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion genügt es zu prüfen, dass

$$\sqrt{-2 \cdot 0 - 0^2} = 0 = \sqrt{1 - 0^2} - 1.$$

Damit ist f auf $[-2, 1]$ stetig.

- Wir wählen $[a, b] = [-1, 1]$. In der Tat enthält jedes größere Intervall jedenfalls alle Punkte in $[-1, 0]$ sowie zumindest einen Punkt $x_0 \in [-2, -1)$. Es gilt aber $-2 - x_0 \in [-1, 0]$ und $f(-2 - x_0) = \sqrt{4 + 2x_0 - 4 - 4x_0 - x_0^2} = \sqrt{-2x_0 - x_0^2} = f(x_0)$. Damit kann f in keinem größeren Intervall als $[-1, 1]$ injektiv sein.

Andererseits ist f in $[-1, 1]$ tatsächlich injektiv: Seien $x, y \in [-1, 1]$ beliebig mit $f(x) = f(y)$. Falls $f(x) = f(y) < 0$, so folgt direkt, dass $x, y \geq 0$ und damit $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - y^2}$. Quadrieren führt zu $x^2 = y^2$ und (da x und y nicht negativ sind) $x = y$.

Abbildung 1: Skizze zu **H 79 (c)**

Ist dagegen $f(x) = f(y) \geq 0$, so folgt $x, y < 0$ und wir erhalten $-2x - x^2 = -2y - y^2$. Dies lässt sich umformen zu

$$0 = x^2 - y^2 + 2(x - y) = (x - y)(x + y + 2).$$

Nach Voraussetzung ist $x + y + 2 \neq 0$ und es folgt $x = y$.

Da f also auf $[-1, 1]$ stetig und injektiv ist, genügt es, f an den Rändern auszuwerten, um den Wertebereich $[c, d]$ zu erhalten. Es gilt $f(-1) = 1$ und $f(1) = -1$, somit ist $[c, d] = [-1, 1]$.

Durch Lösen der Gleichung $y = \sqrt{-2x - x^2}$ nach x erhält man (unter Beachtung der Bedingung $x \in [-1, 0)$), dass $x = \sqrt{1 - y^2} - 1$. Analog erhält man aus $y = \sqrt{1 - x^2} - 1$ genau $x = \sqrt{-2y - y^2}$. Insgesamt ist hier also $f^{-1} = f$.

- (c) Wir sehen in oben stehender Skizze, dass der Graph der Funktion f spiegelsymmetrisch an der ersten Winkelhalbierenden ist. Damit sind Funktion und Umkehrfunktion identisch.

Frischhaltebox

Aufgabe H 80. Häufungspunkte komplexer Folgen

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der komplexen Folge $\left(\frac{(-1)^n}{(1+i+i^n)^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ und geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen konvergiert.

Lösungshinweise hierzu: Wir bezeichnen obige Folge mit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und betrachten die Teilfolgen

$$\begin{aligned} a_{4k} &= \frac{(-1)^{4k}}{(1+i+i^{4k})^{4k}} = \frac{1}{(2+i)^{4k}}, \\ a_{4k+1} &= \frac{(-1)^{4k+1}}{(1+i+i^{4k+1})^{4k+1}} = -\frac{1}{(1+2i)^{4k+1}}, \\ a_{4k+2} &= \frac{(-1)^{4k+2}}{(1+i+i^{4k+2})^{4k+2}} = \frac{1}{i^{4k+2}} = -1, \\ a_{4k+3} &= \frac{(-1)^{4k+3}}{(1+i+i^{4k+3})^{4k+3}} = -\frac{1}{1^{4k+3}} = -1. \end{aligned}$$

Für die ersten beiden Teilfolgen gilt dabei für $k \rightarrow \infty$:

$$|a_{4k}| = \left| \frac{1}{2+i} \right|^{4k} = \frac{1}{5^{2k}} \rightarrow 0$$

und

$$|a_{4k+1}| = \left| \frac{1}{1+2i} \right|^{4k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}^{4k+1}} \rightarrow 0.$$

Da die obigen Teilfolgen alle Folgenglieder abdecken, sind damit die Häufungspunkte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau 0 und -1 .

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 81. Rechenregeln für Potenzreihen

Seien f und g die Reihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2 - 4z + 4}{4} \right)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} (z - 2)^n.$$

- (a) Schreiben Sie $f(z)$, $g(z)$ als Potenzreihe und geben sie deren Konvergenzradius an.
(b) Bestimmen Sie $(f + g)(z)$, $(f \cdot g)(z)$ als Potenzreihe und geben sie deren Konvergenzradius an.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Beginnen wir mit f :

$$\left(\frac{z^2 - 4z + 4}{4} \right)^n = \frac{1}{4^n} (z - 2)^{2n},$$

so dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} (z - 2)^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 2)^n,$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{2k}} & \text{wenn } n = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{wenn } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Wir berechnen den Radius mit dem Wurzeltest:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2n})^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2},$$

so dass $\rho_f = 2$. Für g ist die Berechnung einfacher:

$$\rho_g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\frac{1}{3}|}{|\frac{1}{3}|} = 1.$$

- (b) Wir haben $\rho_{f+g} = \rho_{fg} = \min(\rho_f, \rho_g) = 1$, und

$$(f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} (z - 2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - 2)^n,$$

mit

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3} & \text{wenn } n = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{3} & \text{wenn } n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Für das Produkt der Funktionen haben wir

$$(f \cdot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{a_k}{3} \right) \right] (z-2)^n.$$

Wir können die interne Summe wie folgt vereinfachen: n kann eindeutig entweder als $n = 2l$ oder $n = 2l + 1$ geschrieben werden, mit $l \in \mathbb{N}$. Dann

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_k}{3} \right) &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n a_k = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^l \frac{1}{2^{2k}} \\ &= \left(\frac{1}{3} \right) \frac{1 - \frac{1}{4^{l+1}}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{4}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4^{l+1}} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(4 - \frac{1}{4^l} \right). \end{aligned}$$

Aufgabe H 82. Potenzreihen und Gleichungen

Seien f und g die Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$.

- (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $g(z)$, wenn $\rho_f > 0$ ist.
 (b) Bestimmen Sie $c_n \in \mathbb{R}$ so dass $a_n = c_n a_1$, $n > 1$, wenn

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) + 2, \quad |z| < \min(\rho_f, \rho_g) \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n z^n$, dann $b_n = \tilde{b}_n$.

- (c) Schreiben Sie f und g als Transzendentalfunktionen (z. B.: exp, sin, log).

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir schreiben

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Seit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

wir haben

$$\begin{aligned}
 a_g &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} \\
 &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \\
 &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \\
 &= a_f.
 \end{aligned}$$

Daher $\rho_g = \frac{1}{a_g} = \frac{1}{a_f} = \rho_f$.

(b) Seit $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0^n) = a_0$, deshalb $a_0 = 0$. Nun setzen wir die Gleichung ein:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + 2.$$

Wir haben

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)a_{n+1} - a_n)z^n = 2,$$

so dass

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1}{2}a_1 \\
 a_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)}a_n.
 \end{aligned}$$

Daher können wir schreiben

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_1 &= 2 \\
 a_n &= \frac{1}{n!}a_1, \quad n > 1.
 \end{aligned}$$

(c) Ersetzen wir die Werte von a_n :

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} z^n = 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - 1 \right) = 2(\exp(z) - 1), \\
 g(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!} z^{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 2 \exp(z).
 \end{aligned}$$

Aufgabe H 83. Kreistangenten

Sie werden beauftragt, einen neuen Leuchtturm zu bauen. Wie hoch müssen Sie den Leuchtturm bauen, damit er auch für kleine Boote (bei denen sich die Perspektive der Besatzung näherungsweise auf Höhe der Wasseroberfläche befindet) bereits aus einer Entfernung von 25 km zu sehen ist? Unter der Entfernung verstehen wir hierbei die Distanz, die das Boot noch zurücklegen muss, um den Fußpunkt des Leuchtturms zu erreichen.

Hinweis: Für diese Aufgabe darf ausnahmsweise ein gewöhnlicher Taschenrechner verwendet werden. Sie können mit einem Erdumfang von 40 000 km rechnen.

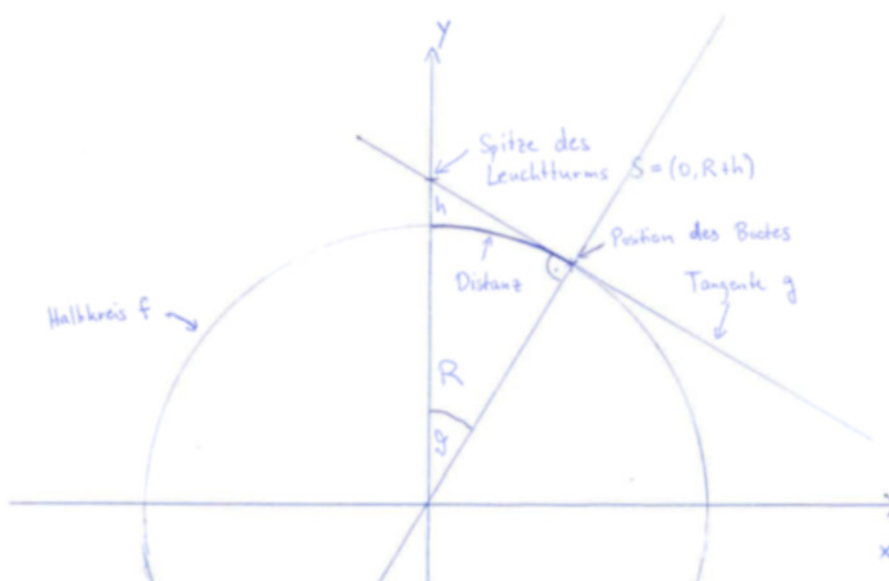


Abbildung 2: Skizze zu H 83

Lösungshinweise hierzu: Der Halbkreis f (siehe Skizze) hat die Funktionsgleichung

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2},$$

wobei $R = \frac{40\,000 \text{ km}}{2\pi} = \frac{20\,000 \text{ km}}{\pi}$ der Erdradius ist. Die Distanz beträgt nach Aufgabe 25 km, der Winkel ϑ im Bogenmaß ist also gegeben durch $\vartheta = 2\pi \cdot \frac{25 \text{ km}}{40\,000 \text{ km}} = \frac{\pi}{800}$. Das Boot befindet sich also an der Stelle $x_0 = R \sin(\vartheta)$, wenn die Spitze des Leuchtturms erstmals sichtbar wird. Nach 2.1.5 ist die Tangentengleichung für g an dieser Stelle gegeben durch

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -\frac{x_0(x - x_0)}{\sqrt{R^2 - x_0^2}} + \sqrt{R^2 - x_0^2}.$$

Diese Tangente soll die y -Achse bei $R + h$ schneiden, wobei h die (gesuchte) Höhe des Leuchtturms ist, d.h. wir setzen $g(0) = R + h$. Durch Einsetzen ergibt sich

$$R + h = \frac{x_0^2}{\sqrt{R^2 - x_0^2}} + \sqrt{R^2 - x_0^2} = \frac{R^2 \sin^2(\vartheta)}{R \cos(\vartheta)} + R \cos(\vartheta) = \frac{R}{\cos(\vartheta)}.$$

(Zu dieser Erkenntnis kann man mittels "Schulmethoden" auch gelangen, indem man das rechtwinklige Dreieck Mittelpunkt Erde – Boot – Leuchtturmsspitze betrachtet.)

Der Leuchtturm muss also mindestens

$$h = \frac{R}{\cos(\vartheta)} - R = R \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{800}\right)} - 1 \right) \approx 0.049 \text{ km} = 49 \text{ m}$$

hoch sein.

Aufgabe H 84. Stetigkeit von Umkehrfunktionen

Es sei $f : M \rightarrow S$ eine bijektive, stetige Funktion mit $M, S \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $M = [a, b]$ für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : S \rightarrow M$ stetig.

(b) Folgern Sie, dass der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Sei $y \in S$ beliebig. Wir zeigen, dass f^{-1} stetig in y ist. Sei dafür $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige gegen y konvergente Folge in S . Dann gilt: Die Folge $x_n = f^{-1}(y_n) \in [a, b]$ ist beschränkt und hat insbesondere nur reelle Häufungspunkte. Ist $x \in \mathbb{R}$ ein solcher Häufungspunkt, so gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Da das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen ist, muss $x \in [a, b]$ gelten. Aus der Stetigkeit von f folgt nun

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y.$$

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt also höchstens einen Häufungspunkt. Dieser ist gegeben durch $x = f^{-1}(y)$. Es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (vgl. 1.4.11, Nr. 4) oder anders ausgedrückt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y).$$

- (b) Sei $y_0 \in \mathbb{R}^+$. Dann ist die Exponentialfunktion

$$\exp : [\ln(y_0) - 1, \ln(y_0) + 1] \rightarrow \left[\frac{y_0}{e}, y_0 e\right]$$

stetig und bijektiv. Nach (a) ist die Umkehrfunktion $\ln$ stetig in $\left[\frac{y_0}{e}, y_0 e\right]$ und insbesondere im Punkt $y_0 \in \left(\frac{y_0}{e}, y_0 e\right)$. Da y_0 beliebig war, folgt die Aussage.

Frischhaltebox**Aufgabe H 85.** Eigenwerte und Eigenräume

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 53 & -36 \\ 72 & -49 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume.

Lösungshinweise hierzu: Die Eigenwerte von A sind gegeben durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(\lambda) = (53 - \lambda)(-49 - \lambda) + 72 \cdot 36 = \lambda^2 - 53\lambda + 49\lambda - 2597 + 2592 = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

Diese sind

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 5},$$

also $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -1$. Für einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert λ_1 gilt

$$0 = \begin{pmatrix} 53 - 5 & -36 \\ 72 & -49 - 5 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 48 & -36 \\ 72 & -54 \end{pmatrix} v_1,$$

also ist der zugehörige Eigenraum

$$L(v_1) = L\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$$

Analog gilt

$$0 = \begin{pmatrix} 53 + 1 & -36 \\ 72 & -49 + 1 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 54 & -36 \\ 72 & -48 \end{pmatrix} v_2,$$

mit Eigenraum

$$L(v_2) = L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 86. Ableitungen

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich sowie die erste Ableitung der Funktionen

(a) $f_1(x) = \ln(\cot(x)) + e^{3x}$,

(b) $f_2(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 9}}$,

(c) $f_3(x) = x^{e^x}$, und

(d) $f_4(x) = \operatorname{sech}((x+1)^2)$.

Lösungshinweise hierzu:

Kommentar: Seien $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar über den Mengen M_f bzw. M_g ; dann

- $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ sind differenzierbar über $M_f \cap M_g$;
- $f(x)/g(x)$ ist differenzierbar über $M_f \cap \{x \in M_g : g(x) \neq 0\}$.
- wenn $M \subseteq M_f$ und $f(M) \subseteq M_g$, dann ist $g \circ f$ auf M differenzierbar.

- (a) Die Funktion $x \mapsto \ln(x)$ ist definiert auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$; die Funktion $x \mapsto \cot(x)$ ist definiert auf $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{N}\}$ und ist positiv für $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : n\pi < x < n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$. Beide Funktionen sind über ihre entsprechenden Domänen differenzierbar, also ist die Domäne von $x \mapsto \log(\cot(x))$ über die Menge M_1 differenzierbar. Die Funktion $x \mapsto e^{3x}$ ist differenzierbar über $\mathbb{R}$. Daher ist die Funktion f_1 über $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : n\pi < x < n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$ differenzierbar. Mit Hilfe der Kettenregel berechnen wir die Ableitung:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \left(\frac{1}{\cot(x)} \right) (-\csc^2(x)) + 3e^{3x} \\ &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) \left(\frac{-1}{\sin^2(x)} \right) + 3e^{3x} \\ &= -\sec(x) \csc(x) + 3e^{3x}. \end{aligned}$$

- (b) Für die Definition von f_2 ist es notwendig, dass $\sqrt{x^2 - 9} \neq 0$ ist, also $x \neq 3$. Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist differenzierbar für $x > 0$, also ist $x \mapsto \sqrt{x^2 - 9}$ differenzierbar auf $M_2 = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Daher ist f_2 differenzierbar über $M_2 = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, und

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{2x\sqrt{x^2 - 9} - \frac{1}{2}(x^2 - 9)^{-\frac{1}{2}}(2x)(x^2 + 1)}{x^2 - 9} \\ &= \frac{1}{x^2 - 9} \left(\frac{2x(x^2 - 9) - x^3 - x}{\sqrt{x^2 - 9}} \right) \\ &= \frac{x(x^2 - 19)}{(x^2 - 9)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

- (c) Nach Definition 2.2.7 ist $x^{e^x} = e^{e^x \ln(x)}$, wobei x positiv sein muss. Da $x \mapsto \ln(x)$ für $x > 0$ differenzierbar ist und $x \mapsto e^x$ über den reellen Zahlen differenzierbar ist, ist

$x \mapsto x^{e(x)}$ differenzierbar auf $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Durch die Kettenregel und die Produktregel:

$$\begin{aligned} f'_3(x) &= e^{e^x \ln(x)} \left(e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x} \right) \\ &= e^x x^{e^x} \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

- (d) Da $x \mapsto \cosh(x)$ immer positiv und differenzierbar ist, und $x \mapsto (x+1)^2$ immer differenzierbar ist, ist $x \mapsto (\operatorname{sech}(x+1)^2)$ über $M_4 = \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist

$$\begin{aligned} f'_4(x) &= -\operatorname{sech}((x+1)^2) \tanh((x+1)^2) (2)(x+1) \\ &= -2(x+1) \operatorname{sech}((x+1)^2) \tanh((x+1)^2). \end{aligned}$$

Aufgabe H 87. Mehrfaches Ableiten

Seien $a, b, \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie jeweils eine Formel für die angegebene n -te Ableitung, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.

- (a) $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (\sin(ax) + \cos(ax)),$

Hinweis: Additionstheoreme für Sinus und Kosinus.

- (b) $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (xe^x + a^{-x}),$ wobei $x > 0,$

- (c) $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (f(x)g(x)),$ wobei f und g unendlich oft differenzierbare Funktionen sind, und

- (d) $\left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{a-bx},$ wobei $x \neq \frac{a}{b}.$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Mit Hilfe des Hinweises schreiben wir:

$$\sin(ax) + \cos(ax) = \sqrt{2} \sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right).$$

Wir berechnen ein paar Ableitungen und verwenden die trigonometrische Identität $\cos(\vartheta) = \sin(\vartheta + \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{2} \sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right) \right) &= a\sqrt{2} \cos\left(ax + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}a \sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(\sqrt{2} \sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right) \right) &= \sqrt{2}a^2 \cos\left(ax + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}a^2 \sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Wir schlagen die folgende Formel vor

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (\sin(ax) + \cos(ax)) = \sqrt{2}a^n \sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Jetzt benutzen wir die Induktion. Wenn $n = 0,$

$$\sqrt{2}a^0 \sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + (0)\pi\right) = \sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right).$$

Wir nehmen an, dass die vorgeschlagene Formel für einige $n \geq 0$ gilt. Dann verwenden wir die Identität $\cos(\vartheta) = \sin(\vartheta + \frac{\pi}{2})$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \left(\sqrt{2} \sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right)\right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\sqrt{2} \sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\sqrt{2} a^n \sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{2} a^{n+1} \cos\left(ax + \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} a^{n+1} \sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} a^{n+1} \sin\left(ax + \frac{\pi}{4} + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

und die Induktion ist abgeschlossen.

Kommentar: Es ist möglich, direkt vorzugehen; dies führt zu 4-Fällen:

$$\begin{aligned} a^n(\sin(ax) + \cos(ax)), \quad n &= 4k, \\ a^n(\cos(ax) - \sin(ax)), \quad n &= 4k + 1, \\ a^n(-\sin(ax) - \cos(ax)), \quad n &= 4k + 2, \\ a^n(-\cos(ax) + \sin(ax)), \quad n &= 4k + 3. \end{aligned}$$

(b) Wir schlagen die folgende Formel

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (xe^x + a^{-x}) = ne^x + xe^x + (-\ln(a))^n a^{-x}.$$

vor. Wenn $n = 0$,

$$ne^x + xe^x + (-\ln(a))^n a^{-x} = xe^x = (xe^x + a^{-x})$$

der Beweis für den Basisfall. Nehmen wir nun an, dass dies für $n > 0$ gilt; dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} (xe^x + a^{-x}) &= \left(\frac{d}{dx}\right) \left(\frac{d}{dx}\right)^n (xe^x + a^{-x}) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right) (ne^x + xe^x + (-\ln(a))^n a^{-x}) \\ &= ne^x + e^x + xe^x + (-\ln(a))^n (-\ln(a)) a^{-x} \\ &= (n+1)e^x + xe^x + (-\ln(a))^{n+1} a^{-x} \end{aligned}$$

womit die Induktion abgeschlossen ist.

(c) Der Klarheit halber verwenden wir die Notation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = f^{(n)}(x),$$

wenn dies sinnvoll ist. Nachdem wir einige Ableitungen berechnet und ein Muster erkannt haben, schlagen wir die Formel vor:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

Für $n = 0$ wir haben

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{0-k} f(x) \right) \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^k g(x) \right) = f^{(0)}(x) g^{(0)}(x) = f(x) g(x).$$

Dies zeigt, dass der Basisfall gilt. Dies zeigt, dass der Basisfall gilt. Nehmen wir nun an, die Formel gilt für $n \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (f(x)g(x)) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d}{dx} (f^{n-k}(x)g^k(x)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{n+1-k}(x)g^k(x) + f^{n-k}(x)g^{k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{n+1-k}(x)g^k(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{n-k}(x)g^{k+1}(x) \\ &= \binom{n}{0} f^{n+1}(x)g(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{n+1-k}(x)g^k(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{n-k}(x)g^{k+1}(x) + \binom{n}{n} f(x)g^{n+1}(x) \\ &= \binom{n+1}{0} f^{n+1}(x)g(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{n+1-k}(x)g^k(x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{n+1-k}(x)g^k(x) + \binom{n+1}{n+1} f(x)g^{n+1}(x) \\ &= \binom{n+1}{0} f^{n+1}(x)g(x) + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{n+1-k}(x)g^k(x) \\ &\quad + \binom{n+1}{n+1} f(x)g^{n+1}(x) \\ &= \binom{n+1}{0} f^{n+1}(x)g(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{n+1-k}(x)g^k(x) \\ &\quad + \binom{n+1}{n+1} f(x)g^{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{n+1-k}(x)g^k(x), \end{aligned}$$

und die Induktion ist abgeschlossen.

(d) Wir schlagen die folgende Formel

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{1}{a-bx} \right) = \frac{n!b^n}{(a-bx)^{n+1}}.$$

vor. Wenn $n = 0$,

$$\frac{n!b^n}{(a-bx)^{n+1}} = \frac{0!b^0}{(a-bx)^{0+1}} = \frac{1}{(a-bx)}$$

der Beweis für den Basisfall. Nehmen wir nun an, dass dies für $n > 0$ gilt; dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{a-bx}\right) &= \left(\frac{d}{dx}\right) \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{a-bx}\right) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right) \left(\frac{n!b^n}{(a-bx)^{n+1}}\right) \\ &= n!b^n(-(n+1))(a-bx)^{-(n+2)}(-b) \\ &= (n+1)!b^{n+1}(a-bx)^{-(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)!b^{n+1}}{(a-bx)^{n+2}} \end{aligned}$$

womit die Induktion abgeschlossen ist.

Aufgabe H 88. Kettenregel

- (a) Seien $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, $f(x) = e^{y(x)}$ und $g(x) = x^2 + 2x - 1$. Bestimmen Sie f' , $(g \circ y)'$ und $(g \circ f)'$.
- (b) Die Gleichung $x^3y^3 + xy = 4$, mit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $xy \neq 0$, definiert implizit eine differenzierbare Funktion, d. h. $y = y(x)$. Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel y' . (Die Antworten werden sowohl x als auch y enthalten.)

Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung auf beiden Seiten der Gleichung und lösen Sie nach y' auf.

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{y(x)}y'(x) \\ (g \circ y)'(x) &= g'(y(x))y'(x) \\ &= (2(x+1) \circ y(x))y'(x) \\ &= 2(y(x)+1)y'(x) \\ (g \circ f)'(x) &= g'(f(x))f'(x) \\ &= (2(x+1) \circ f(x))f'(x) \\ &= 2(e^{y(x)}+1)y'(x)e^{y(x)}y'(x). \end{aligned}$$

(b) Wir haben $\frac{d}{dx}x^3y^3 + xy = \frac{d}{dx}(4)$, oder

$$3x^2y^3 + x^3(3y^2y'(x)) + y + xy'(x) = 0.$$

Dann

$$x(3x^2y^2 + 1)y'(x) = -y(3x^2y^2 + 1).$$

Da $x^2y^2 + 1 \neq 0$ ist, können wir dividieren und erhalten $xy' = -y$. Wenn $x \neq 0$ (beachte $xy \neq 0$ impliziert $x \neq 0$), dann

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Aufgabe H 89. Umkehrfunktionen der Hyperbel-Funktionen

Betrachten Sie die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned}\cosh: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \sinh: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ und} \\ \tanh: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.\end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die Maximale Menge M so, dass die Funktion

$$\operatorname{artanh}: M \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \tanh^{-1}(x)$$

definiert ist.

- (b) Berechnen Sie $\frac{d}{dx} \operatorname{artanh}(x) \big|_{x=x_0}$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

Hinweis: Satz 2.3.1 kann hilfreich sein.

- (c) Sei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Berechnen Sie $\frac{d}{dx}(\operatorname{artanh} \circ f)(x)$, $x \neq 0$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Die erforderliche Menge ist $M = (-1, 1)$. Wir berechnen sie in 2 Schritten. Zuerst bestimmen wir die maximale Menge M_0 so, dass $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow M_0$ eine Surjektion ist (äquivalent zur Bestimmung von $\tanh(\mathbb{R})$). Dann müssen wir bestimmen, ob $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow M_0$ eine Injektion von $\mathbb{R}$ nach M_0 ist; in diesem Fall ist $M = M_0$. Andernfalls müssen wir M_0 auf eine kleinere Menge M'_0 beschränken, so dass $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow M'_0$ sowohl surjektiv als auch injektiv ist, $M = M'_0$ und $\operatorname{artanh}: M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist.

Um M_0 zu bestimmen, untersuchen wir, unter welchen Bedingungen für y die Gleichung $y = \tanh(x)$ für x gelöst werden kann. Um die Berechnung zu erleichtern, sei $z = e^x$. Wir lösen dann $y = \frac{z-z^{-1}}{z+z^{-1}}$:

$$\begin{aligned}y &= \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \\ y(z^2 + 1) &= z^2 - 1 \\ y + 1 &= z^2(1 - y) \\ z^2 &= \frac{1 + y}{1 - y}.\end{aligned}$$

Da $z > 0$, gilt

$$x = \ln(z) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right).$$

Dies ist gut definiert, sofern $\frac{1+y}{1-y} > 0$, also $y \in (-1, 1)$. Daher ist $x \mapsto \tanh(x)$ eine Surjektion von $\mathbb{R}$ nach $M_0 = (-1, 1)$.

Wir prüfen nun, ob $x \mapsto \tanh(x)$ von $\mathbb{R}$ nach M_0 injektiv ist. Nehmen wir an, $\tanh(x_1) = \tanh(x_2)$. Wie zuvor sei $z_1 = e^{x_1}$ und $z_2 = e^{x_2}$. Dann vereinfacht sich $\tanh(x_1) = \tanh(x_2)$ zu $2(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 0$. Da $z_1, z_2 > 0$ die einzige Lösung

$z_1 = z_2$ ist, und, da $x \mapsto e^x$ injektiv ist so, dass $x_1 = x_2$, folgern wir, dass $x \mapsto \tanh(x)$ injektiv ist und $M = M_0 = (-1, 1)$. **Alternatives Argument für Injektivität:** Beachten Sie, dass $\operatorname{sech}^2(x) = 2/(e^x + e^{-x}) > 0$ und $\frac{d}{dx} \tanh(x) = \operatorname{sech}^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, also ist $x \mapsto \tanh(x)$ streng monoton über $\mathbb{R}$. Infolgedessen ist sie injektiv (sehen Sie **Satz 1.13.11** und **2.4.8**).

Daher ist $M = (-1, 1)$, $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ ist bijektiv, und $\operatorname{artanh} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tanh^{-1}(x)$ ist definiert.

(b) Sei $y_0 = \tanh(x_0)$. Mit Hilfe des **Satz 2.3.1**,

$$\frac{d}{dy} \operatorname{artanh}(y_0) = \frac{1}{\frac{d}{dx} \tanh(x_0)} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2(x_0)} = \cosh^2(x_0).$$

Jetzt vereinfachen wir:

$$\begin{aligned} \cosh^2(x_0) &= \left(\frac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(e^{2x_0} + 1)^2}{4e^{2x_0}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+y_0}{1-y_0} + 1 \right)^2}{\left(4 \left(\frac{1+y_0}{1-y_0} \right) \right)} \\ &= \frac{4}{(1-y_0)^2} \frac{(1-y_0)}{4(1+y_0)} \\ &= \frac{1}{1-y_0^2}. \end{aligned}$$

Daher

$$\frac{d}{dx} \operatorname{artanh}(x) \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{1-x_0^2}, \quad x_0 \in (-1, 1).$$

(c) Erstens: $-1 < f(x) < 1$ für $x \neq 0$, so dass $(\operatorname{artanh} \circ f)(x)$ nur definiert ist, wenn $x \neq 0$. Wir Berechnen

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nach der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\operatorname{artanh} \circ f)(x) &= \frac{d}{dx} (\operatorname{artanh}(f(x))) f'(x) \\ &= \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2} \right) \left(\frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \left(\frac{1+x^2}{x^2} \right) \left(\frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

die erforderliche Ableitung.

Frischhaltebox**Aufgabe H 90.** *Faktorisierung von Polynomen*

Zerlegen Sie das Polynom $p(z) = z^3 + 3z^2 + z - 5$ in Linearfaktoren (über $\mathbb{C}$).

Hinweis: $p(z)$ hat eine ganzzahlige Nullstelle.

Lösungshinweise hierzu: Da $p(1) = 0$, $(z - 1)$ ist ein Faktor. Durch lange Division erhalten wir $p(z) = (z - 1)(z^2 + 4z + 5)$. Wenn wir nun $z^2 + 4z + 5 = 0$ mit der quadratischen Formel lösen, erhalten wir $z_1 = -2 + i$ und $z_2 = -2 - i$, also $p(z) = (z - 1)(z - (-2 + i))(z - (-2 - i)) = (z - 1)(z + (2 - i))(z + (2 + i))$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 91. Funktionsgrenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Ist die Regel von l'Hospital hilfreich?

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, $a > 0$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{\tan(x) - x}$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0-0} |\sin(x)|^{1 - \cos(x)}$,
- (d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} a^x - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ also können wir die Regel von L'Hospital anwenden. Es folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} a^x \ln(a) = \ln(a).$$

- (b) Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} x - \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) - x = 0$ also können wir die Regel von L'Hospital anwenden. Wir wenden die Regel von L'Hospital an und nutzen trigonometrische Identitäten, um den Grenzwert wie folgt zu berechnen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{\tan(x) - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sec^2(x) - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x)(1 - \cos(x))}{1 - \cos^2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x)(1 - \cos(x))}{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x)}{1 + \cos(x)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- (c) Da $\sin(x) < 0$ mit $x \rightarrow 0-0$, $|\sin(x)| = -\sin(x)$. Nun ist $\lim_{x \rightarrow 0-0} -\sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (1 - \cos(x)) = 0$, was eine unbestimmte Form ist, aber $\lim_{x \rightarrow 0-0} (-\sin(x))^{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0-0} e^{(1 - \cos(x)) \ln(-\sin(x))}$. Wir fahren fort, den inneren Grenzwert zu berechnen. Da $\lim_{x \rightarrow 0-0} \ln(-\sin(x)) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow 0-0} (1 - \cos(x)) = 0$, können wir die Regel von L'Hospital auf $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\ln(-\sin(x))}{(1 - \cos(x))^{-1}}$ anwenden, gefolgt von trigonometrischen Manipulatio-

nen:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\ln(-\sin(x))}{(1 - \cos(x))^{-1}} &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\frac{-\cos(x)}{-\sin(x)}}{(-1)(1 - \cos(x))^{-2} \sin(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\cos(x)(1 - \cos(x))^2}{-\sin^2(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\cos(x)(1 - \cos(x))^2}{\cos^2(x) - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\cos(x)(1 - \cos(x))^2}{(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\cos(x)(1 - \cos(x))}{(\cos(x) + 1)} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Deshalb $\lim_{x \rightarrow 0-0} |\sin(x)|^{1-\cos(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0-0} (1-\cos(x)) \ln(-\sin(x))} = e^0 = 1$ ist.

- (d) Es gilt $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2h^3 = 0$ also können wir die Regel von L'Hospital anwenden. Tatsächlich werden wir sie 3-mal anwenden, wobei wir bei jedem Schritt überprüfen, ob die Bedingungen für die Regel erfüllt sind. Wir haben

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(x+2h) - 2f'(x+h) - 2f'(x-h) + 2f'(x-2h)}{6h^2} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4f''(x+2h) - 2f''(x+h) + 2f''(x-h) - 4f''(x-2h)}{12h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8f'''(x+2h) - 2f'''(x+h) - 2f'''(x-h) + 8f'''(x-2h)}{12} \\
 &= f'''(x),
 \end{aligned}$$

also ist das Limit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} = f'''(x)$.

Aufgabe H 92. Mittelwertsatz

Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{aligned}
 f: (1, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 2x + \sqrt{x-1}, \\
 g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^{\frac{1}{3}}.
 \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie für f eine Zwischenstelle $\xi \in (5, 10)$ so, dass $f'(\xi) = \frac{f(10) - f(5)}{10 - 5}$ ist.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Konstanten $c(n)$ und $C(n)$ so, dass die folgende Grenze gilt:

$$c(n) < g(n+1) - g(n) < C(n).$$

- (c) Ein Autofahrer fährt durch eine Kleinstadt mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 50 km/h. Die Stadt ist 5 km groß. Am Ortseingang zeigt der Tachometer 46 km/h an und die Uhr zeigt 10 : 00 Uhr, am Ortsausgang zeigt der Tachometer 40 km/h an und die Uhr zeigt 10 : 06 Uhr. Einige Wochen später erhält der Fahrer einen Strafzettel per Post. Erklären Sie das.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir berechnen die Ableitung: $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$. Wir müssen die folgende Gleichung lösen

$$f'(\xi) = \frac{f(10) - f(5)}{10 - 5} = \frac{2(10) + \sqrt{9} - [2(5) + \sqrt{4}]}{4} = \frac{11}{5},$$

oder

$$2 + \frac{1}{2\sqrt{\xi-1}} = \frac{11}{5}.$$

Daher $\xi = \frac{29}{4}$ ist. Beachten Sie $5 < \xi < 10$.

- (b) Wie haben $g'(x) = 1/3x^{\frac{2}{3}}$. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf $g(x)$ im Intervall $[n, n+1]$,

$$\frac{g(n+1) - g(n)}{n+1 - n} = g'(\xi).$$

für einige $\xi \in (n, n+1)$. Nun berechnen wir Schranken für die Ableitung, d.h. $c(n) = \min\{g'(x) : x \in [n, n+1]\} \leq g'(\xi) \leq \max\{g'(x) : x \in [n, n+1]\}$. Da $g'(x)$ monoton abnehmend ist, $g'(n+1) \leq g'(\xi) \leq g'(n)$, also

$$c(n) = g'(n+1) = \frac{1}{3(n+1)^{\frac{2}{3}}},$$

und

$$C(n) = g'(n) = \frac{1}{3(n)^{\frac{2}{3}}}.$$

- (c) Sei $x(t)$ (in km) die Position des Autos zur Zeit t (in min), mit $x(0) = 0$, dem Eingang der Stadt, und $x(6) = 5$, dem Ende der Stadt. Die Ableitung von x ist die Geschwindigkeit, und nach dem Mittelwertsatz gibt es einige $\tau \in (0, 5)$, so dass $x'(\tau) = \frac{x(6) - x(0)}{6 - 0} = \frac{5}{6}$ km/h; aber $\frac{5}{6}$ km/hr = 50 km/h, die Höchstgeschwindigkeit. Der Fahrer erhielt einen Strafzettel wegen Überschreitung der Geschwindigkeitsbegrenzung.

Aufgabe H 93. Taylorpolynome

Gegeben sind die Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto e^{-x},$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \arctan(x),$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (f(x) - 1)(g(x) - x).$$

- (a) Bestimmen Sie $T_4(f, x, 0)$, $T_4(g, x, 0)$, $R_4(f, x, 0)$ und $R_4(g, x, 0)$.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (a), $T_4(h, x, 0)$, und $R_4(h, x, 0)$. Geben Sie $R_4(h, x, 0)$ in Abhängigkeit von den Ableitungen $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (g(x) - x)$ an (ohne weiter zu vereinfachen).
- (c) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir haben

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und

$$\begin{aligned} g^{(1)}(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ g^{(2)}(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ g^{(3)}(x) &= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \\ g^{(4)}(x) &= \frac{24x(x^2-1)}{(x^2+1)^4} \\ g^{(5)}(x) &= \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(x^2+1)^5}. \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom vom 4-Grad und der entsprechende Rest für die Funktion f sind:

$$\begin{aligned} T_4(f, x, 0) &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}, \\ R_4(f, x, 0) &= -\frac{e^{\vartheta_{x,0}x}}{120}x^5, \quad 0 < \vartheta_{x,0} < 1. \end{aligned}$$

Für die Funktion g werten wir zunächst die Ableitungen bei $x = 0$ aus:

$$\begin{aligned} g^{(0)}(0) &= 0 \\ g^{(1)}(0) &= 1 \\ g^{(2)}(0) &= 0 \\ g^{(3)}(0) &= -2 \\ g^{(4)}(0) &= 0 \\ g^{(5)}(0) &= 24; \end{aligned}$$

dann

$$\begin{aligned} T_4(g, x, 0) &= \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 \\ &= x - \frac{x^3}{3}, \\ R_4(g, x, 0) &= \frac{5(\vartheta_{x,0}x)^4 - 10(\vartheta_{x,0}x)^2 + 1}{5((\vartheta_{x,0}x)^2 + 1)^5}x^5, \quad 0 < \vartheta_{x,0} < 1. \end{aligned}$$

(b) Wir haben

$$\begin{aligned}
 (f(x) - 1)(g(x) - x) &= (T_4(f, x, 0) + R_4(f, x, 0) - 1)(T_4(g, x, 0) + R_4(g, x, 0) - 1) \\
 &= (1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_4(f, x, 0) - 1)(x - \frac{x^3}{3} - R_4(g, x, 0) - x) \\
 &= (-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_4(f, x, 0))(-\frac{x^3}{3} - R_4(g, x, 0)) \\
 &= \frac{x^4}{3} + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_4(f, x, 0))\left(-\frac{x^3}{3}\right) \\
 &\quad - (-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_4(f, x, 0))R_4(g, x, 0) \\
 &= \frac{x^4}{3} + \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_4(f, x, 0)\right)\left(-\frac{x^3}{3}\right)\right. \\
 &\quad \left. - (-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R_4(f, x, 0))R_4(g, x, 0)\right],
 \end{aligned}$$

und der Term in Klammern entspricht Polynomen vom Grad 5 oder höher, also

$$T_4(h, x, 0) = \frac{x^4}{3}.$$

Um das Restglied zu berechnen, rufen wir die Formel der **Aufgabe H 89 (d)** auf:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (fg)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x);$$

Let $f_1(x) = f(x) - 1$, $g_1(x) = g(x) - x$; then

$$\begin{aligned}
 f_1^{(n)}(x) &= f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}, \quad n \geq 1, \\
 g_1^{(1)}(x) &= g^{(1)}(x) - 1, \\
 g_1^{(n)}(x) &= g^{(n)}(x), \quad n \geq 2,
 \end{aligned}$$

und $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ Wir ersetzen jetzt:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dx}\right)^5 (f_1 g_1)(x) &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} f_1^{(k)}(x) g_1^{(5-k)}(x) \\
 &= \sum_{k=1}^5 \binom{5}{k} f_1^{(k)}(x) g_1^{(5-k)}(x) + \binom{5}{0} (e^{-x} - 1) g_1^{(5)}(x) \\
 &= \sum_{k=1}^5 \binom{5}{k} (-1)^k e^{-x} g_1^{(5-k)}(x) + \binom{5}{0} (e^{-x}) g_1^{(5)}(x) - g_1^{(5)}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-1)^k e^{-x} g_1^{(5-k)}(x) - g_1^{(5)}(x) \\
 &= e^{-x} \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-1)^k g_1^{(5-k)}(x) - g_1^{(5)}(x).
 \end{aligned}$$

Daher ist das Restglied gegeben durch

$$R_4(h, x, 0) = \frac{1}{120} \left(e^{-\vartheta_{0,x}x} \sum_{k=0}^5 \binom{n}{k} (-1)^n g_1^{(n-k)}(\vartheta_{0,x}x) - g_1^{(n)}(\vartheta_{0,x}x) \right) x^5,$$

wobei $g_1^{(n)}$ oben angegeben ist.

(c) Option 1: Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) - x = 0$, so, dass $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

Option 2: Verwendung der Taylor-Erweiterung

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4}{3} + R_n(h, x, 0) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} R_n(h, x, 0) = 0.$$

Wir können die zweite Grenze wie folgt begründen: da $f(x)$ und $g(x)$ unendlich differenzierbar sind, gilt dies auch für $h(x)$. Insbesondere, wenn wir $\delta > 0$ festlegen, ist $h^{(5)}(x)$ auf dem Intervall $[-\delta, \delta]$ stetig, also begrenzt, d.h. $|h^{(5)}(x)| < M$, $-\delta \leq x \leq \delta$.

Da $|R_n(h, x, 0)| = \frac{|h^{(5)}(\vartheta_{0,x}x)|}{5!} x^5 \leq \frac{M}{5!} x^5$, für alle $x \in [-\delta, \delta]$, ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} |R_n(h, x, 0)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{M}{5!} x^5 = 0.$$

Aufgabe H 94. Taylorpolynome

Gegeben sind die Funktionen

$$f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln \left(\frac{1}{x+1} \right) \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sinh(2(x-1)).$$

(a) Bestimmen Sie $T_5(f, x, 0)$ und $R_5(f, x, 0)$.

(b) Bestimmen Sie $T_4(g, x, 1)$ und $R_4(g, x, 1)$.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie n so, dass

$$|f(x) - T_n(f, x, 0)| < \varepsilon$$

gilt für alle $x \in [0, 1]$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir haben

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= -\ln(x+1), \\ f^{(1)}(x) &= -(x+1)^{-1}, \\ f^{(2)}(x) &= (x+1)^{-2}, \\ f^{(3)}(x) &= -2(x+1)^{-3}, \\ f^{(4)}(x) &= (2)(3)(x+1)^{-4}, \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n (n-1)! (x+1)^{-n} \quad n > 0, \end{aligned}$$

so, dass

$$\begin{aligned} T_5(f, x, 0) &= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 \\ &= 0 + \frac{-1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{-(2!)}{3!}x^3 + \frac{3!}{4!}x^4 + \frac{-(4!)}{5!}x^5 \\ &= -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}, \end{aligned}$$

und

$$R_5(f, x, 0) = (-1)^6 \frac{5!}{6!} (\vartheta_{0,x}x)^6 x^6 = \frac{(\vartheta_{0,x}x)^6}{6} x^6.$$

(b) Wir haben

$$\begin{aligned} g^{(0)}(x) &= \sinh(2(x-1)), \\ g^{(1)}(x) &= 2 \cosh(2(x-1)), \\ g^{(2)}(x) &= 4 \sin(2(x-1)), \\ g^{(3)}(x) &= 8 \cosh(2(x-1)), \\ g^{(4)}(x) &= 16 \sinh(2(x-1)), \\ g^{(5)}(x) &= 32 \cosh(2(x-1)), \end{aligned}$$

so, dass

$$\begin{aligned} T_4(g, x, 1) &= g(1) + \frac{g^{(1)}(1)}{1!}(x-1) + \frac{g^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{g^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{g^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 \\ &= 2(x-1) + \frac{8}{3!}(x-1)^3 \\ &= 2(x-1) + \frac{4}{3}(x-1)^3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R_5(g, x, 0) &= \frac{32}{5!} \cosh(2(\vartheta_{1,x}x - 1))(x-1)^5 \\ &= \frac{4}{15} \cosh(2(\vartheta_{1,x}x - 1))(x-1)^5 \end{aligned}$$

(c) Wir berechnen das Restglied $R_n(f, x, 0)$:

$$R_n(f, x, 0) = \frac{f^{n+1}(\vartheta_{0,x}x)}{(n+1)!} x^{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{(\vartheta_{0,x}x + 1)^{n+1} (n+1)!} x^{n+1}.$$

Sei $\xi = \vartheta_{0,x}x \in (0, 1)$. Da $|f(x) - T_n(f, x, 0)| = |R_n(f, x, 0)|$, müssen wir n so finden, dass $|R_n(f, x, 0)| < \varepsilon$. Für $x \in [0, 1]$ ist nun $x^{n+1} \leq 1$ und $1 < |x+1|^{n+1}$, also

$$|R_n(f, x, 0)| = \frac{|(-1)^n| |n!|}{|\xi+1|^{n+1} |(n+1)!|} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Wenn $1/(n+1) < \varepsilon$, folgt $R_n(f, x, 0) < \varepsilon$; also $n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 95. Konvergenz mit Cauchy

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass die folgende Folge konvergiert:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+k^2)2^k}.$$

Lösungshinweise hierzu:

Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein festes n_ε gibt, so dass wenn $m, n \geq n_\varepsilon$, $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Wir können $\varepsilon < 1$ und $m < n$ annehmen. Zunächst führen wir eine Berechnung durch. Wir nehmen $\varepsilon < 1$ an. Beachten Sie $\frac{1}{1+k^2} < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{1+k^2} \frac{1}{2^k} \right| \\ &= \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{1+k^2} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} \\ &\leq \frac{1}{2^m}. \end{aligned}$$

Man beachte $\frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{n_\varepsilon}}$, wenn $n_\varepsilon < m$, und die vorherige Berechnung zeigt

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{n_\varepsilon}}.$$

Wenn wir $|a_n - a_m| < \varepsilon$ wollen, wählen wir n_ε so, dass $\frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$. Wir können $n \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$n_\varepsilon > -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}.$$

Wir schließen, dass die Folge eine Cauchy-Folge ist.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 96. Integration

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$(a) \int x \sin \left(\int_0^1 x \cdot 2\zeta \, d\zeta \right) dx \qquad (b) \int \frac{\sqrt{\exp(\sqrt[3]{x})}}{6} dx$$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir berechnen zunächst das innere Integral wie folgt: Wir wählen x beliebig und betrachten dieses als Parameter. Dann gilt:

$$\int_0^1 x \cdot 2\zeta \, d\zeta = x \int_0^1 2\zeta \, d\zeta = x [\zeta^2]_0^1 = x$$

Dies gilt für alle x , womit wir mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int x \sin \left(\int_0^1 x \cdot 2\zeta \, d\zeta \right) dx &= \int x \sin(x) \, dx = [x \cos(x)] - \int \cos(x) \, dx \\ &= [x \cos(x) - \sin(x)] \end{aligned}$$

erhalten.

- (b) Es gilt:

$$\int \frac{\sqrt{\exp(\sqrt[3]{x})}}{6} dx = \frac{1}{6} \int e^{\frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{3}}} dx$$

Substitution: $x(\xi) := \xi^3$

$$= \frac{1}{6} \int e^{\frac{1}{2}(x(\xi))^{\frac{1}{3}}} x'(\xi) \, d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \int e^{\frac{1}{2}\xi} \xi^2 \, d\xi$$

mehrmalige partielle Integration

$$= \left[e^{\frac{1}{2}\xi} \xi^2 \right] - 2 \int e^{\frac{1}{2}\xi} \xi \, d\xi = \left[e^{\frac{1}{2}\xi} \xi^2 - 4e^{\frac{1}{2}\xi} \xi \right] - \int (-4)e^{\frac{1}{2}\xi} \, d\xi$$

$$= \left[e^{\frac{1}{2}\xi} \xi^2 - 4e^{\frac{1}{2}\xi} \xi + 8e^{\frac{1}{2}\xi} \right]$$

$$= \left[(\sqrt[3]{x})^2 \sqrt{e^{\sqrt[3]{x}}} - 4\sqrt[3]{x} \sqrt{e^{\sqrt[3]{x}}} + 8\sqrt{e^{\sqrt[3]{x}}} \right]$$

Aufgabe H 97. Kurvendiskussion

Gegeben sei $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \exp\left(\frac{1}{1+x}\right)$.

- (a) Bestimmen Sie f' und f'' .
 (b) Bestimmen Sie sämtliche Extrema sowie Wendepunkte von f .
 (c) Bestimmen Sie den links- und den rechtsseitigen Grenzwert von f an der Stelle $x_0 = -1$, sofern diese existieren. Ist f dort stetig fortsetzbar?

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Es gelten:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} e^{\frac{1}{1+x}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^4} e^{\frac{1}{1+x}} + \frac{2}{(1+x)^3} e^{\frac{1}{1+x}}$$

- (b) Wir berechnen die Nullstellen der Ableitungen:

$$f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow -\frac{1}{(1+x)^2} e^{\frac{1}{1+x}} = 0 \nexists$$

Dies hat keine Lösung.

Da der Definitionsbereich offen ist (und somit keine Randpunkte zu berücksichtigen sind), existieren keine lokalen Extrema. Für die Wendepunkte folgt aus $f''(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{(1+x)^4} e^{\frac{1}{1+x}} + \frac{2}{(1+x)^3} e^{\frac{1}{1+x}}$$

$$= \left(2 + \frac{1}{(1+x)}\right) \frac{1}{(1+x)^3} e^{\frac{1}{1+x}}$$

dass nur an $x_0 = -\frac{3}{2}$ ein Wendepunkt vorliegen kann. Für $x < -\frac{3}{2}$ gilt $0 < -\frac{1}{x+1} < 2$ und somit

$$\left(2 + \frac{1}{(1+x)}\right) > 0$$

Für $-1 > x > -\frac{3}{2}$ hingegen gilt $-\frac{1}{x+1} > 2$ und somit

$$\left(2 + \frac{1}{(1+x)}\right) < 0$$

Da ferner

$$\frac{1}{(1+x)^3} < 0 \quad \text{für } x < -1$$

$$e^{\frac{1}{1+x}} > 0 \quad \text{für } x \neq -1$$

gelten, folgt

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & x < -\frac{3}{2} \\ = 0 & x = -\frac{3}{2} \\ > 0 & -\frac{3}{2} < x < -1 \end{cases}$$

Somit liegt in $\left(-\frac{3}{2}, e^{-2}\right)$ ein Wendepunkt von f vor. (Die Ableitung nimmt ein lokales Minimum an.)

(c) Es gelten:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

und somit

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = +\infty$$

Der linksseitige Grenzwert von f in $x_0 = -1$ existiert, der rechtsseitige hingegen nicht. Insbesondere ist f nicht stetig fortsetzbar in $x_0 = -1$.

Aufgabe H 98. Integration durch Substitution

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

Wenn Sie substituieren, verwenden Sie hierzu ausschließlich 3.3.3.

$$(a) \int_1^{\exp(\sqrt{\ln(85)})} \ln(x) x^{\ln(x)-1} dx \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos(x)} dx$$

Hinweis: Nutzen Sie $\frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ und $\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt wegen $\ln(\exp(r)) = r$ für alle $r \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^{\exp(\sqrt{\ln(85)})} \ln(x) x^{\ln(x)-1} dx = \int_1^{\exp(\sqrt{\ln(85)})} \frac{\ln(x)}{x} (e^{\ln(x)})^{\ln(x)} dx = \int_1^{\exp(\sqrt{\ln(85)})} \frac{\ln(x)}{x} e^{(\ln(x))^2} dx$$

$$\text{Substitution: } u(x) = \ln(x) \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$= \int_1^{\exp(\sqrt{\ln(85)})} u(x) e^{(u(x))^2} \cdot u'(x) dx \stackrel{3.3.3}{=} \int_0^{\sqrt{\ln(85)}} u e^{u^2} du$$

$$\text{Substitution: } \zeta(u) = u^2 \rightarrow \zeta'(u) = 2u$$

$$= \int_1^{\exp(\sqrt{\ln(85)})} \frac{1}{2} \zeta'(u) e^{\zeta(u)} du \stackrel{3.3.3}{=} \int_0^{\ln(85)} \frac{1}{2} e^{\zeta} d\zeta$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{\zeta} \right]_0^{\ln(85)} = \frac{85}{2} - \frac{1}{2} = 42$$

(b) Wir nutzen den Hinweis:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos(x)} dx &= \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(\frac{1}{2})} \frac{2}{\cos(x)} dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\cos(\arcsin(t))} \cdot \arcsin'(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\cos(\arcsin(t))} \cdot \arcsin'(t) dt \\
 &\stackrel{2.3.2}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\cos(\arcsin(t))} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = (*)
 \end{aligned}$$

Es gilt: $\arcsin([-1, 1]) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Da auf letzterem Intervall $\cos(x)$ und $|\cos(x)|$ übereinstimmen, folgt:

$$\cos(\arcsin(t)) = |\cos(\arcsin(t))| = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin(t)))^2} = \sqrt{1 - t^2}$$

Wir erhalten (erneut mit dem Hinweis):

$$\begin{aligned}
 (*) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} dt \\
 &= [\ln(|1+t|) + \ln(|1-t|)]_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \cdot 2\right) = \ln(3)
 \end{aligned}$$

Aufgabe H 99.

Gegeben sei die vom ganzzahligen Parameter $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ abhängige Funktion

$$f_\alpha: D_\alpha \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln((x+2) \cdot e^{x^\alpha}),$$

wobei D_α den maximal möglichen Definitionsbereich bezeichne.

(a) Bestimmen Sie eine Funktion $F_\alpha: D_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $F'_\alpha(x) = f_\alpha(x)$ gilt.

(b) Sei nun $\alpha = -2$. Bestimmen Sie D_{-2} sowie diejenige Funktion $\hat{F}: D_{-2} \rightarrow \mathbb{R}$, für welche $\hat{F}' = f_{-2}$ sowie $\hat{F}(-1) = 6$ und $\hat{F}(e-2) = \frac{e-3}{e-2}$ gilt.

Hinweis: Ist D_{-2} ein Intervall?

Lösungshinweise hierzu:**(a)** Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\int \ln((x+2) \cdot e^{x^\alpha}) dx &= \int \ln((x+2)) + \ln(e^{x^\alpha}) dx \\ &= \int \ln((x+2)) + x^\alpha dx = \int \ln((x+2)) dx + \int x^\alpha dx\end{aligned}$$

partielle. Integration

$$\begin{aligned}&= [(x+2) \ln((x+2))] - \int 1 dx + \int x^\alpha dx \\ &= \begin{cases} [(x+2) \ln(x+2) - x + \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}] & \alpha \neq -1 \\ [(x+2) \ln(x+2) - x + \ln(|x|)] & \alpha = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

(b) Für $\alpha = -2$ ist x^α an der Stelle 0 nicht definiert. Für $x \neq 0$ gilt $(x+2)e^{x^\alpha} > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Wir erhalten

$$D_{-2} = (-2, 0) \cup (0, \infty)$$

Da dies kein Intervall ist, haben wir die Konstanten betreffend mehr Wahlfreiheit (vgl. 3.1.3), allerdings ist nach (a) die gesuchte Funktion auf jedem der Teilintervalle $I_1 = (-2, 0)$, $I_2 = (0, \infty)$ von der Bauart

$$\hat{F}(x) = (x+2) \ln(x+2) - x - x^{-1} + c(I)$$

mit einer (möglicherweise) vom Intervall $I \in \{I_1, I_2\}$ abhängigen konstanten $c(I) \in \mathbb{R}$. Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}6 &\stackrel{!}{=} \hat{F}(-1) = (-1+2) \ln(-1+2) - (-1) - (-1)^{-1} + c(I_1) = 2 + c(I_1) \\ &\Rightarrow c(I_1) = 4 \\ \frac{e-3}{e-2} &\stackrel{!}{=} \hat{F}(e-2) = (e-2+2) \ln(e-2+2) - (e-2) - (e-2)^{-1} + c(I_2) \\ &= e - e + 2 - \frac{1}{e-2} + c(I_2) = \frac{2e-5}{e-2} + c(I_2) \\ &\Rightarrow c(I_2) = \frac{e-3}{e-2} - \frac{2e-5}{e-2} = -1\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} (x+2) \ln(x+2) - x - x^{-1} + 4 & , -2 < x < 0 \\ (x+2) \ln(x+2) - x - x^{-1} - 1 & , 0 < x \end{cases}$$

Frischhaltebox**Aufgabe H 100.**

Für $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $v_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt $A^n v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2-2n \end{pmatrix}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$.

Weisen Sie dies induktiv nach.

Lösungshinweise hierzu:

IA Für $n = 0$ gilt $A^n = E_3$ (vgl. P47, HM1) und somit:

$$A^0 v_0 = v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

IH Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$A^n v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 - 2n \end{pmatrix}$$

IS $n \rightarrow n + 1$ Es gilt:

$$\begin{aligned} A^{n+1} v_0 &= A \cdot (A^n v_0) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 - 2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 + 2 - 2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 - 2(n + 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt

$$A^n v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 - 2n \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 101.

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_0^1 \frac{5x^4 - 12x^2 + 3}{x^5 - 4x^3 + 3x - 435} dx$

(b) $\int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)^3} + \frac{1}{x \ln(x)} dx$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir stellen fest, dass der Zähler $5x^4 - 12x^2 + 3$ des Integranten die Ableitung des Nenners $x^5 - 4x^3 + 3x - 435$ des Integranten ist. Ferner stellen wir fest, dass der Nenner des Integranten für $x \in [0, 1]$ nicht verschwindet, da $|x^5 - 4x^3 + 3x| \leq 8 \leq |-435|$. Folglich gilt nach Beispiel 3.3.6

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{5x^4 - 12x^2 + 3}{x^5 - 4x^3 + 3x - 435} dx &= \left[\ln(|x^5 - 4x^3 + 3x - 435|) \right]_{x=0}^1 \\ &= \ln(|-435|) - \ln(|-435|) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (b) Wir nutzen die Linearität des Integrals

$$\int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)^3} + \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx + \int_2^3 \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx$$

Und betrachten die beiden Integrale auf der rechten Seite separat. Das zweite Integral Lösen wir analog zu Teil (a) als

$$\int_2^3 \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = \left[\ln(|\ln x|) \right]_{x=2}^3 = \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2).$$

Das erste Integral Lösen wir mittels Lemma 3.4.9. Zunächst stellen wir fest, dass in der Notation von loc. cit. $\Delta = 1$ gilt. Einmalige Anwendung des 2. Teils von 3.4.9 liefert

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + \left[\frac{x}{4(x^2 + 1)^2} \right]_2^3 \\ &= \frac{3}{4} \int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx + \frac{3}{400} - \frac{1}{50} \\ &= \frac{3}{4} \int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx - \frac{1}{80} \end{aligned}$$

Erneute Anwendung des 2. Teils von 3.4.9 liefert

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)} dx + \left[\frac{x}{2(x^2 + 1)} \right]_2^3 \\ &= \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)} dx - \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral können wir mit dem 1. Teil von 3.4.9 lösen. Wir haben

$$\int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)} dx = [\arctan x]_2^3 = \arctan 3 - \arctan 2.$$

Zusammensetzen liefert nun

$$\int_2^3 \frac{1}{(x^2 + 1)^3} + \frac{1}{x \ln(x)} dx = \frac{3}{8} (\arctan 3 - \arctan 2) - \frac{1}{20} + \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2).$$

Aufgabe H 102. Partialbruchzerlegung

Geben Sie eine Partialbruchzerlegung der folgenden gebrochen rationalen Funktionen an.

$$(a) \frac{3-x}{1-x^2} \quad (b) \frac{x^3}{(x^2+2x+2)^2} \quad (c) \frac{x^2+x+1}{x^5+2x^3+x} \quad (d) \frac{2x}{x^2-1}$$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Das Nennerpolynom hat größeren Grad als das Zählerpolynom, also müssen wir keine Polynomdivision durchführen. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen sehen wir, dass $1-x^2$ die Nullstellen 1 und -1 hat. Also gilt $1-x^2 = -(x-1)(x+1)$. Nach 3.4.5 müssen wir

$$\frac{3-x}{1-x^2} = \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A_{1,1}}{x-1} + \frac{A_{2,1}}{x+1}$$

lösen, was nach Multiplikation mit $(x-1)(x+1)$ äquivalent dazu ist die Gleichung

$$x-3 = (x+1)A_{1,1} + (x-1)A_{2,1}$$

für $A_{1,1}, A_{2,1} \in \mathbb{R}$ zu lösen. Einsetzen von $x=1$ bzw. $x=-1$ liefert

$$-2 = 2A_{1,1} \text{ bzw. } -4 = -2A_{2,1}$$

das heißt $A_{1,1} = -1$ und $A_{2,1} = 2$. Insgesamt also

$$\frac{3-x}{1-x^2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1}.$$

- (b) Das Nennerpolynom in der Faktorierten Form, die man am Ende von 3.4.3 erhält, da $2^2 - 4 \cdot 2 < 0$, d.h. $x^2 + 2x + 2$ keine reellen Nullstellen hat. Wir machen den Ansatz

$$\frac{x^3}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{B_{1,1} + C_{1,1}x}{x^2+2x+2} + \frac{B_{1,2} + C_{1,2}x}{(x^2+2x+2)^2}$$

nach 3.4.5, der nach Multiplikation mit $(x^2+x+2)^2$ äquivalent zu

$$x^3 = (B_{1,1} + C_{1,1}x)(x^2+2x+2) + B_{1,2} + C_{1,2}x$$

ist. Ausmultiplizieren liefert eine Gleichung

$$x^3 = C_{1,1}x^3 + (2C_{1,1} + B_{1,1})x^2 + (2C_{1,1} + 2B_{1,1} + C_{1,2})x + 2B_{1,1} + B_{1,2}$$

welche durch Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= C_{1,1} \\ 0 &= 2C_{1,1} + B_{1,1} \\ 0 &= 2C_{1,1} + 2B_{1,1} + C_{1,2} \\ 0 &= 2B_{1,1} + B_{1,2} \end{aligned}$$

liefert. Dieses Gleichungssystem können wir direkt (von Oben nach Unten durch einsetzen) durch

$$1 = C_{1,1} \quad -2 = B_{1,1} \quad 2 = C_{1,2} \quad 4 = B_{1,2}.$$

lösen. Insgesamt also

$$\frac{x^3}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-2 + x}{x^2 + 2x + 2} + \frac{4 + 2x}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

- (c) Offenbar $x^5 + 2x^3 + x = x(x^4 + 2x^2 + 1)$. Um $x^4 + 2x^2 + 1$ weiter wie in 3.4.3 zu zerlegen setzen wir $x^2 = u$ und erhalten $x^4 + 2x^2 + 1 = u^2 + 2u + 1$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen sehen wir, dass $u^2 + 2u + 1$ die doppelte Nullstelle $u = -1$ hat, d.h. $u^2 + 2u + 1 = (u + 1)^2$. Dies liefert also $x^4 + 2x^2 + 1 = (u + 1)^2 = (x^2 + 1)^2$, was die Zerlegung in 3.4.3 ist, da $x^2 + 1$ keine reelle Nullstelle hat. Man sieht sofort $x^2 + x + 1 = x + (x^2 + 1)$, womit wir

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

erhalten. Dies ist die gesuchte Partialbruchzerlegung, es die in 3.4.5 gewünschte Form hat.

- (d) Es ist $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ analog zu (a) und wir haben wieder den Ansatz

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{A_{1,1}}{x - 1} + \frac{A_{2,1}}{x + 1}.$$

Also müssen wir

$$2x = (x + 1)A_{1,1} + (x - 1)A_{2,1}$$

lösen. Analog zu (a) liefert Evaluation an $x = 1$ bzw. $x = -1$

$$1 = A_{1,1} \text{ bzw. } 1 = A_{2,1}$$

also

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}.$$

Aufgabe H 103. Integration gebrochener rationaler Funktionen

Berechnen Sie eine Stammfunktion der gebrochen rationalen Funktion

$$f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Polynomdivision (mit Rest) von $x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ durch $x^3 + x^2 + x + 1$ ergibt

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} + 1.$$

Es ist bekannt, dass eine Stammfunktion von 1 durch x gegeben ist. Um den zweiten Term auf der Rechten Seite zu integrieren nutzen wir Partialbruchzerlegung.

Aus der Präsenzübung ist bekannt, dass $x = -1$ eine Nullstelle von $x^3 + x^2 + x + 1$ ist. (Alternativ können alle Ganzzahlige Nullstellen mittels 1.8.10 des HM1 Skripts erraten werden.) Polynomdivision $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$ ergibt das Polynom $x^2 + 1$, das keine reellen Nullstellen hat. Daher gilt $(x^3 + x^2 + x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$ und wir machen nach 3.4.5 den Ansatz

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A_{1,1}}{x + 1} + \frac{B_{2,1} + C_{2,1}x}{x^2 + 1}.$$

Durchmultiplizieren mit dem Nenner $(x + 1)(x^2 + 1)$ ergibt

$$x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)A_{1,1} + (x + 1)(B_{2,1} + C_{2,1}x).$$

Einsetzen von $x = -1$ ergibt $1 = 2A_{1,1}$, d.h. $A_{1,1} = \frac{1}{2}$. Einsetzen von $x = 0$ liefert $1 = \frac{1}{2} + B_{2,1}$, d.h. auch $B_{2,1} = \frac{1}{2}$. Einsetzen von $x = 1$ liefert nun $3 = 1 + 1 + 2C_{2,1}$, d.h. auch $C_{2,1} = \frac{1}{2}$. Insgesamt haben wir also die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + x}{x^2 + 1}.$$

Damit gilt für die Stammfunktion

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1 + x}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx, \end{aligned}$$

Wobei der letzte Umformungsschritt dazu dient die Integrale auf Integrale aus Lemmata 3.4.7, 3.4.8 und 3.4.9 zurückzuführen. Direktes einsetzen der Formeln aus Lemmata 3.4.7, 3.4.8 und 3.4.9 liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx &= \dots \\ \dots &= \frac{1}{2} [\ln |x + 1|] + \frac{1}{2} [\arctan(x)] + \frac{1}{4} [\ln |x^2 + 1|]. \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$F: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x + \frac{1}{2} \ln |x + 1| + \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{4} \ln |x^2 + 1|$$

ist eine Stammfunktion von f .

Aufgabe H 104. Ein Kriterium für die Konvergenz von Reihen

Es sei $f_n: [1, n + 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x^2}$ für $n \in \mathbb{N}$

(a) Begründen Sie, dass für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \overline{S}(f_n, P_n) \quad \underline{S}(f_n, P_n) = \overline{S}(f_n, P_n) - 1 + \frac{1}{(n+1)^2}$$

für die Ober- und Untersumme von f_n zur Partition $P_n = \{1, \dots, n+1\}$ gilt.

(b) Begründen Sie warum

$$\int_1^{n+1} f_n(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \int_1^{n+1} f_n(x) \, dx + 1$$

gilt und berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f_n(x) \, dx$.

(c) Begründen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ gegen einen Grenzwert in $[1, 2]$ konvergiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Definition gilt

$$\overline{S}(f_n, P_n) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [k, k+1]} (f_n(x)) \cdot (k+1 - k)$$

und da f_n monoton fallend ist vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\overline{S}(f_n, P_n) = \sum_{k=1}^n f_n(k) \cdot (k+1 - k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Aus dem gleichen Grund gilt für die Untersumme

$$\underline{S}(f_n, P_n) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [k, k+1]} (f_n(x)) \cdot (k+1 - k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Indexverschiebung $k = l - 1$ ergibt

$$\underline{S}(f_n, P_n) = \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l^2} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{l^2} - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} = \overline{S}(f_n, P_n) - 1 + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(b) Es gilt stets

$$\underline{S}(f_n, P_n) \leq \int_1^{n+1} f_n(x) \, dx \leq \overline{S}(f_n, P_n)$$

Das heist Einsetzen der Ausdrücke aus dem ersten Teil der Aufgabe liefert

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_1^{n+1} f_n(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Dies zeigt die linke zu zeigende Ungleichung. Da $0 \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ folgt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_1^{n+1} f_n(x) dx$$

was die rechte zu zeigende Ungleichung nach Addition von 1 impliziert.

Es ist

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{x} \right]_{x=1}^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

(c) Es sind

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{und} \quad \int_0^{n+1} f_n(x) dx + 1 = 2 - \frac{1}{n+1}$$

monoton wachsend in $n \in \mathbb{N}$. Nach der Ungleichung im zweiten Teil der Aufgabe ist damit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ wachsend und beschränkt durch 2. Damit konvergiert $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ und Übergang zum Limes $n \rightarrow \infty$ in der Ungleichung im zweiten Teil der Aufgabe liefert, dass der Grenzwert zwischen 1 und 2 liegt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 105.

Berechnen und vereinfachen Sie $\frac{d}{dx} \arctan(x)$ mit Hilfe von Satz 2.3.1 im Skript.

Lösungshinweise hierzu: Die Funktion $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist unendlich oft stetig differenzierbar und bijektiv. Die Ableitung $\tan' = 1 + \tan^2$ wird außerdem nicht 0 auf dem Definitionsbereich. Nach Satz 2.3.1 gilt für die Umkehrfunktion $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{d}{dy} \arctan(y) \Big|_{y=\tan(x_0)} = \frac{1}{\frac{d}{dx} \tan(x) \Big|_{x=x_0}} = \frac{1}{1 + \tan(x_0)^2}$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Insbesondere für $x_0 = \arctan(y_0)$ also

$$\frac{d}{dy} \arctan(y) \Big|_{y=y_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 106. Geschlossene Formeln

Berechnen Sie geschlossene Formeln für die folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)x^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x^n$

Tipp: Führen Sie einen Sanity-check durch, d.h. überprüfen Sie beispielsweise durch Einsetzen, dass Ihre geschlossene Formel für $x = 0$ korrekt ist.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir faktorisieren $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$, etwa durch Bestimmung der Nullstellen (Lösungsformel für gemischt quadratische Gleichungen). Wir berechnen

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (n+1)(n+2)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} + C$$

und auf die gleiche Weise

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} + C \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} + Cx + D.$$

Nach dem Hauptsatz gilt damit

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} + Cx + D \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)x^n$$

für jede Wahl von $C, D \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt dies für $C = D = 1$. Wir erhalten

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} + x + 1 \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

nach Indexshift $n+2 = k$ unter Verwendung der geschlossenen Formel der geometrischen Reihe. Damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$$

die gesuchte geschlossene Formel.

- (b) Es gilt

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{n} x^n \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{2}{1-x}$$

nach Indexshift $n = k+1$ unter Verwendung der geschlossenen Formel der geometrischen Reihe. Also ist die gesuchte geschlossene Formel eine Stammfunktion von $\frac{2}{1-x}$ und damit von der Form

$$\int \frac{2}{1-x} dx = -2 \ln(|1-x|) + C$$

für ein $C \in \mathbb{R}$. Wir bestimmen C . Es muss gelten

$$C = -2 \ln(|1 - 0|) + C \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot 0^n = 0,$$

da die beiden Formel insbesondere für $x = 0$ übereinstimmen müssen. Die gesuchte geschlossene Formel ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x^n = -2 \ln(|1 - x|).$$

Aufgabe H 107. Majoranten- und Grenzwertkriterium

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} dx$

(c) $\int_{20}^{+\infty} \frac{1}{(\ln(x^{24}))^3} dx$

(b) $\int_{-1}^{0-0} \frac{-1}{\sin(x)} dx$

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Es ist xe^{-x} eine Majorante für $\ln(x)e^{-x}$ auf $[1, \infty)$, da $\ln(x) \leq x$. Aus dem Majoranten-Kriterium und Beispiel 3.7.12 folgt die Konvergenz von

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{e^x} dx.$$

- (b) Nach L'Hôspitals Regel gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-x}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Damit haben

$$\int_{-1}^{0-0} \frac{-1}{\sin x} dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{0-0} \frac{-1}{x} dx = - \int_{-1}^{0-0} \frac{1}{x} dx$$

das gleiche Konvergenzverhalten dank des Grenzwertkriteriums. Völlig analog zu Beispiel 3.7.9 zeigt man, dass letzteres Integral nicht konvergiert.

- (c) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x^{24}))^3}{x} = 24^3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \frac{(\ln(x))^2}{x} = 24^3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} 6 \frac{\ln(x)}{x} = 24^3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} 6 \frac{1}{x} = 0$$

durch dreimalige Anwendung von L'Hôspitals Regel. Nach dem Grenzwertkriterium würde aus der Konvergenz des Integrals aus der Aufgabenstellung die Konvergenz von

$$\int_{20}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

folgen. Dies ist erneut nach Beispiel 3.7.8 nicht der Fall, also konvergiert das Integral aus der Aufgabenstellung nicht.

(d) Es gilt erneut

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

und daher hat das Integral aus der Aufgabenstellung das gleiche Konvergenzverhalten wie das Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

welches nach 3.7.8 nicht konvergiert.

Aufgabe H 108. Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

$$(a) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx \quad (b) \int_{0+0}^1 \ln(x) dx \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \quad (d) \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{e^x} dx$$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, etwa durch Bestimmung der Nullstellen. Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{x^2 - 1} = -\frac{\frac{1}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_2^y \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_2^y -\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} dx \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (-\ln(|y + 1|) + \ln(3) + \ln(|y - 1|) - \ln(1)) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{|y - 1|}{|y + 1|} \right) + \ln(3) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{|y - 1|}{|y + 1|} \right) + \ln(3) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(3). \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon}^1 \ln(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} [x \ln(x) - x]_{x=\varepsilon}^1 = (1 \cdot \ln(1) - 1) - (0 - 0) = 1$$

wobei man den Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \varepsilon \ln(\varepsilon)$ etwa in Beispiel 2.5.8 findet.

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx + \frac{x}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{x}{2(x^2+1)}\end{aligned}$$

mittels Lemma 3.4.9. Daher

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \arctan(y) - \frac{1}{2} \arctan(0) + \frac{y}{2(y^2+1)} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}$$

durch Einsetzen der Grenzen in die oben berechnete Stammfunktion.

(d) Sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad N . Es gilt

$$\int_0^y \frac{p(x)}{e^x} dx = - \left[\frac{p(x)}{e^x} \right]_{x=0}^y + \int_0^y \frac{p'(x)}{e^x} dx \quad (*)$$

für alle $y \geq 0$ dank partieller Integration. Da jedes Polynom eine Summe von Monomen ist und dank Beispiel 3.7.12 existiert der Grenzwert $y \rightarrow +\infty$ auf beiden Seiten. Da

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^k e^{-y} = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt auch $\lim_{y \rightarrow \infty} p(y) e^{-y} = 0$. Der Grenzwert $y \rightarrow +\infty$ in $(*)$ liefert

$$\int_0^{+\infty} \frac{p(x)}{e^x} dx = p(0) + \int_0^{+\infty} \frac{p'(x)}{e^x} dx.$$

Induktion liefert nun

$$\int_0^{+\infty} \frac{p(x)}{e^x} dx = \sum_{k=0}^N \frac{d^k}{dx^k} p(x) \Big|_{x=0},$$

da die $(N+1)$ -te Ableitung von $p(x)$ verschwindet. Der Spezialfall $p(x) = x^4$ liefert

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{e^x} dx = 4!.$$

Aufgabe H 109. Geschlossene Formeln II (2+1+1)

Geben Sie geschlossene Formeln für die folgenden Ausdrücke an.

(a) $\sum_{n=5}^{\infty} n^2 x^n$

(b) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir können diese Aufgabe analog zu Aufgabe H 106 lösen. Wir stellen einen leicht anderen Lösungsweg vor. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

und daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

sowie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Weiter gilt

$$n^2 = (n^2 + 3n + 2) - (3n + 3) + 1 = (n+1)(n+2) - 3(n+1) + 1$$

und daher haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2) - 3(n+1) + 1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{x^2 - x}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Da wir nicht bei $n = 0$ sondern bei $n = 5$ beginnen zu summieren können wir die ersten fünf Summanden der Reihe subtrahieren um

$$\begin{aligned} \sum_{n=5}^{\infty} n^2 x^n &= \frac{x^2 + x}{(1-x)^3} - 1 - x - 4x^2 - 9x^3 - 16x^4 \\ &= \frac{-16x^7 + 39x^6 - 25x^5 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

zu erhalten.

- (b) Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1} &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - 1 + \frac{1}{2!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 \right) \\ &= x \left(\cos(x) - 1 + \frac{1}{2!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 \right) \end{aligned}$$

nach Definition des Cosinus (Definition 1.14.17).

(c) Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n - 1 - x^2 \\ &= e^{x^2} - 1 - x^2\end{aligned}$$

nach Definition der Exponentialfunktion (Definition 1.14.10).

Frischhaltebox

Aufgabe H 110.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{2024} .

Lösungshinweise hierzu: Wir sehen, dass die Matrix A genau die Matrix ist, die die Rekursion der Fibonacci-Folge beschreibt, siehe 6.5.1 im HM1 Skript. In loc. cit. wurde berechnet, dass

$$A = \frac{1}{8\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

gilt. Außerdem gilt

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}A^{2024} &= \left(\frac{1}{8\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \right)^{2024} \\ &= \frac{(4\sqrt{5})^{2023}}{(8\sqrt{5})^{2024}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}^{2024} \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^{2023} \cdot 8\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})^{2025} & (1-\sqrt{5})^{2025} \\ 2(1+\sqrt{5})^{2024} & 2(1-\sqrt{5})^{2024} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^{2026}\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2(1+\sqrt{5})^{2025} - 2(1-\sqrt{5})^{2025} & 4(1+\sqrt{5})^{2024} - 4(1-\sqrt{5})^{2024} \\ 4(1+\sqrt{5})^{2024} - 4(1-\sqrt{5})^{2024} & 8(1+\sqrt{5})^{2023} - 8(1-\sqrt{5})^{2023} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{5})^{2025} - (1-\sqrt{5})^{2025}}{2^{2025}\sqrt{5}} & \frac{(1+\sqrt{5})^{2024} - (1-\sqrt{5})^{2024}}{2^{2024}\sqrt{5}} \\ \frac{(1+\sqrt{5})^{2024} - (1-\sqrt{5})^{2024}}{2^{2024}\sqrt{5}} & \frac{(1+\sqrt{5})^{2023} - (1-\sqrt{5})^{2023}}{2^{2023}\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{2025} & F_{2024} \\ F_{2024} & F_{2023} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

wobei $F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ die n -te Fibonacci-Zahl ist.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 111. Topologie

Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \text{ und } 2x^2 + 3y^2 \leq 6 \right\},$$

- (a) Skizzieren Sie die Menge M .
- (b) Bestimmen Sie $\overline{M}$ und M° und ∂M .
- (c) Untersuchen Sie, ob M beschränkt ist.
- (d) Untersuchen Sie, ob M kompakt ist.

Lösungshinweise hierzu:

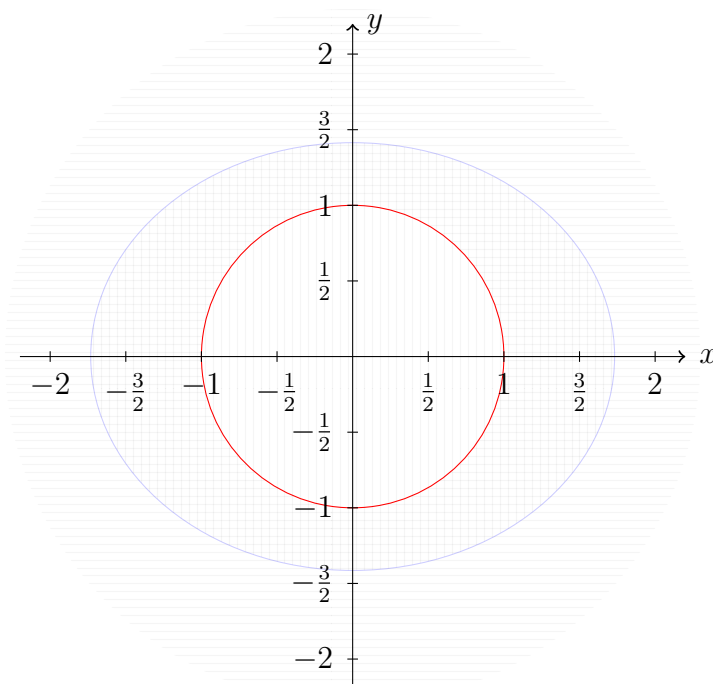
- (a) Die Menge

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \right\},$$

ist durch die Fortsetzung des horizontal schraffierten Bereichs ohne die rote Linie ins Unendliche gegeben (dies ist das Komplement der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius 1). Die Menge

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 \leq 6 \right\}$$

ist durch den vertikal schraffierten Bereich einschließlich der blauen Linie gegeben (dies ist eine Ellipse mit großer Halbachse $\sqrt{3}$ und kleiner Halbachse $\sqrt{2}$). Die Menge M ist der Durchschnitt der beiden Mengen, also der karierte (d.h. horizontal und vertikal schraffierte) Bereich mit der blauen Linie und ohne die rote Linie.



(b) Es ist

$$\overline{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \text{ und } 2x^2 + 3y^2 \leq 6 \right\}$$

(dies ist der karierte Bereich einschließlich der blauen und der roten Linie) und

$$M^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \text{ und } 2x^2 + 3y^2 < 6 \right\}$$

(dies ist der karierte Bereich ohne die blaue und rote Linie). Daher ist

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 = x^2 + y^2 \text{ oder } 2x^2 + 3y^2 = 6 \right\}$$

(dies ist die rote und die blaue Linie).

(c) Die Menge M ist beschränkt, da $\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^2 = x^2 + y^2 \leq 2x^2 + 3y^2 \leq 6$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M$.

(d) Die Menge M ist nicht abgeschlossen, da $\overline{M} \neq M$. Nach dem Satz von Heine–Borel ist M daher auch nicht kompakt, da Kompaktheit in $\mathbb{R}^n$ äquivalent zu Beschränktheit und Abgeschlossenheit ist.

Aufgabe H 112. Funktionen mehrerer Veränderlicher I: Warm-up

Gegeben sei die Funktion $f: [-2, 2] \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, (x, y)^T \mapsto \frac{x^2+1}{y^2+1}$

(a) Ist f stetig? Nimmt f ein globales Maximum an?

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinien N_t von f für $t = \frac{1}{2}, 1, 2$

(c) Begründen Sie, warum sich Niveaulinien N_t und N_s für $t \neq s$ niemals schneiden.

(d) Skizzieren Sie den Schnitt des Graphen $\Gamma(f)$ mit der Ebene $E: x = 2y$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da f eine gebrochen rationale Funktion ist, ist f auf dem gesamten Definitionsbereich stetig. (Da der Nenner nicht verschwindet ist dies der gesamte Bereich $[-2, 2] \times [-2, 2]$, dies wird aber bereits durch die Aufgabenstellung impliziert.) Da der Definitionsbereich von f kompakt ist und f stetig ist, nimmt f ein globales Maximum an.

(b) Für $t \geq 1$ ist die Niveaulinie von f zum Niveau t gegeben durch alle Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\frac{x^2+1}{y^2+1} = t \iff x^2 = t(y^2+1) - 1 \iff x = \pm \sqrt{t(y^2+1) - 1}$$

da $ty^2 + (t-1) \geq 0$. Für $0 < t \leq 1$ ist die Niveaulinie von f zum Niveau t gegeben durch alle Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\frac{x^2+1}{y^2+1} = t \iff y^2 = \frac{1}{t}(x^2+1) - 1 \iff y = \pm \sqrt{\frac{1}{t}(x^2+1) - 1}$$

da $\frac{1}{t}x^2 + (\frac{1}{t} - 1) \geq 0$. Einsetzen der Werte $t \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ liefert Abbildung 3.

(c) Falls $\emptyset \neq N_t \cap N_s$, dann gibt es ein $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in N_t \cap N_s$. Es folgt $t = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = s$ nach Definition von N_t bzw. N_s und damit $t = s$. Nach Kontraposition folgt damit aus $t \neq s$, dass $\emptyset = N_t \cap N_s$. (Anschaulich, die Funktion f kann nicht gleichzeitig den Wert t und s an der gleichen Stelle annehmen, wenn $t \neq s$.)

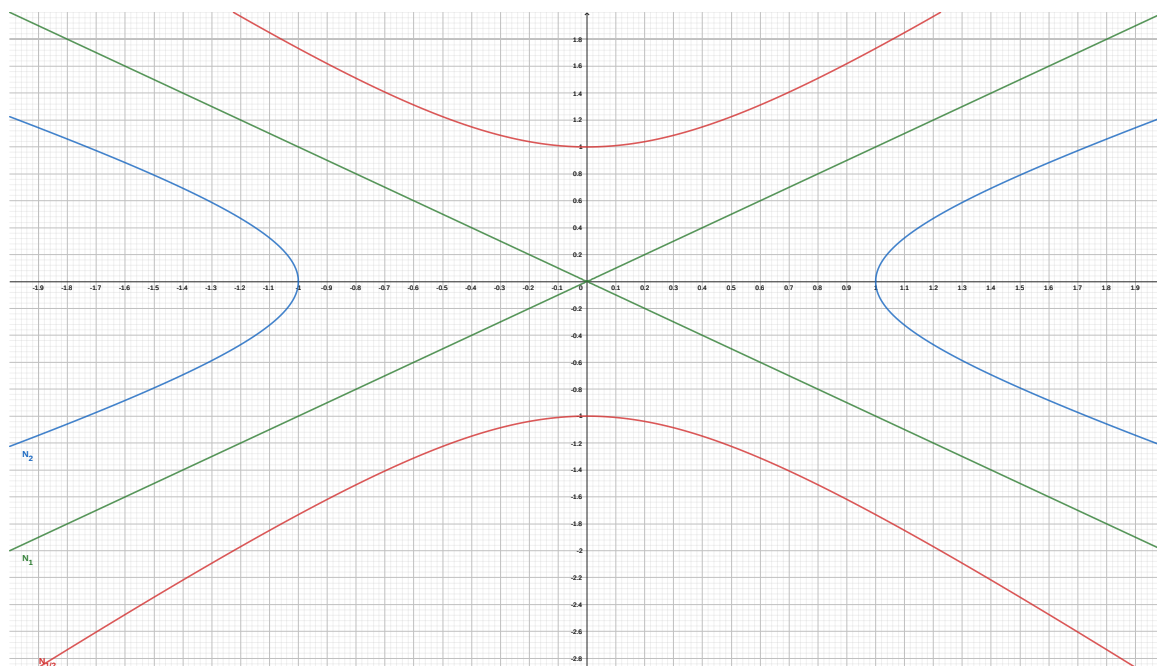
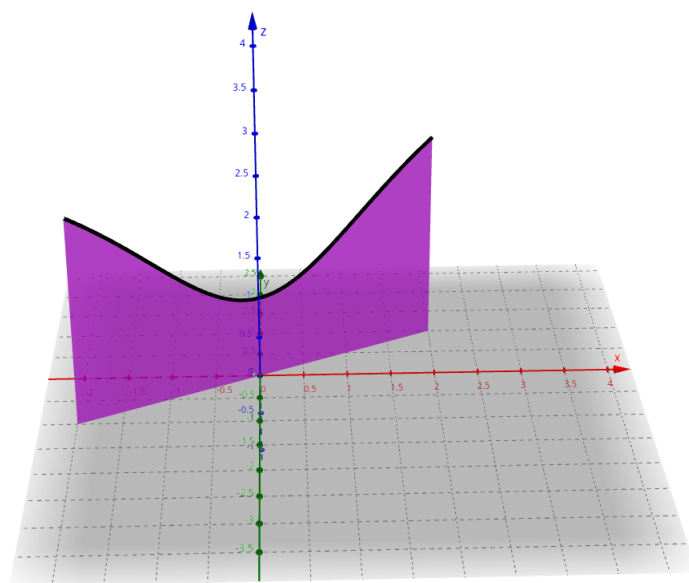


Abbildung 3: Niveaulinien

Abbildung 4: $\Gamma(f) \cap E$

(d) Der Schnitt ist gegeben durch das Bild der Funktion

$$\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ f((2t, t)^\top) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ \frac{4t^2+1}{t^2+1} \end{pmatrix}$$

welches durch die schwarze Linie in Abbildung 4 gegeben ist:

Aufgabe H 113. Funktionen mehrerer Veränderlicher II: Stetigkeit

Gegeben ist die Funktion



$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ein Modell für den Funktionsgraphen finden Sie unter

<https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/04/>

- (a) Für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ die Parametrisierung einer Geraden durch den Ursprung. Ist $f \circ g$ stetig?
- (b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$.
- (c) Ist f stetig in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Sei g eine Gerade wie in der Aufgabenstellung. Dann gilt

$$(f \circ g)(t) = \begin{cases} \frac{2ab^2t^3}{a^2t^2 + b^4t^4} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

durch einfaches Einsetzen (beachte $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ genau dann wenn $t = 0$). Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2ab^2t^3}{a^2t^2 + b^4t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2ab^2t}{a^2 + b^4t^2} = 0$$

was zeigt, dass $f \circ g$ in 0 stetig ist. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $f \circ g$ eine gebrochene rationale (wohldefinierte) Funktion und damit stetig.

- (b) Man rechnet leicht nach, dass die Niveaulinie von f zum Niveau $t = 1$ eine Parabel ist, der ein Punkt fehlt. In der Tat, für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$\frac{2xy^2}{x^2 + y^4} = 1 \iff 2xy^2 = x^2 + y^4 \iff 0 = (x - y^2)^2 \iff y^2 = x$$

dank der Binomischen Formeln. Damit ist insbesondere jede Folge die auf der Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x \text{ und } (x, y) \neq (0, 0) \right\}$ gegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ konvergiert eine Lösung. Sei etwa

$$a_n = \begin{pmatrix} \exp(-2n) \\ \exp(-n) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f(a_n) = \frac{2 \exp(-2n) \exp(-n)^2}{\exp(-2n)^2 + \exp(-n)^4} = 1$$

dank der Exponentialgesetze. Außerdem $a_n \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $n \rightarrow \infty$. Damit ist die so definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine mögliche Lösung.

- (c) Nein, da

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

für Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Aufgabenteil (b) gilt.

Aufgabe H 114. Folgen in $\mathbb{R}^2$

Finden Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen $(a_k)_{k \geq 1}$.

- (a) $a_k = (\cos(2\pi k/3), \sin(2\pi k/3))^T$ (c) $a_k = (2 + \frac{1}{k}, ke^{-k})^T$
 (b) $a_k = \left(k, \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2}\right)^T$ (d) $a_k = \left((-1)^k, \sum_{j=0}^k \frac{(-25)^j}{(2j)!}\right)^T$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir definieren drei Teilfolgen von $(a_k)_{k \geq 1}$. Sei $(k_{n,i})_{i \geq 1} = (3i + n)_{i \geq 0}$ für $n \in \{1, 2, 3\}$. Dann ist

$$a_{k_{n,i}} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi(3i+n)/3) \\ \sin(2\pi(3i+n)/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi n/3) \\ \sin(2\pi n/3) \end{pmatrix}$$

für $n \in \{1, 2, 3\}$ konstant in i und damit konvergent. Da jedes Folgenglied in genau einer der 3 Teilfolgen vorkommt sind

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos(2\pi n/3) \\ \sin(2\pi n/3) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \{1, 2, 3\} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

genau die 3 Häufungspunkte von $(a_k)_{k \geq 1}$.

- (b) Sei $k \neq l$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $k > l$ an. Dann gilt

$$|a_k - a_l| = \sqrt{(k-l)^2 + \left(\sum_{j=l}^k \frac{1}{j^2}\right)^2} \geq 1.$$

Damit kann keine Teilfolge von $(a_k)_{k \geq 1}$ eine Cauchy-Folge sein und damit ist auch keine Teilfolge von $(a_k)_{k \geq 1}$ konvergent. Da es für jeden Häufungspunkt von $(a_k)_{k \geq 1}$ eine Teilfolge von $(a_k)_{k \geq 1}$ gibt, die gegen diesen Punkt konvergiert, hat die Folge $(a_k)_{k \geq 1}$ folglich keine Häufungspunkte.

- (c) Da $2 + \frac{1}{k} \rightarrow 2$ und $ke^{-k} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow +\infty$ gilt

$$a_k \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $k \rightarrow \infty$, d.h. die Folge ist konvergent. Damit ist der Grenzwert $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k \geq 1}$.

- (d) Wir definieren zwei Teilfolgen von $(a_k)_{k \geq 1}$. Sei $(k_{n,i})_{i \geq 1} = (2i + n)_{i \geq 0}$ für $n \in \{1, 2\}$. Dann ist

$$a_{k_{n,i}} = \begin{pmatrix} (-1)^{2i+n} \\ \sum_{j=0}^{2i+n} \frac{(-25)^j}{(2j)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ \sum_{j=0}^{2i+n} (-1)^j \frac{5^{2j}}{(2j)!} \end{pmatrix}$$

für $n \in \{1, 2\}$. Die erste Koordinate dieser Folgen ist konstant (in $i \geq 0$), die zweite Koordinate konvergiert unabhängig von $n \in \{1, 2\}$ für $i \rightarrow +\infty$ gegen $\cos(5)$. Da jedes Folgenglied von $(a_k)_{k \geq 1}$ in einer der beiden Teilfolgen vorkommt, sind die Häufungspunkte der Folge $(a_k)_{k \geq 1}$ genau die Grenzwerte der oben definierten Teilfolgen, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \cos(5) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(5) \end{pmatrix} \right\}.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 115.

Bestimmen Sie die affine Normalform der Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_1 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3 = 0\}$.

Lösungshinweise hierzu: Die Matrix-Beschreibung $x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0$ der Quadrikgleichung ist gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = 3$. Wir haben $\text{Rg } A = 1$, die erweiterte Matrix $A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat den Rang

$$\text{Rg } A_{\text{erw}} = \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Also gilt $\text{Rg } A_{\text{erw}} - \text{Rg } A = 2$; die Quadrik ist vom parabolischen Typ. Für Quadriken vom parabolischen Typ in $\mathbb{R}^2$ gibt es nur eine einzige affine Normalform: $\xi_1^2 + 2\xi_2 = 0$.

Alternative: Wir führen den Algorithmus zur Bestimmung der euklidischen Normalform so weit durch, dass wir die affine Normalform ablesen können.

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$. [Den Eigenwert 0 gibt es, weil A singulär ist, den anderen Eigenwert erhalten wir dann sofort aus der Spur von A .] Eine ONB aus Eigenvektoren ist gegeben durch $f_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die Transformationsmatrix $F := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ liefert dann $\tilde{A} = F^\top A F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{a} = F^\top a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also die neue Gleichung $2y_1^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 3 = 0$.

Wir wissen, dass man in den nächsten beiden Schritten durch quadratische Ergänzung den linearen Term in der ersten Variablen beseitigen und dann durch Verschiebung gegen die Konstante diese auf Null bringen kann: Also ergibt sich die Gleichung $2w_1^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}w_2 = 0$ und dann die affine Normalform $\xi_1^2 + 2\xi_2 = 0$.

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 116. Gradienten und Niveaumengen

Gegeben seien die Funktion $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{\sqrt{1 + (1 + x_1^2)^{x_2}}}{(1 + x_3^2)^2}$.

- (a) Bestimmen Sie $\text{grad } g$.
- (b) Bestimmen Sie die Niveaumenge zum Niveau $c = 0$.
- (c) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} g(x) &= \frac{x_1 x_2 (1 + x_1^2)^{x_2 - 1}}{(1 + x_3^2)^2 \sqrt{1 + (1 + x_1^2)^{x_2}}} \\ \partial_{x_2} g(x) &= \partial_{x_2} \frac{\sqrt{1 + \exp(x_2 \ln(1 + x_1^2))}}{(1 + x_3^2)^2} \\ &= \frac{\ln(1 + x_1^2) e^{x_2 \ln(1 + x_1^2)}}{2(1 + x_3^2)^2 \sqrt{1 + (1 + x_1^2)^{x_2}}} \\ \partial_{x_3} g(x) &= -\frac{4x_3 \sqrt{1 + (1 + x_1^2)^{x_2}}}{(1 + x_3^2)^3}\end{aligned}$$

woraus wir

$$\text{grad } g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1 x_2 (1 + x_1^2)^{x_2 - 1} (1 + x_3^2)}{(1 + x_3^2)^2 \sqrt{1 + (1 + x_1^2)^{x_2}}} \\ \frac{\ln(1 + x_1^2) (1 + x_1^2)^{x_2} (1 + x_3^2)}{2(1 + x_3^2)^2 \sqrt{1 + (1 + x_1^2)^{x_2}}} \\ -\frac{4x_3 \sqrt{1 + (1 + x_1^2)^{x_2}}}{(1 + x_3^2)^3} \end{pmatrix}$$

erhalten.

- (b) Wegen $1 + x_1^2 > 0$, $1 + x_3^2 > 0$ für beliebige $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ folgt $(1 + x_1^2)^{x_2} > 0$, $(1 + x_3^2)^2 > 0$ für alle $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ und somit insbesondere $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^3$, die Niveaumenge ist folglich die leere Menge.
- (c) Sei $\nabla g(x) = 0$. Wie bereits festgestellt, gilt auf jeden Fall $\sqrt{1 + (1 + x_1^2)^{x_2}} > 0$, womit aus der dritten Komponente sofort $x_3 = 0$ folgt. Aus der zweiten Komponente erhalten wir die Bedingung

$$\ln(1 + x_1^2) \underbrace{e^{x_2 \ln(1 + x_1^2)}}_{>0} \underbrace{(1 + x_3^2)}_{>0}$$

und somit $1 + x_2^2 \stackrel{!}{=} 1$, was $x_2 = 0$ impliziert. Mit $x_2 = 0$ ist aber auch sofort die erste Komponente 0, wir erhalten

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0, x_3 = 0\}$$

Aufgabe H 117. Kritische Stellen und Extrema

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto (e y_1 + e^{\exp(-y_1)}) y_2^5 - 5 y_2$.

- (a) Bestimmen Sie $\nabla f(y)$ und $Hf(y)$.
 (b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen und entscheiden Sie jeweils, ob in diesen lokale Extrema oder Sattelpunkte vorliegen.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Es gelten:

$$\begin{aligned} \nabla f(y) &= \begin{pmatrix} (e + e^{\exp(-y_1)} \cdot \exp(-y_1) \cdot (-1)) y_2^5 \\ 5 (y_1 + e^{\exp(-y_1)}) y_2^4 - 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (e - e^{\exp(-y_1)-y_1}) y_2^5 \\ 5 (y_1 + e^{\exp(-y_1)}) y_2^4 - 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und entsprechend

$$Hf(y) = \begin{pmatrix} -e^{\exp(-y_1)-y_1} (-e^{-y_1} - 1) y_2^5 & 5 (e - e^{\exp(-y_1)-y_1}) y_2^4 \\ 5 (e - e^{\exp(-y_1)-y_1}) y_2^4 & 20 (e y_1 + e^{\exp(-y_1)}) y_2^3 \end{pmatrix}$$

- (b) Sei $\nabla f(y) = 0$. Dann ergeben sich aus der ersten Komponente die Möglichkeiten $y_2 = 0$ oder $e - e^{\exp(-y_1)-y_1}$. Da ersteres auf $-5 = 0$ führt, liefert dies keine kritische Stelle. Zweiteres gilt genau dann, wenn

$$\exp(-y_1) - y_1 = 1$$

ist. Durch geschicktes Raten sehen wir, dass $y_1 = 0$ eine Lösung ist: $\exp(0) - 0 = 1$. Da ferner die Funktion $y_1 \mapsto \exp(-y_1) - y_1$ wegen

$$\frac{d}{dy_1} (\exp(-y_1) - y_1) = -\exp(-y_1) - 1 \leq -1 < 0 \quad \forall y_1$$

streng(!) monoton fällt, existieren keine weiteren Kandidaten. Einsetzen in die zweite Komponente liefert die Bedingung

$$-5 + 5e y_2^4 = 0,$$

wir erhalten die kritischen Stellen

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Hessematrizen an den kritischen Stellen:

$$\begin{aligned} Hf(K_1) &= Hf\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2e \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)^5 & 0 \\ 0 & 20e \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt[4]{e}} & 0 \\ 0 & -20\sqrt[4]{e} \end{pmatrix} \\ Hf(K_2) &= \begin{pmatrix} 2e \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)^5 & 0 \\ 0 & 20e \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt[4]{e}} & 0 \\ 0 & 20\sqrt[4]{e} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgrund der Diagonalgestalt können wir die Eigenwerte ablesen und erhalten mit 4.5.5:

- In K_1 sind beide EW negativ, die Hesse-Matrix also negativ definit, hier liegt ein lokales Maximum vor.
- In K_2 sind beide EW positiv, die Hesse-Matrix also positiv definit, hier liegt ein lokales Minimum vor.

Aufgabe H 118. Funktionen in mehreren Veränderlichen

Gegeben sei die Funktion *Luxemburg*: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto e^{-x^2-y^2} + \frac{y^2}{e}$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla \text{Luxemburg}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ sowie die kritischen Stellen.

(b) Sei $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = \text{Luxemburg}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \right\}$ der zugehörige Graph. Skizzieren Sie die Schnitte von $\mathcal{G}$ mit der x - z - sowie mit der y - z -Ebene in ein geeignetes Koordinatensystem für $(x, y)^T \in [-3, 3] \times [-3, 3]$.

Hinweis: Zum Auswerten der Funktion an Teststellen dürfen Sie hier einen Taschenrechner oder ein vergleichbares elektronisches Hilfswerkzeug benutzen.

(c) Entscheiden Sie jeweils, ob an den kritischen Stellen lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\nabla \text{Luxemburg}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2xe^{-x^2-y^2} \\ 2y(e^{-1} - e^{-x^2-y^2}) \end{pmatrix}$$

Sei nun $\nabla \text{Luxemburg}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Aus der ersten Komponente folgt sofort $x = 0$.

Wir erhalten aus der zweiten die Gleichung

$$-2y(e^{-1} - e^{-y^2}) = 0$$

Somit ist $y = 0$ oder (aufgrund der Injektivität der Exponentialfunktion) $-1 = -y^2$, also $y = 1$ oder $y = -1$. Die kritischen Stellen sind somit

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

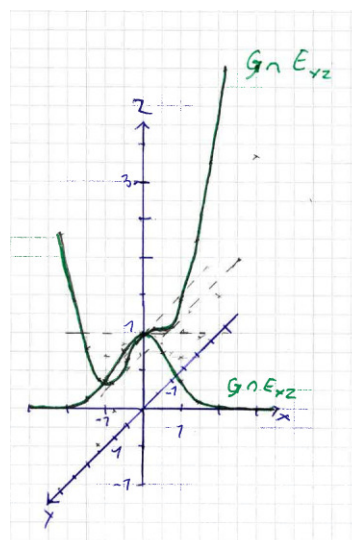
- (b) In der x - z -Ebene E_{xz} gilt $y = 0$, der Schnitt entspricht dem Graphen der Funktion $x \mapsto \exp(-x^2)$. Analog gilt für die y - z -Ebene E_{yz} $x = 0$, der Schnitt entspricht dem Graphen der Funktion $y \mapsto e^{-1}y^2 + e^{-y^2}$. Diese beiden Funktionen sind gerade, es genügt aus Symmetriegründen exemplarische Werte im Intervall $[0, 3]$ näherungsweise(!) zu berechnen:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
y	0	0	0	0	0	0	0
$z \approx f((x, y)^T)$	1	0,7788	0,3679	0,1054	0,0183	0,0019	0,0001
$2z$	2	1,5576	0,7358	0,2108	0,0366	0,0039	0,0002

x	0	0	0	0	0	0	0
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$z \approx f((x, y)^T)$	1	0,8708	0,7358	0,9331	1,4898	2,3012	3,3110
$2z$	2	1,7415	1,4715	1,8663	2,9797	4,6024	6,6221

Da die Werte beim ersten Schnitt sehr klein sind, empfiehlt es sich, für die z -Achse eine etwas größere Skalierung zu wählen, in diesem Falle wurde der Faktor 2 gewählt.

Vorsicht: Diese Wahl ist hier möglich, da nur ein geeignetes Koordinatensystem verlangt war. Ist ein kartesisches System verlangt, müssen die Achsen natürlich alle die selbe Skalierung haben.



- (c) Wir berechnen die Hessematrix: Es gilt

$$Hf \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (4x^2 - 2)e^{-x^2-y^2} & 4xye^{-x^2-y^2} \\ 4xye^{-x^2-y^2} & 2e^{-1} - 2e^{-x^2-y^2} + 4y^2e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

und somit

$$Hf(K_1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{4}{e} \end{pmatrix} = Hf(K_3)$$

$$Hf(K_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2(1 - \frac{1}{e}) \end{pmatrix}$$

In K_1 und K_3 haben die Eigenwerte $(-\frac{2}{e}, \frac{4}{e})$ verschiedene Vorzeichen, hier liegen Sattelpunkte vor. In K_2 haben die Eigenwerte $(-2$ und $-2(1 - \frac{1}{e}))$ wegen $1 > \frac{1}{e}$ beide ein negatives Vorzeichen, hier liegt somit negative Definitheit vor, an dieser Stelle befindet sich ein lokales Maximum.

Aufgabe H 119. Schmiequadriken

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{\cos(1-x^2)}{1+y^2}$.

- (a) Bestimmen Sie $\text{grad } f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ und $\text{Hf}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.
- (b) Geben Sie jeweils das Taylorpolynom 2. Grades in den Entwicklungspunkten $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an.
- (c) Klassifizieren Sie die Schmiequadriken in diesen Punkten gemäß 7.3.7/7.3.8.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \nabla f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{2x \sin(1-x^2)}{1+y^2} \\ -\frac{2y \cos(1-x^2)}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix} \\ \text{Hf}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{2 \sin(1-x^2) - 4x^2 \cos(1-x^2)}{1+y^2} & -\frac{4xy \sin(1-x^2)}{(1+y^2)^2} \\ -\frac{4xy \sin(1-x^2)}{(1+y^2)^2} & -\frac{2 \cos(1-x^2)}{(1+y^2)^2} + \frac{8y^2 \cos(1-x^2)}{(1+y^2)^3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2 \sin(1-x^2) - 4x^2 \cos(1-x^2)}{1+y^2} & -\frac{4xy \sin(1-x^2)}{(1+y^2)^2} \\ -\frac{4xy \sin(1-x^2)}{(1+y^2)^2} & \frac{2(3y^2-1) \cos(1-x^2)}{(1+y^2)^3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (b) Wir erhalten mit (a)

$$f(P) = \cos(1) \quad \left| \quad \nabla f(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \right| \quad \text{Hf}(P) = \begin{pmatrix} 2 \sin(1) & 0 \\ 0 & -2 \cos(1) \end{pmatrix}$$

$$f(Q) = 1 \quad \left| \quad \nabla f(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \right| \quad \text{Hf}(Q) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Hieraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} T_2\left(f, (x, y)^\top, P\right) &= f(P) + \left\langle \nabla f(P) \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \text{Hf}(P) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right. \\ &= \cos(1) + \sin(1)x^2 - \cos(1)y^2 \\ T_2\left(f, (x, y)^\top, Q\right) &= f(Q) + \left\langle \nabla f(Q) \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - Q \right\rangle + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} - Q \right) \text{Hf}(Q) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - Q \right) \\ &= 1 - 2(x-1)^2 - y^2 \end{aligned}$$

- (c) Mit dem Taylorpolynom 2. Stufe erhalten wir für die Schmiequadrik in P die Gleichung

$$-\cos(1) - \sin(1)x^2 + \cos(1)y^2 + z = 0$$

bzw.

$$-2 \sin(1)x^2 + 2 \cos(1)y^2 + 2(z - \cos(1)) = 0$$

Mit $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ (wegen $\pi > 3$) und somit $0 < \sin(1)$, $0 < \cos(1)$ liegt hier ein hyperbolisches Paraboloid vor.

Für Q erhalten wir aus $z = T_2(f, (x, y)^T, Q)$ die Gleichung

$$4(x-1)^2 + 2y^2 + 2(z-1) = 0,$$

die Schmiegequadrik ist ein elliptisches Paraboloid.

Frischhaltebox

Aufgabe H 120.

Gegeben seien die Vektoren $u_1 = (2, 4, 2, -2, 6)^T$, $u_2 = (1, 8, 5, -1, 3)^T$ und $u_3 = (1, 16, 1, -3, 9)^T$. Bestimmen Sie ein ONS $F : f_1, f_2, f_3$ mit $L(u_1) = L(f_1)$, $L(u_1, u_2) = L(f_1, f_2)$ und $L(u_1, u_2, u_3) = L(f_1, f_2, f_3)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir verwenden das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren:

$$f_1 := \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{4+16+4+4+36}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{64}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2^* := u_2 - \langle u_2 | f_1 \rangle f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{16} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=32} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$|f_2^*| = \sqrt{1+16+9+1+9} = \sqrt{36} = 6$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f_3^* := u_3 - \langle u_3 | f_1 \rangle f_1 - \langle u_3 | f_2 \rangle f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{16} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=64} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{36} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=36} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|f_3^*| = \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{4 \cdot 14} = 2\sqrt{14}$$

$$\Rightarrow f_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 121. Extrema mit Vorzeichenverteilung

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y)^\top \mapsto \cos\left(\pi \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right)$.

- (a) Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{N}_0 = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid f((x, y)^\top) = 0\}$ sowie die Vorzeichenverteilung von f .
- (b) Bestimmen Sie $\nabla f((x, y)^\top)$ sowie kritischen Stellen.
- (c) Ergänzen Sie Ihre Skizze um die kritischen Stellen und entscheiden Sie mit (a), ob an diesen lokale Minima oder Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Aus $\frac{\pi}{1+x^2+y^2} \in (0, \pi]$ folgt $\pi \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right) \in [\pi, -\pi)$. Die beiden Nullstellen des Cosinus in diesem Bereich sind $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Sei also

$$\begin{aligned}\pi \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right) &= \frac{\pi}{2} \\ \Downarrow \\ \frac{\pi}{1+x^2+y^2} &= \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \\ \Downarrow \\ 1+x^2+y^2 &= 3\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\pi \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right) &= -\frac{\pi}{2} \\ \Downarrow \\ \frac{\pi}{1+x^2+y^2} &= \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \\ \Downarrow \\ 1+x^2+y^2 &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\mathcal{N}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 2 \vee x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

Dies sind Kreise mit Radien $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sqrt{2}$, es genügt für die Vorzeichenverteilung aufgrund der Stetigkeit daher, einen Punkt außerhalb des größeren, einen innerhalb des kleineren sowie einen zwischen den Kreisen einzusetzen:

$$\begin{aligned}f\left((0, 0)^\top\right) &= \cos(\pi \cos(\pi)) = -1 \\ f\left((1, 0)^\top\right) &= \cos\left(\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(0) = 1 \\ f\left((2, 2)^\top\right) &= \cos\left(\pi \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) < 0\end{aligned}$$

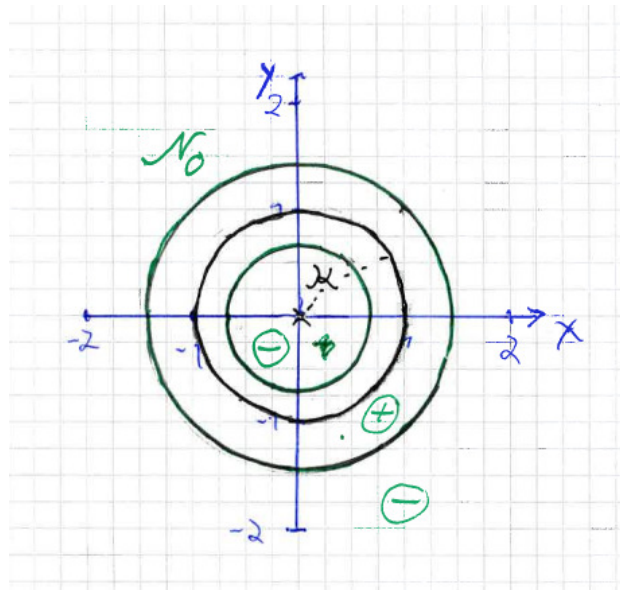


Abbildung 5: Nullstellenmenge, kritische Stellen und Vorzeichen

wobei letzteres aus $0 < \frac{\pi}{9} < \frac{\pi}{3}$ und somit $\frac{\pi}{2} < \pi \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \leq \pi$ folgt.

Mit $\left(\frac{1}{2}\right), \left(1\right) \in \mathcal{N}_0$ erhalten wir die Skizze in 5.

(b) Es ist

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2\pi^2 x \sin\left(\pi \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ -\frac{2\pi^2 y \sin\left(\pi \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Da der Cosinus genau an den Stellen die Werte $+1, -1$ annimmt, an denen der Sinus 0 wird, und somit $\sin(\pi \cos(\cdot))$ an diesen Stellen verschwindet, genügt es jeweils nur die ersten beiden Faktoren zu betrachten. Sei zunächst $x \neq 0$. Aus

$$\sin\left(\pi \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right) = 0$$

und $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ folgt somit (die Nullstellenmenge des Sinus ist $\pi\mathbb{Z}$):

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right| = 1$$

oder

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right| = 0$$

Wegen $0 < \frac{\pi}{1+x^2+y^2} \leq \pi$ führt ersteres auf:

$$\frac{\pi}{1+x^2+y^2} = \pi \Rightarrow x = y = 0,$$

zweiteres auf

$$\frac{\pi}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Sei nun $x = 0$. Dann ist entweder $y = 0$ oder erneut der Faktor $\sin\left(\pi \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right)$. Wir erhalten als Menge $\mathcal{K}$ der kritischen Stellen:

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

Aus Abbildung 5 erkennen wir, dass in $(0,0)^T$ ein lokales Minimum und in

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

lokale Maxima vorliegen.

Aufgabe H 122. Extrema mit Lagrange

Gegeben seien die Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{8}{3}x_1^2 + x_2^2$ und

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{6}(x_1 + 1)^6 - \frac{1}{5}(x_1 + 1)^5 + 3x_2^2$.

Wir suchen die Extrema von f auf der kompakten Menge $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = 0\}$.

- Stellen Sie das Lagrange-System auf.
- Bestimmen Sie alle kritischen Stellen inklusive ihrer Lagrange-Multiplikatoren.
- Bestimmen Sie das absolute Maximum von f auf D .

Lösungshinweise hierzu:

- Das Lagrange-System lautet mit

$$\partial_{x_1} g(x) = (x_1 + 1)^5 - (x_1 + 1)^4 = (x_1 + 1)^4((x_1 + 1) - 1)$$

$$(I) \quad \frac{16}{3}x_1 + \lambda(x_1 + 1)^4 x_1 = 0$$

$$(II) \quad 2x_2 + 6\lambda x_2 = 0$$

$$(III) \quad \frac{1}{6}(x_1 + 1)^6 - \frac{1}{5}(x_1 + 1)^5 + 3x_2^2 = 0$$

- Wir lösen das System aus (a). Aus (II) erhalten wir $x_2 = 0$ oder $\lambda = -\frac{1}{3}$.

- $x_2 = 0$: In diesem Falle ergibt sich aus (III) die Gleichung

$$(x_1 + 1)^6 = \frac{6}{5}(x_1 + 1)^5$$

mit den Lösungen $x_1 = -1$ und $x_1 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$. Einsetzen in (I) liefert für
 – $x_1 = -1$: $-\frac{16}{3} = 0$, folglich liegt in $(-1, 0)^T$ keine kritische Stelle:

$$- x_1 = \frac{1}{5} :$$

$$\begin{aligned} \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{5} + \lambda \left(\frac{6}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= -\frac{2^4}{3} \cdot \frac{5^4}{2^4 \cdot 3^4} = -\frac{5^4}{3^5} = -\frac{625}{243} \end{aligned}$$

- $\lambda = -\frac{1}{3}$: Aus (I) wird

$$16x_1 = (x_1 + 1)^4 x_1$$

und somit $x_1 = 0$ oder $|x_1 + 1| = 2$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (III) ergibt

$$- x_1 = 0:$$

$$3x_2^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

und somit $x_2 = -\frac{1}{3\sqrt{10}}$ und $x_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}}$

- $|x_1 + 1| = 1$: Hier gilt $x_1 + 1 = 2$ oder $x_1 + 1 = -2$, wir erhalten die Ungleichung

$$0 = \frac{(x_1 + 1)^6}{6} - \frac{(x_1 + 1)^5}{5} + 3x_2^2 \geq \frac{2^5}{3} - \frac{2^5}{5} + 3x_2^2 > 0$$

wegen $x_2^2 \geq 0$ und $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$. In diesem Falle existiert also keine Lösung des Lagrange-Systems.

Wir erhalten die kritischen Stellen:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

mit zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren

$$\lambda_1 = -\frac{625}{243}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{3}$$

- (c) Da D kompakt und f stetig ist, erhalten wir das Maximum folglich durch Einsetzen der Kandidaten und Vergleich der Werte. Als Extremalstellen hierbei nur kritische Stellen, welche wir in (b) bestimmt haben, oder Stellen, an denen ∇g verschwindet, infrage.

$$\begin{aligned} f(S_1) &= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{5^2} + 0^2 = \frac{8}{75} \\ f(S_2) &= \frac{8}{3} \cdot 0^2 + \left(\frac{1}{3\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{90} \\ f(S_3) &= \frac{1}{90} \end{aligned}$$

Ferner müssen wir noch Stellen mit $\nabla g(x) = 0$ überprüfen. Aus $\partial_{x_2} g(x) = x_2 \stackrel{!}{=} 0$ folgt sofort $x_2 = 0$ und somit analog zu (b) $x_1 = -1$ bzw. $x_1 = \frac{1}{5}$. Letzterer Wert führt (erneut) auf S_1 , ersterer ergibt die Stelle

$$S_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an der der Gradient ebenfalls verschwindet ($\partial_{x_1} g(S_4) = (-1+1)^4(-1) = 0$), allerdings hat das Lagrange-System dort keine Lösung. Mit

$$f(S_4) = \frac{8}{3} > 1 > \max\left(\frac{8}{75}, \frac{1}{90}\right)$$

erhalten wir schließlich

$$\max_{x \in D} f(x) = \frac{8}{3}.$$

das absolute Maximum ist $(-1, 0, \frac{8}{3})^T$.

Aufgabe H 123. Extrema auf abgeschlossenen Kugeln

Durch eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird mittels $\langle x | y \rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt sowie mittels $\|x\|_A = \sqrt{\langle x | x \rangle_A}$ eine („Energie“-)Norm induziert. Sei nun $n = 3$ und A die positiv definite Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungen des Gleichungssystems nach Lagrange für das Problem:

$$\max_{x \in D} \frac{1}{2} \|x\|_A^2 \quad \text{mit} \quad D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x|^2 = 25\}$$

(b) Bestimmen Sie $\tilde{x} \in \tilde{D} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x|^2 \leq 25\}$ mit $\|\tilde{x}\|_A \geq \|x'\|_A$ für alle $x' \in \tilde{D}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit

$$\frac{1}{2} \|x\|_A^2 = \frac{3}{2} x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{3}{2} x_2^2 + 4 x_3^2$$

ergibt sich das Lagrange-System

$$(I) \quad 3x_1 + x_2 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$(II) \quad x_1 + 3x_2 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$(III) \quad 8x_3 + 2\lambda x_3 = 0$$

$$(IV) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25$$

Aus (III) folgt sofort folgende Fallunterscheidung:

$\lambda = -4$: Wir erhalten aus (I) und (II)

$$-13x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 - 13x_2 = 0$$

Da $\begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 1 & -13 \end{pmatrix}$ invertierbar ist – die Determinante ist 168 – folgen $x_1 = x_2 = 0$ und somit $x_3^2 = 25$ und somit die Kritischen Stellen

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0$: Aus (I) und (II) erhalten wir

$$\begin{aligned}(3 + 2\lambda)x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + (3 + 2\lambda)x_2 &= 0\end{aligned}$$

In diesem Falle gilt $x_1^2 + x_2^2 > 0$, was bedeutet, wir suchen nach nicht-trivialen Lösungen des LGS

$$\begin{pmatrix} (3 + 2\lambda) & 1 \\ 1 & (3 + 2\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Folglich muss

$$0 = (3 + 2\lambda)^2 - 1 = 4\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

gelten und somit $\lambda = -1$ oder $\lambda = -2$, wie sich durch Lösungsformel oder geschicktes Raten (sprich: Einsetzen der ganzzahligen Teiler von 8) ergibt. Wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\lambda = -1 : \quad x_1 + x_2 &= 0 \\ \lambda = -2 : \quad x_1 - x_2 &= 0\end{aligned}$$

insbesondere also $x_2^2 = x_1^2$, was auf

$$x_1^2 = \frac{25}{2}$$

führt und somit die kritischen Stellen

$$\begin{aligned}\lambda = -1 : \quad K_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, K_4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda = -2 : \quad K_5 &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, K_6 = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- (b)** Die Menge $\tilde{D}$ ist als abgeschlossene Kugel kompakt, somit wird das Maximum im Inneren oder auf dem Rand angenommen. Ferner gilt $\|\tilde{x}\|_A \geq \|x'\|_A \forall x' \in \tilde{D}$ genau dann, wenn $\frac{1}{2}\|\tilde{x}\|_A^2 \geq \frac{1}{2}\|x'\|_A^2 \forall x' \in \tilde{D}$ gilt. Die Kandidaten auf dem Rand sind genau die in der vorherigen Aufgabe bestimmten Stellen, da $\nabla g(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\tilde{D} = D$ gilt. Wir setzen diese in $f(x) := \frac{1}{2}\|x\|_A^2 = \frac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 4x_3^2$ ein:

$$\begin{aligned}f(K_1) &= 100 = f(K_2) \\ f(K_3) &= \frac{3}{4} \cdot 25 + \frac{1}{4} \cdot 25 + \frac{3}{4} \cdot 25 \\ &= \frac{225}{4} = f(K_4) \\ f(K_5) &= \frac{3}{4} \cdot 25 - \frac{1}{4} \cdot 25 + \frac{3}{4} \cdot 25 \\ &= \frac{125}{4} = f(K_6)\end{aligned}$$

Wegen $125 < 400, 225 < 400$ folgt, dass der Maximalwert auf dem Rand in K_1 und K_2 angenommen wird. Wir müssen nur noch das Innere überprüfen. Da dieses offen ist, sind die Kandidaten im Inneren genau die kritische Stellen des unrestringierten Problems $\max_{x \in \mathbb{R}^3} f(x)$, die im Inneren liegen. Da aber $\nabla f(x) = Ax$ gilt (vgl. Lagrange-System), ist der einzige Kandidat $x = 0$: A ist positiv definit! Für diesen gilt $f(x) = 0 < 100$. Wir erhalten $\tilde{x} = K_1$ (oder $\tilde{x} = K_2$).

Aufgabe H 124. Extrema mit Parametrisierungen

Seien $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{4}x^2y - \frac{2}{3}x^2$ und $D = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3 \}$.

- (a) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von $\min_{(x,y)^T \in D} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ mit der Lagrange-Methode.
- (b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mittels einer geeigneten Parametrisierung.
- (c) Entscheiden Sie jeweils, ob in diesen ein lokales oder globales Minimum oder Maximum oder nichts dergleichen vorliegt.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Das Lagrange-System lautet mit $g((x,y)^T) = x^2 - y^3$:

$$(I) \quad \frac{1}{2}xy - \frac{4}{3}x + 2\lambda x = 0$$

$$(II) \quad \frac{1}{4}x^2 - 3\lambda y^2 = 0$$

$$(III) \quad x^2 - y^3 = 0$$

Aus (II) und (III) erhalten wir:

$$\frac{1}{4}y^3 = 3\lambda y^2$$

und somit $y = 0$ oder $y = 12\lambda$. Im ersten Falle folgt aus (III) sofort $x = 0$, für welches (I) ebenfalls gilt, λ ist in diesem Falle beliebig wählbar.

Für zweiteres erhalten wir mit (I)

$$0 = 6\lambda x - \frac{4}{3}x + 2\lambda x = 8\lambda x - \frac{4}{3}x$$

also ist entweder $x = 0$ (und somit y ebenfalls) oder es gilt $\lambda = \frac{1}{6}$. Hieraus folgt sofort $y = 2$ und somit $x = -2\sqrt{2}$ bzw. $x = 2\sqrt{2}$. Die kritischen Stellen lauten:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (b) Wir können D mittels $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sqrt[3]{t^2} \end{pmatrix}$ parametrisieren und erhalten

$$(f \circ \alpha)(t) = \frac{1}{4}t^2\sqrt[3]{t^2} - \frac{2}{3}t^2 = \frac{1}{4}(t^8)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}t^2$$

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned}
 (f \circ \alpha)'(t) &= \frac{2}{3} (t^8)^{-\frac{2}{3}} t^7 - \frac{4}{3} t \\
 &= \frac{2}{3} t^{-4} (t^2)^{-\frac{2}{3}} t^7 - \frac{4}{3} t = \frac{2}{3} \underbrace{t^3}_{=t \cdot t^2} (t^2)^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3} t \\
 &\quad = \frac{2}{3} \underbrace{t^3}_{=t \cdot (t^6)^{\frac{1}{3}}} (t^2)^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3} t \\
 &= \frac{2}{3} t \left(\frac{t^6}{t^4} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} t = \frac{2}{3} t (t^2)^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} t = \frac{2}{3} t \sqrt[3]{t^2} - \frac{4}{3} t
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt wiederum $t = 0$ oder $\frac{2}{3} \sqrt[3]{t^2} = \frac{4}{3}$ und somit

$$t^2 = 2^3 = 8 \Rightarrow t = \pm 2\sqrt{2}$$

Einsetzen ergibt die Stellen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

welche wir in (a) (offenbar korrekt) berechnet haben.

Bemerkung: Man beachte, dass die obige Rechnung (Ableiten) formal erstmal nur für $t \neq 0$ gilt, für $t = 0$ ergibt sich die Ableitung durch stetige Fortsetzung, vgl. Satz 2.5.11. Ferner wurde bei den Umformungen und Klammerungen stets darauf geachtet, dass die aus- oder „ein“ geklammerten Terme stets von der Form $(t^2)^{\dots}$ waren. Dies ist wichtig für die Gültigkeit/Anwendbarkeit der Potenzgesetze: Es gilt stets $t^2 > 0$ für $t \neq 0$. Ferner

- (c) Die Art können wir mit Hilfe der Parametrisierung recht einfach bestimmen: Einsetzen der Werte $t \in \{-2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}\}$ ergibt mit $t^8 = (t^2)^4$ und $t^2 \in \{0, 2^3\}$:

$$f(K_2) = (f \circ \alpha)(-2\sqrt{2}) = \frac{1}{4} \left(2^{3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}} \right) - \frac{2}{3} 2^3 = -\frac{4}{3}$$

$$f(K_1) = (f \circ \alpha)(2\sqrt{2}) = 0$$

$$f(K_3) = (f \circ \alpha)(2\sqrt{2}) = \frac{1}{4} \left(2^{3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}} \right) - \frac{2}{3} 2^3 = -\frac{4}{3}$$

Da $f \circ \alpha$ auf dem Intervall $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ ein globales Minimum und globales Maximum auf dem Rand oder an einer kritischen Stelle annimmt, folgt, dass in K_1 ein lokales Maximum von f vorliegt. Wegen

$$(f \circ \alpha)(t) = \frac{1}{4} (t^8)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} t^2 = t^2 \left(\frac{1}{4} \sqrt[3]{t^2} - \frac{2}{3} \right) \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} \infty$$

ist dieses jedoch nicht global.

Wir können ferner wegen der Stetigkeit von f , der Symmetrie und dem Grenzwertverhalten ein $\tilde{t} > 2\sqrt{2}$ so wählen, dass $f(\alpha(t)) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus [-\tilde{t}, \tilde{t}]$ gilt sowie $f(\tilde{t}) = 0$. Auf dem Intervall $[-\tilde{t}, \tilde{t}]$ nimmt $f \circ \alpha$ ein globales Minimum und ein globales Maximum an. Es gilt

$$f(\alpha(-\tilde{t})) = f(\alpha(\tilde{t})) = 0 > f(\alpha(2\sqrt{2})) = f(\alpha(-2\sqrt{2}))$$

Entsprechend liegen die absoluten Minima auf dem Intervall in den Stellen $2\sqrt{2}$ und $-2\sqrt{2}$: Die kritischen Stellen im Inneren entsprechen den bereits bestimmten. Aus der Wahl von $\tilde{t}$ folgt weiter, dass

$$f(\alpha(2\sqrt{2})) = f(\alpha(-2\sqrt{2})) \leq f(\alpha(t))$$

für **alle** $t \in \mathbb{R}$ gilt, somit liegen in K_2 und K_3 globale Minima vor.

Frischhaltebox

Aufgabe H 125. Hesse-Normalform

Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der folgenden Ebene:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und erhalten mit $25 + 49 + 9 = 83$ den Normalenvektor

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{83}} \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aus

$$\left\langle \eta \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{10}{\sqrt{83}}$$

erhalten durch Umklappen des Vorzeichens wir die Darstellung

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \frac{1}{\sqrt{83}} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{10}{\sqrt{83}} \right\}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 126. Differentiationsregeln

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der durch folgende Zuordnungsvorschriften gegebenen Funktionen direkt und unter Verwendung der Kettenregel 4.8.3. Untersuchen Sie den maximalen Definitionsbereich aller dabei auftretenden Funktionen sowie der Verkettung selbst.

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f_1 \left(f_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right)$ mit $f_1(t) = \arcsin(t)$ und $f_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \exp(-x^2 - y^2)$.

(b) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto g_1 \left(g_2 \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \right)$ mit $g_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x^2 z - y \\ xy + \sqrt{z} \\ x - y - zxy \end{pmatrix}$ und $g_2 \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u - v \\ u + v + 1 \\ uv \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Diskussion muss nicht für die Jacobi-Matrix erfolgen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der maximale Definitionsbereich von f_1 ist (vgl. Beispiel 2.3.2) $[-1, 1]$.

f_2 hingegen ist auf komplett $\mathbb{R}^2$ wohldefiniert (weder Exponential- noch Polynomfunktionen haben Definitionslücken).

Da der Wertebereich wegen $-x^2 - y^2 \leq 0$ mit Gleichheit für $x = y = 0$ sowie $\exp(r) \xrightarrow{r \rightarrow -\infty} 0$ in $(0, 1]$ enthalten ist, folgt, dass der maximale Definitionsbereich der Verkettung gegeben ist durch $\mathbb{R}^2$.

Direkte Methode: Es gilt

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \arcsin(\exp(-x^2 - y^2)) \Rightarrow \\ J(f_1 \circ f_2) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} \cdot \exp(-x^2 - y^2) \cdot (-2x) \\ \frac{1}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} \cdot \exp(-x^2 - y^2) \cdot (-2y) \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2x \exp(-x^2-y^2)}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} & -\frac{2y \exp(-x^2-y^2)}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kettenregel: Wir erhalten mit

$$\begin{aligned} Jf_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right) \\ Jf_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} -2x \exp(-x^2 - y^2) & -2y \exp(-x^2 - y^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entsprechend

$$J(f_1 \circ f_2) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{2x \exp(-x^2-y^2)}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} & -\frac{2y \exp(-x^2-y^2)}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} \end{pmatrix}$$

(b) Der maximale Definitionsbereich von g_1 ist – da die Komponenten mit Ausnahmen des Terms $\sqrt{z}$ Polynomfunktionen sind – gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0 \right\}$$

Der maximale Definitionsbereich von g_2 ist hingegen gesamt $\mathbb{R}^2$.

Für die Verkettung muss $uv \geq 0$ gelten, der maximale Definitionsbereich ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid uv \geq 0 \right\}$$

Direkte Methode: Es gilt

$$\begin{aligned} (g_1 \circ g_2) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} (u-v)^2 uv - (u+v+1) \\ (u-v)(u+v+1) + \sqrt{uv} \\ (u-v) - (u+v+1) - (u-v)(u+v+1)uv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^3 v - 2u^2 v^2 + uv^3 - u - v - 1 \\ u^2 - v^2 + u - v + \sqrt{uv} \\ -2v - 1 - u^3 v + uv^3 - u^2 v + uv^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ J(g_1 \circ g_2) \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 3u^2 v - 4uv^2 + v^3 - 1 & u^3 - 4u^2 v + 3uv^2 - 1 \\ 2u + 1 + \frac{v}{2\sqrt{uv}} & -2v - 1 + \frac{u}{2\sqrt{uv}} \\ -3u^2 v + v^3 - 2uv + v^2 & -2 - u^3 + 3uv^2 - u^2 + 2uv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kettenregel: Wir erhalten mit

$$\begin{aligned} Jg_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 2xz & -1 & x^2 \\ y & x & \frac{1}{2\sqrt{z}} \\ 1 - zy & -1 - zx & -xy \end{pmatrix} \\ Jg_2 \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entsprechend

$$\begin{aligned} J(g_1 \circ g_2) \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 2(u-v)uv & -1 & (u-v)^2 \\ u+v+1 & u-v & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ 1-uv(u+v+1) & -1-uv(u-v) & -(u-v)(u+v+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u^2 v - 2uv^2 & -1 & u^2 - 2uv + v^2 \\ u+v+1 & u-v & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ 1-u^2 v - uv^2 - uv & -1-u^2 v + uv^2 & -u^2 + v^2 - u + v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3u^2 v - 4uv^2 - 1 + v^3 & 3uv^2 - 4u^2 v - 1 + u^3 \\ 2u + 1 + \frac{v}{2\sqrt{uv}} & -1 - 2v + \frac{u}{2\sqrt{uv}} \\ -3u^2 v + v^3 - 2uv + v^2 & -2 + 3uv^3 + 2uv - u^3 - u^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe H 127. Verhalten von Gradienten – Skizze von Kurven

Gegeben sei die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto xy - y^2 + x$.

(a) Berechnen Sie $\nabla g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten in den Punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0$ für $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

(c) Skizzieren Sie die Tangenten in diesen Punkten.

(d) Skizzieren Sie grob den Verlauf der durch $g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0$ gegebenen Kurve.

Hinweis: Arbeiten Sie mit folgenden Rundungswerten: $\sqrt{3} \approx 1,7$, $\sqrt{5} \approx 2,2$, $\sqrt{21} \approx 4,6$.

Lösungshinweise hierzu:**(a)** Es ist

$$\nabla g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y+1 \\ x-2y \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$-y^2 + xy + x = 0$$

und somit

$$y_{1/2}(x) = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4x}}{-2}$$

und somit

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -0,6 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ -0,7 \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 2,7 \end{pmatrix}$$

$$P_8 = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

$$P_9 = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 3,8 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

$$\nabla g(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_2) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_4) \approx \begin{pmatrix} 0,4 \\ 2,2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_5) \approx \begin{pmatrix} 2,6 \\ -2,2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_6) \approx \begin{pmatrix} 0,3 \\ 3,4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_7) \approx \begin{pmatrix} 3,7 \\ -3,4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_8) \approx \begin{pmatrix} 0,2 \\ 4,6 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_9) \approx \begin{pmatrix} 4,8 \\ -4,6 \end{pmatrix}$$

- (b)** Die Tangenten (Tangente bzw. T. P_j mit $j = 1, 2, 3, \dots, 9$) sind in Abbildung 6 abwechselnd grün und schwarz gezeichnet zwecks einer besseren Unterscheidbarkeit. Der Verlauf der eigentlichen Niveaulinie – in der Skizze $\mathcal{N}_0$ ist mit gelben Marker nachgezeichnet. Die Bleistiftpfeile sind die in den Testpunkten angehefteten Gradientenvektoren bzw. skalierte Versionen davon.

Bemerkung: Die vollständige Niveaulinie besteht aus zwei Teilen, ein Teil liegt im dritten Quadranten außerhalb des sichtbaren Bereichs. Letzterer wurde hier so gewählt, dass die in den vorherigen Aufgaben verlangten Punkte und Tangenten im sichtbaren Bereich lagen. Falls man ihn größer wählt, müsste man obigen Prozess für die Punkte im dritten Quadranten wiederholen.

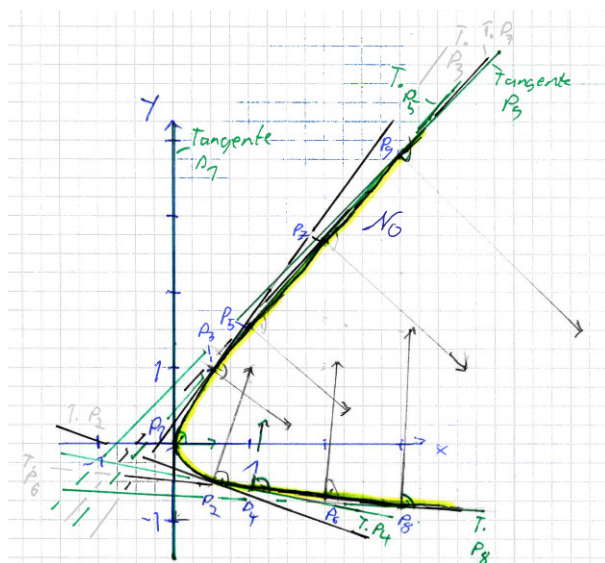


Abbildung 6: Skizze zu H127

Aufgabe H 128. Rotation und Divergenz

Geben sei das parameterabhängige Vektorfeld

$$f_\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \begin{pmatrix} \exp(\sin(x_3)) + 9x_2 \\ \alpha^2 x_1 + \cos(x_3) \\ -x_2 \sin(x_3) + x_1 \cos(x_3) \exp(\sin(x_3)) \end{pmatrix} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- (a) Bestimmen Sie $\operatorname{rot} f_\alpha$ und $\operatorname{div} f_\alpha$.
- (b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt f_α ein Potential?
- (c) Berechnen Sie $\operatorname{div} \operatorname{rot} f_\alpha(x)$ für $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} f_\alpha(x) &= \begin{pmatrix} \partial_{x_2}(-x_2 \sin(x_3) + x_1 \cos(x_3) \exp(\sin(x_3))) - \partial_{x_3}(\alpha^2 x_1 + \cos(x_3)) \\ \partial_{x_3}(\exp(\sin(x_3)) + 9x_2) - \partial_{x_1}(-x_2 \sin(x_3) + x_1 \cos(x_3) \exp(\sin(x_3))) \\ \partial_{x_1}(\alpha^2 x_1 + \cos(x_3)) - \partial_{x_2}(\exp(\sin(x_3)) + 9x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(x_3) + \sin(x_3) \\ \cos(x_3) \exp(\sin(x_3)) - \cos(x_3) \exp(\sin(x_3)) \\ \alpha^2 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2 - 9 \end{pmatrix} \\ \operatorname{div} f(x) &= \partial_{x_1}(\exp(\sin(x_3)) + 9x_2) + \partial_{x_2}(\alpha^2 x_1 + \cos(x_3)) \\ &\quad + \partial_{x_3}(-x_2 \sin(x_3) + x_1 \cos(x_3) \exp(\sin(x_3))) \\ &= -x_2 \cos(x_3) - x_1 \sin(x_3) \exp(\sin(x_3)) + x_1 (\cos(x_3))^2 \exp(\sin(x_3)) \end{aligned}$$

- (b) Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, hat f_α genau dann ein Potential, wenn die Rotation verschwindet. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha \in \{-3, 3\}$ ist, siehe (a).

- (c) Da f_α beliebig oft stetig differenzierbar ist, – die Komponentenfunktionen sind Kompositionen glatter Funktionen und haben keine Definitionslücken – gilt nach 5.2.8 für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} f_\alpha(x) = 0$$

insbesondere für alle $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Aufgabe H 129. *Extrema mit Jacobi-Matrix*

Geben seien die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3: x \mapsto x_1^2 + x_3^2 + x_2 \quad , \quad g: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 9 \\ x_1^2 + x_3^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathcal{M} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = 0\}$

- (a) Bestimmen Sie $\nabla f(x)$ und $Jg(x)$.
- (b) Weisen Sie nach, dass $\mathcal{M}$ beschränkt ist.
- (c) Bestimmen Sie die globalen Extremwerte der Einschränkung $f|_{\mathcal{M}}$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Es gilt

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

- (b) Aus $x_1^2 + x_2^2 = 9$ folgt $x_1, x_2 \in [-3, 3]$, analog folgt aus $x_1^2 + x_3^2 = 4$ $x_1, x_3 \in [-2, 2]$. Entsprechend ist $\mathcal{M}$ Teilmenge des beschränkten Quaders $[-2, 2] \times [-3, 3] \times [-2, 2]$.
- (c) Das Lagrange-System lautet:

$$(I) \quad 2x_1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_1 = 0$$

$$(II) \quad 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0$$

$$(III) \quad 2x_3 + 2\lambda_2 x_3 = 0$$

$$(IV) \quad x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$$

$$(V) \quad x_1^2 + x_3^2 - 9 = 0$$

Aufgrund der Nebenbedingungen sind x_1 und x_3 nie gleichzeitig 0, analoges gilt für x_1 und x_2 . Entsprechend hat die Jacobi-Matrix

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_1 \\ 2x_2 & 0 \\ 0 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

höchstens dann nicht vollen Rang in $\mathcal{M}$ wenn $x_2 = x_3 = 0$ gilt. In diesem Falle folgt aber $9 = x_1^2 = 4$, ein Widerspruch.

Folglich hat die Jacobi-Matrix in $\mathcal{M}$ stets vollen Rang, sämtliche Extremstellen können mit Lagrange gefunden werden.

Aus (II) folgt unmittelbar $\lambda_1 x_2 \neq 0$. Aus (III) wiederum $x_3 = 0$ oder $\lambda_2 = -1$.

$x_3 = 0$: In diesem Falle folgt $x_1^2 = 9 > 4$, dies liefert keine kritische Stelle.

$\lambda_2 = -1$: In diesem Falle folgt aus (II) (wegen $\lambda_1 \neq 0$) sofort $x_1 = 0$. Dann ist $x_2 = \pm 2$ und $x_3 = \pm 4$ (nach (IV) und (V)). Da in diesen Fällen ferner $\lambda_1 = -\frac{1}{2x_2}$ wohldefiniert ist, liefert dies die kritischen Stellen:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & K_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ K_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} & K_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgrund der Beschränktheit von $\mathcal{M}$ sowie der Stetigkeit von g ist $\mathcal{M}$ kompakt, wir erhalten die Extremwerte durch Einsetzen dieser Kandidaten:

$$\begin{aligned} f(K_1) &= 9 + 2 = 11 = f(K_3) \\ f(K_2) &= 9 - 2 = 7 = f(K_4) \end{aligned}$$

Der globale (absolute) Maximalwert von $f|_{\mathcal{M}}$ ist 11, der globale Minimalwert 7.

Frischhaltebox

In Standardkoordinaten sei der Punkt X gegeben durch ${}_{\mathbb{E}}X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung bezüglich $\mathbb{O} := \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir bestimmen zunächst die zugehörige Transformationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} :$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$-5Z_2 + 4Z_1 : \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{array} \right]$$

$$1/5(Z_1 - 4Z_2) : \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{array} \right]$$

Wir erhalten somit:

$${}_{\mathbb{O}}X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 18 \\ -23 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Die folgenden Aufgaben sind Zusatzaufgaben zur freiwilligen Übung und gehen **nicht** in die Bewertung mit ein, es erfolgt **keine** ILIAS-Abgabe.
Eine Bearbeitung als Vorbereitung auf die Klausur ist dennoch ratsam. Einige dieser Aufgaben stammen in dieser bzw. ähnlicher Form aus Prüfungen früherer Semester.

Aufgabe H 130. Gravitationspotential

Wir fixieren die Erde in $P_E := (0, 0, 0)^\top$ sowie den Mond im Punkt $P_M := (0, 0, 1)^\top$. Das zugehörige Gravitationspotential sei (vgl. einleitendes Beispiel im Skript) gegeben durch:

$$U: \mathbb{R}^3 \setminus \{P_E, P_M\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{2m_E}{|x - P_E|} + \frac{2m_M}{|x - P_M|}$$

wobei m_E die Erdmasse und $m_M = \frac{1}{81}m_E$ die Mondmasse sei.

- (a) Bestimmen Sie ∇U .
- (b) Bestimmen Sie den Punkt P_G auf der Verbindungsstrecke von P_E und P_M , auf dem sich die Gravitationskräfte von Erde und Mond aufheben.
- (c) Bestimmen Sie $\operatorname{div}(\nabla U)(P_G)$ und $\operatorname{rot} \nabla U(P_G)$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Aus dem Skript wissen wir dass die Jacobi-Matrix eines im Ursprung zentrierten Gravitationspotentials $\tilde{U}$ gegeben ist durch

$$J\tilde{U}(v) = -\frac{2}{|v|^3}v$$

Mit Hilfe der Kettenregel 4.8.3 folgt für die Verkettung mit Verschiebungen $\tau(v) = v - a$ (die zugehörige Jacobimatrix ist die Identität) sofort

$$J(\tilde{U} \circ \tau)(v) = -\frac{2}{|v - a|^3}(v - a)$$

Es gilt also:

$$\nabla U(x) = -\frac{2m_E}{|x - P_E|^3}(x - P_E) - \frac{2m_M}{|x - P_M|^3}(x - P_M)$$

- (b) Jeder Punkt der Verbindungsstrecke lässt sich mit Hilfe eines $\lambda \in [0, 1]$ schreiben als

$$x = P_E + \lambda(P_M - P_E) = \lambda P_M + (1 - \lambda)P_E$$

Somit gelten:

$$\begin{aligned}x - P_E &= \lambda(P_M - P_E) \\x - P_M &= (1 - \lambda)(P_E - P_M) \\|x - P_E| &= \lambda|P_M - P_E| \\|x - P_M| &= (1 - \lambda)|P_M - P_E|\end{aligned}$$

Da ferner $\nabla U(x) = 0$ gelten soll, folgt

$$\frac{2m_M}{(1-\lambda)^3}(1-\lambda)(P_E - P_M) = -\frac{2m_E}{\lambda^3}\lambda(P_M - P_E) = \frac{2m_E}{\lambda^2}(P_E - P_M)$$

was auf die Bedingung

$$m_M\lambda^2 = m_E(1-\lambda)^2$$

führt. Wir erhalten die quadratische Gleichung:

$$0 = (m_E - m_M)\lambda^2 - 2\lambda m_E + m_E$$

und somit mit der allgemeinen Lösungsformel und der Tatsache, dass wir uns für $0 < \lambda < 1$ interessieren

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2m_E + \sqrt{4m_E^2 - 4m_E(m_E - m_M)}}{2(m_E - m_M)} \\ &= \frac{2m_E - 2m_E\sqrt{\frac{m_M}{m_E}}}{2(m_E - m_M)} \\ &= \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha}} = \frac{9}{10}\end{aligned}$$

wobei $\alpha = \frac{1}{81}$ das Massenverhältnis von Erde und Mond bezeichne. Dies führt auf

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

(c) Aus Lemma 5.2.8 folgt sofort, dass

$$\operatorname{rot}(\nabla U) = 0$$

gilt. Ferner folgt:

$$\operatorname{div}(\nabla U)(x) = \partial_{x_1x_1}U(x) + \partial_{x_2x_2}U(x) + \partial_{x_3x_3}U(x)$$

Wie wir aus Skript und (a) wissen, gilt für ein in a zentriertes Gravitationspotential

$$\partial_{x_j}\tilde{U}(x) = -\frac{2}{|x-a|^3}(x_j - a_j) \quad j = 1, 2, 3$$

Für beliebiges $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\partial_{x_j}|x-a|^n &= \partial_{x_j}\sqrt[n]{\sum_{j=1}^3(x_j - a_j)^2} = n\sqrt[n-1]{\sum_{j=1}^3(x_j - a_j)^2} \cdot \frac{x_j - a_j}{\sqrt[n]{\sum_{j=1}^3(x_j - a_j)^2}} \\ &= n(x_j - a_j)|x-a|^{n-2}\end{aligned}$$

womit sich für $j = 1, 2, 3$:

$$\partial_{x_j x_j} \tilde{U}(x) = -\frac{2}{|x-a|^3} + \frac{6(x_j - a_j)^2}{|x-a|^5}$$

und somit

$$\Delta \tilde{U}(x) = \frac{6|x-a|^2}{|x-a|^5} - 3 \cdot \frac{2}{|x-a|^3} = 0$$

ergibt. Wir erhalten durch Einsetzen von P_E und P_M für a sowie Addition:

$$\Delta U(P) = 0$$

Bemerkung: Man könnte annehmen, der gefundene Punkt ist eine Ruhelage, in der man mühelos (sprich: ohne Kraftanstrengung) verharren kann – dies ist jedoch nicht der Fall. Diese Punkte – Lagrange-Punkte genannt – befinden sich an anderen Stellen. Der Grund hierfür (sowie den Umstand, dass es mehrere gibt), liegt darin, dass das betrachtete System kein Inertial-System ist: Erde und Mond rotieren um einen gemeinsamen Schwerpunkt, entsprechend müssen in der Realität Trägheitskräfte berücksichtigt werden.

Aufgabe H 131. Kurvenintegrale

Gegeben seien $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 x_3 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix}$ und $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$.

- (a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$. Hat f ein Potential?
- (b) Bestimmen Sie die Länge $L(C)$ für die durch γ parametrisierte Kurve C .
- (c) Berechnen Sie $\int_C f(x) \bullet dx$ und $\int_C |f(x)| dx$

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Es gilt

$$\operatorname{rot} f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2}(x_2 x_3) - \partial_{x_3}(x_1 x_3) \\ \partial_{x_3}(x_1^2 + x_2^2) - \partial_{x_1}(x_2 x_3) \\ \partial_{x_1}(x_1 x_3) - \partial_{x_2}(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ 0 \\ x_3 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

Da die Rotation nicht für alle x verschwindet, hat f kein Potential.

- (b) Da die letzte Komponente von γ , $t \mapsto t$ injektiv ist und ferner als Ableitung die Funktion $t \mapsto 1$ besitzt, ist die Kurve regulär und doppelpunktfrei parametrisiert. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} L(C) &= \int_C 1 dx = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1} dt = 2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

(c) Wir setzen zunächst ein:

$$f(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} (\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 \\ t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix}$$

Hieraus erhalten wir mit der Stammfunktion $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t)$ von $(\cos(t))^2$ – vgl. Beispiel 3.3.5:

$$\begin{aligned} \int_C f(x) \bullet dx &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin(t) + t(\cos(t))^2 + t \sin(t) dt \\ &= \left[\cos(t) + t \cdot \frac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t)) - t \cos(t) \right]_0^{2\pi} \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t)) - \cos(t) dt \\ &= 2\pi^2 - 2\pi - \left[\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}(\sin(t))^2 - \sin(t) \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi^2 - 2\pi - \pi^2 = \pi^2 - 2\pi \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_C |f(x)| dx &= \int_0^{2\pi} |f(C(t))| \cdot |C'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2(\cos(t))^2 + t^2(\sin(t))^2} \cdot \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+u^2} du &= \left[u\sqrt{1+u^2} \right] - \int \frac{u^2 + (1-1)}{\sqrt{1+u^2}} du \\ &= \left[u\sqrt{1+u^2} \right] - \int \sqrt{1+u^2} du + \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du \\ &\Rightarrow \\ \int \sqrt{1+u^2} du &= \left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh}(u) \right] \end{aligned}$$

und erhalten durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} \int_C |f(x)| dx &= \sqrt{2} \left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh}(t) \right]_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{2}\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arsinh}(2\pi) \end{aligned}$$

wegen $\operatorname{arsinh}(0) = 0$.

Aufgabe H 132. Zirkulation und Ausfluss

Sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y+x \\ \exp\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2\right) \end{pmatrix}$ gegeben. Die Ellipse E habe Halbachsenlängen $a = 1$ und $b = 2$ und liege so in einem kartesischen Koordinatensystem, dass die kleine Halbachse auf der x -Achse und die große Halbachse auf der y -Achse liegt.

- (a) Ist g konservativ?
- (b) Geben Sie eine doppeltpunktfreie Parametrisierung von E an.
- (c) Bestimmen Sie Zirkulation $Z(g, E)$ und Ausfluss $A(g, E)$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist g genau dann konservativ, wenn die Rotation verschwindet (Satz 5.2.4). Es ist hierbei

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\exp \left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} (-y + x) \\ &= 2x \exp \left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 \right) + 1 \end{aligned}$$

folglich ist g nicht konservativ.

- (b) Gemäß der Beschreibung ist die euklidische Normalform der Ellipse (vgl. Bemerkung 7.3.5, HM1) gegeben durch

$$-x^2 - \frac{y^2}{4} + 1$$

Wie sich durch Einsetzen erkennen lässt, ist eine Parametrisierung daher gegeben durch:

$$C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix}$$

Diese ist auch doppeltpunktfrei: Auf den Teilintervallen $[0, \pi]$ und $[\pi, 2\pi]$ ist der Cosinus jeweils injektiv. Soll also $C(t_1) = C(t_2)$ mit $t_1 < t_2$ gelten, muss $t_1 \in [0, \pi)$ und $t_2 \in (\pi, 2\pi)$ gelten. (Man beachte, dass bei Parametrisierungen $\tilde{C}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ geschlossener Kurven Injektivität nur auf dem Intervall $[a, b)$ überprüft werden muss.) Für diese gilt jedoch $\sin(t_1) > 0 > \sin(t_2)$, also $C(t_1) \neq C(t_2)$.

- (c) Wir berechnen

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix}$$

und stellen fest, dass wegen

$$|C'(t)| = \sqrt{(\sin(t))^2 + 4(\cos(t))^2} = \sqrt{1 + 3(\cos(t))^2} \geq 1 > 0$$

die Parametrisierung regulär ist. Wir erhalten mit 5.4.9

$$\begin{aligned}
 Z(g, E) &= \int_0^{2\pi} \langle g(C(t)) | C'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2\sin(t) + \cos(t) \\ e^{(\cos(t))^2 + \frac{1}{4}(2\sin(t))^2} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 2(\sin(t))^2 - \sin(t)\cos(t) + 2e\cos(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 2 - 2(\cos(t))^2 - \sin(t)\cos(t) + 2e\cos(t) dt \\
 &\quad \text{vgl. Beispiel 3.3.5} \\
 &= [2t - (t + \sin(t)\cos(t)) + (\cos(t))^2 + 2e\sin(t)]_0^{2\pi} = 2\pi
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 A(g, E) &= \int_0^{2\pi} \left\langle g(C(t)) \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} C'(t) \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2\sin(t) + \cos(t) \\ e^{(\cos(t))^2 + \frac{1}{4}(2\sin(t))^2} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_0^{2\pi} -4\sin(t)\cos(t) + 2(\cos(t))^2 + e\sin(t) dt \\
 &= [4(\cos(t))^2 + t + \sin(t)\cos(t) - 2e\cos(t)]_0^{2\pi} = 2\pi
 \end{aligned}$$

Aufgabe H 133. Länge von Kurven

Bestimmen Sie die Längen der durch die folgenden Funktionen parametrisierten Kurven:

- (a) $\gamma: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (0, \ln(1+t^2))^\top$.
- (b) $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (\cos(\exp(-t)), \sin(\exp(-t)))^\top$.
- (c) $\gamma: [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto (10t, 4t^2, -3t^2)^\top$.
- (d) $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto (1/2(t + \cos(t)\sin(t)), \frac{1}{2}(\sin(t))^2, 1 - \cos(t))^\top$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir stellen zunächst fest, dass für beliebiges t gilt:

$$\ln(1+t^2) = \ln(1+(-t)^2)$$

Somit ist die Kurve – im Folgenden C genannt – nicht doppelfunktfrei parametrisiert, sondern wird aufgrund der Symmetrie des Intervalls bzgl. $t = 0$ zweimal durchlaufen. Bei der Bestimmung der tatsächlichen Länge können (und müssen) wir uns folglich auf ein Teilintervall ($[-2, 0]$ oder $[0, 2]$) beschränken. Da für alle $t \neq 0$ gilt, dass

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist, ist die Parametrisierung in beiden Fällen dann auch regulär. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} L(C) &= \int_0^2 |\gamma'(t)| \, dt = \int_0^2 \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} \, dt = \int_0^2 \frac{2|t|}{(1+t^2)} \, dt \\ &= \int_0^2 \frac{2t}{(1+t^2)} \, dt = [\ln(1+t^2)]_0^2 = \ln(5) \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -\exp(-t) \begin{pmatrix} -\sin(\exp(-t)) \\ \cos(\exp(-t)) \end{pmatrix} \Rightarrow \\ |\gamma'(t)| &= \exp(-t) \sqrt{(\sin(\exp(-t)))^2 + (\cos(\exp(-t)))^2} = \exp(-t) \end{aligned}$$

Da Sinus und Kosinus nicht an keiner Stelle gleichzeitig den Wert 0 annehmen und die Exponentialfunktion stets positiv ist, ist die Parametrisierung regulär. Ferner gilt für $t \geq 0$

$$\exp(-t) \in (0, 1] \subsetneq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Da Sinus und Cosinus auf dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ injektiv sind und die Exponentialfunktion auf gesamt $\mathbb{R}$, ist auch γ injektiv, insbesondere ist die Kurve also doppeltpunktfrei parametrisiert. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\gamma'(t)| \, dt &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \exp(-t) \, dt = \lim_{r \rightarrow \infty} [-\exp(-t)]_0^r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} -\exp(-r) + 1 = 1 \end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \begin{pmatrix} 10 \\ 8t \\ -6t \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{10^2 + 64t^2 + 36t^2} = 10\sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

Da letzterer Ausdruck stets größer 0 ist, ist die Parametrisierung regulär. Da ferner $t \mapsto 10t$ bijektiv ist, ist die Kurve doppeltpunktfrei parametrisiert. Wie in H 131 berechnet, ist $\int \sqrt{1+u^2} \, du = \left[\frac{1}{2} (u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{arsinh}(u))\right]$, es folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^\infty |\gamma'(t)| \, dt &= 10 \left[\frac{1}{2} (u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{arsinh}(u)) \right]_{-2}^0 \\ &= 10\sqrt{5} + 5 \operatorname{arsinh}(2) \end{aligned}$$

(da $-\operatorname{arsinh}(-2) = \operatorname{arsinh}(2)$ gilt.)

(d) Es ist

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + (\cos(t))^2 - (\sin(t))^2) \\ \sin(t) \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos(t))^2 \\ \sin(t) \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{(\cos(t))^4 + (\sin(t))^2(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} \\ &= \sqrt{(\cos(t))^2((\cos(t))^2 + (\sin(t))^2) + (\sin(t))^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Analog zu (c) folgern wir hieraus, dass die Parametrisierung regulär ist. Ferner ist $t \mapsto (\cos(t))^2$ im Inneren der Intervalle $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ jeweils > 0 , die erste Komponente also streng monoton steigend. Es gilt also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}\cos(t_1)\sin(t_1) &< \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}\cos(t_2)\sin(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], t_1 < t_2 \\ \frac{1}{2}t_3 + \frac{1}{2}\cos(t_3)\sin(t_3) &< \frac{1}{2}t_4 + \frac{1}{2}\cos(t_4)\sin(t_4) \quad \forall t_3, t_4 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], t_3 < t_4 \\ \frac{1}{2}t_5 + \frac{1}{2}\cos(t_5)\sin(t_5) &< \frac{1}{2}t_6 + \frac{1}{2}\cos(t_6)\sin(t_6) \quad \forall t_5, t_6 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], t_5 < t_6\end{aligned}$$

Für beliebige $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in [-\pi, \pi]$, $\tilde{t}_1 < \tilde{t}_2$ folgt hieraus ebenfalls

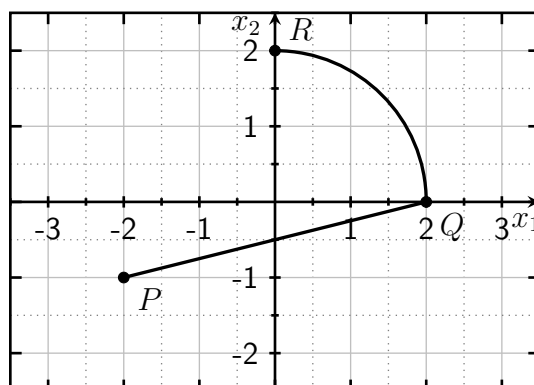
$$\frac{1}{2}\tilde{t}_1 + \frac{1}{2}\cos(\tilde{t}_1)\sin(\tilde{t}_1) < \frac{1}{2}\tilde{t}_2 + \frac{1}{2}\cos(\tilde{t}_2)\sin(\tilde{t}_2),$$

(Falls $\tilde{t}_1$ und $\tilde{t}_2$ in unterschiedlichen Teilintervallen sind, ergibt sich dies durch Vergleich mit den dazwischen liegenden Intervallrändern, die in jeweils zwei Teilintervallen liegen.) Insbesondere ist die Parametrisierung doppelpunktfrei. Somit folgt

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| \, dt = 2\pi$$

Aufgabe H 134. Kurvenintegrale und Potentiale

Es sei K die Kurve, die aus der Strecke von P nach Q und dem Kreisbogen von Q nach R (mit Mittelpunkt im Ursprung) besteht. Weiter sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.



- (a) Geben Sie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung C_1 der Strecke von P nach Q sowie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung C_2 des Kreisbogens von Q nach R an.
- (b) Geben Sie $C_1'(t)$ und $C_2'(t)$ an.
- (c) Bestimmen Sie $\int_K f(s) \, ds$.
- (d) Bestimmen Sie ein Potential U von ∇f mit $U(0) = 42$.
- (e) Bestimmen Sie $\int_K \nabla f(x) \cdot dx$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Wir lesen zunächst die Koordinaten ab:

$$P = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Insbesondere stehen die Ortsvektoren von Q und R senkrecht zueinander, womit der Kreisbogen nur einen Winkel in $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$ haben kann. Wir erhalten somit aus der Skizze und $|Q| = |R| = 2$:

$$C_1: [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2: t \mapsto P + t(Q - P) = \begin{pmatrix} 4t - 2 \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix}$$

Mit $C_1'(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt, dass die Parametrisierung regulär ist und dass die Parametrisierung doppelpunktfrei ist: Wegen $4 > 0$ ist die erste Komponente von C_1 streng monoton steigend und somit injektiv.

Aus $|C_2'(t)| = \sqrt{4(-\sin(t))^2 + 4(\cos(t))^2} = 2$ folgt, dass auch C_2 regulär ist, die Doppelpunktfreiheit folgt daraus, dass die Nullstellenmengen von Sinus und Kosinus keine gemeinsamen Punkte haben: $\sin(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow |\cos(t)| = 1$.

- (b) Wir erhalten:

$$C_1'(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2'(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix}$$

- (c) Bezeichnen wir die durch C_j parametrisierte Teilkurve mit K_j ($j = 1, 2$), so erhalten wir mit 5.4.5

$$\begin{aligned} \int_K f(s) \, ds &= \int_{K_1} f(s) \, ds + \int_{K_2} f(s) \, ds \\ &= \int_0^1 f(C_1(t)) |C_1'(t)| \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(C_2(t)) |C_2'(t)| \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{1}{2} ((4t-2)^2 + (t-1)^2) \cdot \sqrt{4^2 + 1^2} dt \\
&\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (4(\cos(t))^2 + 4(\sin(t))^2) \cdot \sqrt{4(\sin(t))^2 + 4(\cos(t))^2} dt \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2} \int_0^1 17t^2 - 18t + 5 dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 dt = \frac{\sqrt{17}}{2} \left[\frac{17}{3}t^3 - 9t^2 + 5t \right]_0^1 + 2\pi \\
&= \frac{5\sqrt{17}}{6} + 2\pi
\end{aligned}$$

- (d) Da ∇f das Gradientenfeld von f ist, ist f selbst natürlich ein Potential, alle weiteren Potentiale unterscheiden sich von f durch eine additive Konstante. Wir erhalten mit dem Ansatz $U(x) = f(x) + c$ aus der Bedingung $42 = U(0) = f(0) + c = c$ das Potential

$$U(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + 42$$

- (e) Es gibt zwei mögliche Lösungswege:

- 1. Lösungsweg (Ausnutzung des Potentials):

$$\begin{aligned}
\int_K f(x) \cdot dx &= \int_{K_1} f(x) \cdot dx + \int_{K_2} f(x) \cdot dx \\
&= U(C_1(1)) - U(C_1(0)) + U\left(C_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - U(C_2(0)) \\
&\quad \text{es gilt } C_1(1) = C_2(0) \\
&= U\left(C_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - U(C_1(0)) \\
&= U(R) - U(P) = \frac{1}{2}(2^2 + 0^2) - \frac{1}{2}((-2)^2 + (-1)^2) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- 2. Lösungsweg (direkte Rechnung):

Mit $\nabla f(x) = x$ erhalten wir – man beachte, dass die Kurve regulär parametrisiert ist (Sinus und Kosinus werden an keiner Stelle gleichzeitig null):

$$\begin{aligned}
\int_K \nabla f(x) \cdot dx &= \int_{K_1} \nabla f(x) \cdot dx + \int_{K_2} \nabla f(x) \cdot dx \\
&= \int_0^1 \langle C_1(t) | C_1'(t) \rangle dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle C_2(t) | C_2'(t) \rangle dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 4t-2 \\ t-1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt}_{=0} \\
&= \int_0^1 17t - 9 dt = \left[\frac{17}{2}t^2 - 9t \right]_0^1 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe H 135. Kurvenintegrale und Potentiale II

Für jedes Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 x_1^2 x_3 \\ 8x_3^2 \\ 3x_1^3 + b^4 x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f .
 (b) Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt f ein Potential?
 (c) Berechnen Sie ein Potential von f für $(a, b) = (3, 2)$.
 (d) Sei K die durch $C: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \\ 2 \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve. Berechnen

Sie für $(a, b) = (3, 2)$ das Integral $\int_K f(x) \cdot dx$.

Lösungshinweise hierzu:

- (a) Durch Differenzieren erhält man:

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} 2a^2 x_1 x_3 & 0 & a^2 x_1^2 \\ 0 & 0 & 16x_3 \\ 9x_1^2 & b^4 x_3 & b^4 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\operatorname{div} f(x)}_{=\operatorname{Sp} Jf(x)} = 2a^2 x_1 x_3 + b^4 x_2$$

$$\operatorname{rot} f(x) = \begin{pmatrix} (b^4 - 16)x_3 \\ (a^2 - 9)x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Die notwendige und – da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist – auch hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials lautet somit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \operatorname{rot} f(x) = \begin{pmatrix} (b^4 - 16)x_3 \\ (a^2 - 9)x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also $(a, b) \in \{(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)\}$.

- (c) Wegen $\operatorname{grad}(U) = f$ gilt zunächst

$$U(x) = \int 9x_1^2 x_3 \, dx_1 = 3x_1^3 x_3 + c_1(x_2, x_3).$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x_2} U(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} c_1(x_2, x_3) \stackrel{!}{=} 8x_3^2$$

folgt $c_1(x_2, x_3) = 8x_2 x_3^2 + c_2(x_3)$ und schließlich

$$\frac{\partial}{\partial x_3} U(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^3 + 16x_2 x_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} c_2(x_3) \stackrel{!}{=} 3x_1^3 + 16x_2 x_3.$$

Also ist $c_2(x_3)$ konstant. Ein Potential ist somit $U(x) = 3x_1^3 x_3 + 8x_2 x_3^2$.

(d) Es gibt auch hier zwei mögliche Lösungswege:

- 1. Lösungsweg (Ausnutzung des Potentials):

$$\begin{aligned}\int_K f(x) \bullet dx &= U(C(2)) - U(C(1)) = U\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) - U\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= 6 - (-6) = 12\end{aligned}$$

- 2. Lösungsweg (direkte Rechnung):

$$\begin{aligned}\int_K f(x) \bullet dx &= \int_1^2 f(C(t)) \cdot C'(t) dt \\ &= \int_1^2 \begin{pmatrix} 18(\cos(\pi t))^2 \\ 32 \\ 3(\cos(\pi t))^3 + 32 \sin(\pi t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\pi \sin(\pi t) \\ \pi \cos(\pi t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_1^2 -18\pi(\cos(\pi t))^2 \sin(\pi t) + 32\pi \cos(\pi t) dt \\ &= -18\pi \int_1^2 (\cos(\pi t))^2 \sin(\pi t) dt + \underbrace{[32 \sin(\pi t)]_1^2}_{=0} \\ &\quad u := \cos(\pi t) \rightarrow u'(t) = -\pi \sin(\pi t) \\ &= 18 \int_{u(1)}^{u(2)} u^2 du = [6u^3]_{-1}^1 = 12\end{aligned}$$

Frishhaltebox

Aufgabe H 136. Taylorpolynome

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{2 + \cos(x)}$.

Bestimmen Sie $T_2(f, x, 0)$ und $R_2(f, x, 0)$.

Lösungshinweise hierzu:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f(x) &= \frac{\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2} \\ \frac{d^2}{dx^2} f(x) &= \frac{\cos(x)(2 + \cos(x))^2 - 2 \sin(x)(2 + \cos(x))(-\sin(x))}{(2 + \cos(x))^4} \\ &= \frac{\cos(x)(2 + \cos(x)) + 2(\sin(x))^2}{(2 + \cos(x))^3} \\ &= \frac{\cos(x)}{(2 + \cos(x))^2} + \frac{2(\sin(x))^2}{(2 + \cos(x))^3}\end{aligned}$$

und erhalten:

$$T_2(f, x, 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}x^2$$

Weiteres Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dx^3} f(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos(x)}{(2 + \cos(x))^2} + \frac{2(\sin(x))^2}{(2 + \cos(x))^3} \right) \\ &= \frac{-\sin(x)(2 + \cos(x))^2 + 2\cos(x)\sin(x)(2 + \cos(x))}{(2 + \cos(x))^4} \\ &\quad + \frac{4\cos(x)\sin(x)(2 + \cos(x))^3 + 6(\sin(x))^3(2 + \cos(x))^2}{(2 + \cos(x))^6} \\ &= -\frac{\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2} + \frac{6\cos(x)\sin(x)}{(2 + \cos(x))^3} + \frac{6(\sin(x))^3}{(2 + \cos(x))^4}, \end{aligned}$$

woraus wir

$$R_2(f, x, 0) = \left(-\frac{\sin(\vartheta_{x,0}x)}{6(2 + \cos(\vartheta_{x,0}x))^2} + \frac{\cos(\vartheta_{x,0}x)\sin(\vartheta_{x,0}x)}{(2 + \cos(\vartheta_{x,0}x))^3} + \frac{(\sin(\vartheta_{x,0}x))^3}{(2 + \cos(\vartheta_{x,0}x))^4} \right) x^3$$

für ein $\vartheta_{x,0} \in (0, 1)$ erhalten.