4.4 Lineare Approximation und die Taylor-Formel

Die Taylor-Formel 2.6.1 haben wir in der eindimensionalen Analysis benutzt, um Funktionen durch Polynome zu approximieren. Wir wollen dies auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher tun. Zur Beschreibung der Approximationsqualität benutzen wir den folgenden Begriff:

4.4.1 Definition. Es sei $D \subseteqq \mathbb{R}^n$ und $a \in D^\circ$. Außerdem sei $k \in \mathbb{N}$. Für Funktionen f und g von D nach $\mathbb{R}^\ell$ schreibt man

$$f(x) - g(x) \in o\left(|x-a|^k\right), \quad \text{wenn gilt:}$$

$$(*) \qquad \lim_{x \to a} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x-a|^k} = 0.$$

Ist $(*)$ mit $k = 1$ erfüllt, so sagt man, die Funktion *g approximiert f linear* (an der Stelle a). Im Fall $k = 2$ spricht man von *quadratischer Approximation*.

Je höher k in $(*)$ gewählt werden kann, desto besser ist die Approximation. Für Details sei auch hier auf die Numerik verwiesen.

Klarstellung. Das Landau-Symbol „klein o" beschreibt nicht eine einzelne Funktion, sondern eine *Menge von Funktionen*.

Für eine Stelle $a \in D \subseteqq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $d\colon D \to \mathbb{R}$ definieren wir $o\big(d(x)\big)_a$ als *die Menge* aller Funktionen $h\colon D \to \mathbb{R}^\ell$, für die gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{|h(x)|}{|d(x)|} = 0.$$

Oft verwendete Beispiele für d sind die durch $d(x) := |x-a|^k$ definierten Funktionen.

In unseren Beispielen ist $h(x) := f(x) - g(x)$ und $d(x) := |x-a|^k$, es ist also „$f(x) = g(x) + o(|x-a|^k)$" eine alteingebürgerte Schreibweise für

$f(x) - g(x) \in o\big(|x-a|^k\big)_a$ — wenn a klar ist, kurz $f(x) - g(x) \in o\big(|x-a|^k\big)$.

Statt $f(x) - g(x) \in o\big(|x-a|^k\big)$ schreibt man auch $f(x) \in g(x) + o\big(|x-a|^k\big)$.

Das eben eingeführte Symbol „klein o" ist eines der *Landau-Symbole*; man sollte es nicht mit „groß O" verwechseln: Wir schreiben

$$f(x) - g(x) \in O\left(|x-a|^k\right),$$

wenn es eine reelle Konstante c so gibt, dass in einer geeignet gewählten Umgebung von a gilt: $|f(x) - g(x)| \leqq c\,|x-a|^k$.