

1. Klausur der Diplomvorprüfung

für aer, autip, bau, fmt, immo, mach, tema, tpbau, tpmach, umw, verf, wewi

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den Aufgaben **1-3** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den Aufgaben **4-5** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden deshalb auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen können Sie ohne weitere Begründung verwenden. Alle weiteren Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\ln x $	b^x	$\sin x$	$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a \cdot x^{a-1}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\ln b \cdot b^x$	$\cos x$	$(\sin x)^2$
$f(x)$	$\tan x$	$\arctan x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\cos x$	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$-\sin x$	$(\cos x)^2$

$a \in \mathbb{R},$
 $b \in \mathbb{R}^+$

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab Vorlesungsbeginn vor dem Büro von Prof. Stoppel (Raum V57.7.323) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 26. 10. 2006 bei Frau Stein (Raum V57.8.130, nur vormittags) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (23 Punkte) Gegeben sind die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

und die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad v_4 := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A .

Geben Sie für \mathbb{R}^3 eine Basis $B: b_1, b_2, b_3$ aus Eigenvektoren von A an.

(b) Bestimmen Sie für $i \in \{1, 2, 3\}$ Koeffizienten μ_i so, dass gilt: $v_4 = \sum_{i=1}^3 \mu_i v_i$.

Aufgabe 2 (19 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale.

$$(a) \int_0^{\pi/2} \cos(x) \sqrt{\sin(x)} \, dx \quad (b) \int_0^{1/3} (2x+3)e^{3x} \, dx \quad (c) \int \frac{x+2}{x^2-1} \, dx \quad (d) \int (\sinh(x))^2 \, dx$$

Aufgabe 3 (18 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto (x^2 - 1) \left(1 - \frac{1}{4}x^2 - y^2 \right).$$

(a) Skizzieren Sie die Teilmengen, auf denen $f(x, y) = 0$, $f(x, y) < 0$ bzw. $f(x, y) > 0$ gilt.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f sowie deren Typ.

Name: Matrikelnr.: Fach:

Aufgabe 4 (12 Punkte) Im affinen Raum \mathbb{R}^2 sind die Punkte $P = (2, 4)$ und $Q = (3, 3)$ sowie die Vektoren $f_1 = (-1, 2)$, $f_2 = (3, -4)$, $g_1 = (1, -2)$ und $g_2 = (-3, 7)$ gegeben.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$, die Koordinaten bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2)$ in Koordinaten bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G} = (Q; g_1, g_2)$ umwandelt. Geben Sie den linearen Teil und den Translationsanteil von ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : v \mapsto \boxed{} v + \boxed{}$$

Aufgabe 5 (22 Punkte) Gegeben ist das folgende Vektorfeld:

$$f_{\alpha} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(z) \\ \alpha y z \\ x \cos(z) + y^2 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat dieses Vektorfeld ein Potential? $\alpha = \boxed{}$

Bestimmen Sie in diesem Fall ein Potential:

Gegeben ist die Kurve K mit der Parametrisierung $C(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \varphi)^T$ mit $0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$.

Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang K für $\alpha = 0$: $\int_K f_0(x) dx = \boxed{}$

Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang K für $\alpha = 2$: $\int_K f_2(x) dx = \boxed{}$