1. Klausur der Diplomvorprüfung - Musterlösung

für **fmt, mach, tema, tpmach, verf**

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{x+1}$$

die allgemeine Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x+1)^{n+1}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(c) Welchen Konvergenzradius hat diese Reihe?

(a) Die Ableitung von f lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(-1)^{1+1} 1!}{(x+1)^{1+1}}$$

also ist die Induktionsvoraussetzung für $n = 1$ erfüllt.

Im Induktionsschritt gilt nun

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x+1)^{n+1}}$$

und die Aussage ist für $n+1$ zu zeigen.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1} n!(-(n+1))}{(x+1)^{(n+1)+1}} = \frac{(-1)^{(n+1)+1} (n+1)!}{(x+1)^{(n+1)+1}}$$

Somit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

(b) Aus der allgemeinen Taylor-Reihe folgt

$$T(f, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{n!(0+1)^{n+1}} (x-0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n\,.$$

(c) Mit

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{1} = 1$$

gilt für den Konvergenzradius der Potenzreihe $\varrho = \dfrac{1}{1} = 1$.

Aufgabe 2 (*6* Punkte) Berechnen Sie die folgenden bestimmten bzw. unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x$

(a) Durch Partialbruchzerlegung erhalten wir:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Damit ergibt sich für das Integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^2$$
$$= \frac{3}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(5) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

(b) Durch die Substitution $u = 1 + x^2$ und daher $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 2x$ erhalten wir:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\,u = \left[2\sqrt{u}\right] = \left[2\sqrt{1+x^2}\right]$$

Natürlich kann hier auch die Regel für Integranden der Form $\frac{f'(x)}{f(x)}$ angewandt werden, mit dem selben Ergebnis.

Name: | **Matrikelnr:** | **Fach:**

Aufgabe 3 (8 Punkte) Im affinen Raum $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte

$$P = (2,2) \qquad \text{und} \qquad Q = (-2,-1)$$

sowie die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$, welche Koordinaten bezüglich $\mathbb{F} = (P; f_1, f_2)$ in solche bezüglich $\mathbb{G} = (Q; g_1, g_2)$ umwandelt.

$${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Umkehrung dieser Transformation.

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an.

$$\mathrm{J}\left({}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

bitte wenden

Aufgabe 4 (5 Punkte) Geben Sie die Grenzwerte für die folgenden Reihen, Funktionen und Integrale an:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{7^k} = \boxed{\frac{3}{4}}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{2x^3} = \boxed{\frac{1}{12}}$

(c) $\int_0^{\infty} \sin(x) e^{-x} \,\mathrm{d}\, x = \boxed{\frac{1}{2}}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(3)^k}{k!} = \boxed{\frac{1}{3}}$