2. Klausur der Diplomvorprüfung - Musterlösung

für **aer, autip, bau, fmt, immo, mach, tema, tpbau, tpmach, umw, verf, wewi**

Aufgabe 1 (*11* Punkte) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6z^2 - 12z = 0\right\}$$

und die Gestalt von Q (affine Klassifikation).

Die Quadrik lässt sich mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad c = 0$$

als $x^\intercal A\,x + 2a^\intercal x + c = 0$ darstellen. Aus

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(6-\lambda) - (6-\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda)$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 6$. Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich aus $(A - \lambda E)\,v = 0$, also

$$\lambda_1 = 2: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \implies v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 4: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \implies v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = 6: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit lauten die Transformationsmatrix T, die Diagonalmatrix D und der transformierte Vektor $\tilde{a}$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad D = T^\intercal A T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{a} = T^\intercal a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Die Quadrikdarstellung reduziert sich somit auf

$$2\,\tilde{x}^2 + 4\,\tilde{y}^2 + 6\,\tilde{z}^2 - 12\,\tilde{z} = 2\,\tilde{x}^2 + 4\,\tilde{y}^2 + 6\,(\tilde{z} - 1)^2 - 6 = 2\,\tilde{\tilde{x}}^2 + 4\,\tilde{\tilde{y}}^2 + 6\,\tilde{\tilde{z}}^2 - 6 = 0$$

und die euklidische Normalform lautet demnach $-\frac{1}{3}\,\tilde{\tilde{x}}^2 - \frac{2}{3}\,\tilde{\tilde{y}}^2 - \tilde{\tilde{z}}^2 + 1 = 0$.

Es handelt sich also um ein Ellipsoid.

Aufgabe 2 (*10* Punkte) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto xy$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

ein globales Extremum besitzt. Entscheiden Sie auch, ob es sich bei den Extrema jeweils um Maxima oder Minima handelt.

Musterlösung nach der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Wir schreiben $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Die Nebenbedingung hat dann die Gleichung $g(x, y, z) = 0$. Die notwendigen Bedingungen für eine kritische Stelle sind dann:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f) + \lambda \operatorname{grad}(g) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

Dies führt zu den Gleichungen

$$y + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$
$$x + 2\lambda y = 0 \tag{2}$$
$$2\lambda z = 0 \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \tag{4}$$

Zur Lösung betrachten wir zunächst den Fall $\lambda = 0$. Aus (1) und (2) folgt dann sofort $x = y = 0$. Damit folgt aus (4), dass $z = \pm 2$.

Wegen $f(0, 0, \pm 2) = 0$ sehen wir, dass diese Punkte keine globalen Extrema sein können, denn auf der durch g beschriebenen Kugel nimmt f sowohl positive als auch negative Werte an.

Also können wir $\lambda \neq 0$ annehmen. Dann ist mit (3) sofort $z = 0$. Wir lösen (1) nach y auf und setzen in (2) ein:

$$x(1 - 4\lambda^2) = 0 \tag{5}$$

Wegen $\lambda \neq 0$ folgt aus $x = 0$ mit (1) sofort auch $y = 0$, was zusammen mit $z = 0$ einen Punkt ergibt, der nicht der Nebenbedingung genügt. Also folgt aus (5), dass $\lambda = \pm \frac{1}{2}$. Damit folgt aus (1), dass $x = \pm y$. Eingesetzt in (4) ergibt dies insgesamt $x = \pm\sqrt{2},\ y = \pm\sqrt{2}$.

Die Kandidaten für kritische Punkte sind also $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ und $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$. Einsetzen in die Funktion ergibt zweimal den Funktionswert 2 und zweimal den Funktionswert -2. Damit sind alle verbliebenen Kandidaten globale Extremalstellen und es gilt:

$$\text{Maxima: } (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0),\ (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) \qquad \text{Minima: } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Aufgabe 3 (8 Punkte) Begründen Sie, ob die folgenden Reihen und Integrale konvergieren oder divergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2/3}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ **(c)** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}\,x$

(a) Die Konvergenz dieser Reihe läßt sich mit dem Leibnizkriterium zeigen.

Die Reihe ist alternierend, also reicht es zu zeigen, dass die Folge (a_k) mit $a_k := \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{2}{3}}$ eine monotone Nullfolge ist. Da $k^{\frac{2}{3}} \to \infty$ für $k \to \infty$ geht der Kehrwert gegen 0.

Für die Monotonie gilt:

$$k < k+1 \implies k^{\frac{1}{3}} < (k+1)^{\frac{1}{3}} \implies k^{\frac{2}{3}} < (k+1)^{\frac{2}{3}} \implies \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} > \frac{1}{(k+1)^{\frac{2}{3}}}$$

Diese Folgerungen gelten, weil die Wurzelfunktion und die Potenzfunktion auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton steigend und die Kehrwertbildung streng monoton fallend ist.

(b) Konvergenz mit Wurzelkriterium. Wir betrachten

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{e} = \frac{1}{e}.$$

Da dieser Grenzwert echt kleiner als 1 ist, folgt die Konvergenz der Reihe mit dem Wurzelkriterium.

Der gleiche Schluss funktioniert auch mit dem Quotientenkriterium.

(c) Da der Integrand bei $x = 2$ eine Definitionslücke hat, konvergiert das Integral genau dann, wenn alle der folgenden Integrale konvergieren:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}\,x, \qquad \int_2^a \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}\,x, \qquad \int_a^{\infty} \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}\,x \qquad \text{wobei } a > 2$$

Wir berechnen zunächst eine Stammfunktion von $\frac{1}{x^2-4}$. Dazu erhalten wir durch Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+2}$$

Damit ist die Stammfunktion

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4}\Big[\ln|x-2| - \ln|x+2|\Big]$$

Da nun $\lim\limits_{t\to 2} \frac{1}{4}(\ln|x-2| - \ln|x+2|)$ nicht existiert (weil unendlich), konvergiert das erste und das zweite der obigen Integrale nicht und damit ist das Integral insgesamt nicht konvergent.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1}{(x_1-2)^2 + x_2^2}.$$

Weiter sei K_1 die obere Hälfte eines Kreises um $(2,0)$ mit Radius 2. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{K_1} f(s)\,\mathrm{d}\,s.$$

(b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \ln(x_2) \\ x_1^2\, x_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Weiter sei K_2 der Graph der Funktion $h\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon t \mapsto e^t$, der von $(-1, \frac{1}{e})$ bis $(1, e)$ durchlaufen wird. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{K_2} g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

(a) Die Kurve K_1 läßt sich durch $(2+2\cos(t), 2\sin(t))$ mit $0 \leqq t \leqq \pi$ parametrisieren. Bei Wegintegralen über reellwertige Funktionen ist der Durchlaufsinn egal. Der Betrag des Gradienten ist $\sqrt{4(-\sin(t))^2 + 4\cos^2(t)} = 2$. Damit gilt für das Wegintegral:

$$\int_{K_1} f(s)\,\mathrm{d}\,s = \int_{K_1} \frac{x_1}{(x_1-2)^2 + x_2^2}\,\mathrm{d}\,s = \int_0^\pi \frac{2+2\cos(t)}{4\cos^2(t) + 4\sin^2(t)} |2|\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \int_0^\pi 1 + \cos(t)\,\mathrm{d}\,t = [t + \sin(t)]_0^\pi = \pi$$

(b) Hier kann man ausnutzen, dass die Funktion g ein Potential besitzt, nämlich $U(x_1, x_2) = x_1^2 \ln(x_2)$, weil $\operatorname{grad}(U) = g$. Damit ergibt sich der Wert des Integrals als

$$\int_{K_2} \begin{pmatrix} 2x_1 \ln(x_2) \\ x_1^2 x_2^{-1} \end{pmatrix} \mathrm{d}\,s = U(1,e) - U(-1, \frac{1}{e}) = 2.$$

Eine alternative Lösung über das Kurvenintegral benutzt z.B. die Parametrisierung (t, e^t) mit $-1 \leqq t \leqq 1$ für die Kurve K_2. Dann ergibt sich für das Kurvenintegral

$$\int_{K_2} g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{K_2} \begin{pmatrix} 2x_1 \ln(x_2) \\ x_1^2 x_2^{-1} \end{pmatrix} \mathrm{d}\,s = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 2t^2 \\ \frac{t^2}{e^t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} 3t^2\,\mathrm{d}\,t = \left[t^3\right]_{-1}^{1} = 2.$$

Name: | **Matrikelnr:** | **Fach:**

Aufgabe 5 (6 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k+1}}{2k+1},$$

wobei ρ den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k+1}}{2k+1}$ bezeichnet.

Geben Sie den Wert von ρ an: $\rho = \boxed{\frac{1}{2}}$.

Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für die Ableitung f' an:

$$f'(x) = \boxed{\frac{2}{1+4x^2}}.$$

Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für f an:

$$f(x) = \boxed{\arctan(2x)}.$$

bitte wenden

Aufgabe 6 (*6* Punkte) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(xy)$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{y\cos(xy)} \\ \boxed{x\cos(xy)} \end{pmatrix},$$

die Hessematrix

$$\mathrm{H}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} \boxed{-y^2\sin(xy)} & \boxed{\cos(xy) - xy\sin(xy)} \\ \boxed{\cos(xy) - xy\sin(xy)} & \boxed{-x^2\sin(xy)} \end{pmatrix},$$

und geben Sie das Taylorpolynom der zweiten Stufe für den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$ an:

$$T_2\big(f, (x, y), (1, \pi/2)\big) = \boxed{1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi}{2}(x-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$