1. Klausur der Diplomvorprüfung - Musterlösung

für **aer, bau, immo, tpbau**

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3 + 4x_1 - 3\sqrt{2}x_2 + 3\sqrt{2}x_3 + 3 = 0\}.$$

Transformieren Sie die Quadrik auf euklidische Normalform und bestimmen Sie deren Gestalt. Geben Sie die Koordinatentransformation an, die die Quadrik in euklidische Normalform überführt.

Die Gleichung der Quadrik lautet $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = 3.$$

Die Matrix hat das charakteristische Polynom $(-2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 21)$ und damit die Eigenwerte $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 3$. Zur Bestimmung der Eigenvektoren ergeben sich die folgenden drei Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die Eigenvektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix lautet also $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$a^* = T^\mathsf{T} a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die transformierte Gleichung $-2y_1^2+7y_2^2+3y_3^2+4y_1+6y_3+3=0$. Quadratisches Ergänzen liefert $-2(y_1-1)^2+2+7y_2^2+3(y_3+1)^2-3+3=0$. Die euklidische Normalform lautet demnach

$$-z_1^2+\frac{7}{2}z_2^2+\frac{3}{2}z_3^2+1=0.$$

Die Quadrik beschreibt ein zweischaliges Hyperboloid.

Die Transformation in das verlangte Koordinatensystem lautet

$$_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}v-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\left(v-\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right).$$

Die Umkehrtransformation ist gegeben durch

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\left(v+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_0^5 \frac{2x^4+3x^3+9x^2+5x+7}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x$

(a)

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}\,x &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin(x)\right] - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin(x)\right] - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\cos(x)\right] + \frac{1}{4}\int e^{2x}(-\sin(x))\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $\displaystyle\frac{5}{4}\int e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin(x)\right] - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\cos(x)\right]$ und daraus

$$\int e^{2x}\sin(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{5}\left(\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin(x)\right] - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\cos(x)\right]\right) = \left[-\frac{1}{5}e^{2x}\cos(x) + \frac{2}{5}e^{2x}\sin(x)\right].$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{2x^4+3x^3+9x^2+5x+7}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x &= \int_0^5 2x^2+3x+7+\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+7x+\ln(x^2+1)\right]_0^5 \\ &= \frac{935}{6}+\ln(26)\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe einer vollständigen Induktion.

IA Induktionsanfang $n = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} &= \frac{1}{2^1} &= \frac{1}{2} \\ \frac{2^{1+1} - 1 - 2}{2^1} &= \frac{4 - 1 - 2}{2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

IS Induktionsschritt $n \to (n+1)$:

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \frac{n+1}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \overset{\text{IV}}{=} \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n} \\ &= \frac{n + 1 + 2\left(2^{n+1} - n - 2\right)}{2^{n+1}} = \frac{n + 1 + 2^{(n+1)+1} - 2n - 4}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2^{(n+1)+1} - n - 3}{2^{n+1}} = \frac{2^{(n+1)+1} - (n+1) - 2}{2^{n+1}} \,. \end{aligned}$$

Damit ist die Induktion bewiesen.

Aufgabe 4 (*8 Punkte*)

Tragen Sie für die folgenden Reihen, Funktionen und Integrale entweder den Grenzwert – falls Konvergenz vorliegt – oder „divergent“ in das entsprechende Kästchen ein.

$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x\sin(x)}$	$\int_{e^2}^{\infty}\frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$
$\frac{16}{16+\pi^2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*)

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto(2y+1)\,e^{5x^2+2y}$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\begin{pmatrix}\boxed{10x\,(2y+1)\,e^{5x^2+2y}}\\ \boxed{4\,(y+1)\,e^{5x^2+2y}}\end{pmatrix}$$

und die Hessematrix

$$\mathrm{H}\,f(x,y)=\begin{pmatrix}\boxed{10\,(1+10x^2)\,(2y+1)\,e^{5x^2+2y}} & \boxed{40x\,(y+1)\,e^{5x^2+2y}}\\ \boxed{40x\,(y+1)\,e^{5x^2+2y}} & \boxed{4\,(2y+3)\,e^{5x^2+2y}}\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big)$ der zweiten Stufe für den Entwicklungspunkt $(x_0,y_0)=(0,0)$.

$$T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big)=\boxed{1+4y+5x^2+6y^2}.$$