Aufgabe 1 (*7 Punkte*) Gegeben sind

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die Inverse von A_4.

(b) Bestimmen Sie, für welche α das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

(a) $(A_4)^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Durch Zeilenoperationen kann das Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ auf obere Dreiecksform gebracht werden:

$$\left(\begin{array}{ccc||c} -4 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & 4 \end{array}\right)$$

Aus der letzen Zeile lässt sich ablesen, dass für $\alpha = 3$ ein Widerspruch auftritt, also keine Lösung existiert. Für alle anderen α gibt es genau eine Lösung.

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen.

(a) $(\sin x)^n > (\sin x)^{n+1}$ für alle $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) $\displaystyle \frac{1}{3} \leqq \int_4^7 \frac{x-3}{x+5}\,\mathrm{d}\,x \leqq 1$.

(c) $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$ für alle $x \in [1,2]$.

(a) Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt $0 < \sin x < 1$ und somit $(\sin x)^n > (\sin x)^{n+1}$.

(b) Betrachten wir die Funktion $f\colon [4,7] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x-3}{x+5}$. Aus $f'(x) = \frac{8}{(x+5)^2} > 0$ folgt, dass f monoton steigend ist. Also gilt für $4 \leqq x \leqq 7$ die Ungleichung $f(4) \leqq f(x) \leqq f(7)$ und damit

$$\frac{1}{9} \leqq \frac{x-3}{x+5} \leqq \frac{1}{3}.$$

Mit der Monotonie des Integrals folgen dann die gewünschten Ungleichungen.

(c) Betrachten wir die Funktion

$$\varphi\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

Es gilt $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$, also ist $\varphi'(x) > 0$ für alle $x > 0$. Daraus folgt, dass φ eine monoton steigende Funktion ist und für $x > 0$ folgt $\varphi(x) > 0$. Das beweist die behauptete Ungleichung.

Eine weitere mögliche Lösung: Es gilt

$$\ln(1+x) \geqq \ln 2 \quad \text{für alle} \quad x \in [1,2],$$

wegen der Monotonie des Logarithmus. Andererseits ist $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ ebenfalls monoton steigend und es gilt

$$\frac{x}{1+x} \leqq \frac{2}{3} \quad \text{für alle} \quad x \in [1,2].$$

Bleibt also noch zu zeigen, dass $\ln 2 > \frac{2}{3}$. Dies ist äquivalent zu $8 > e^2$, was offenbar immer erfüllt ist.

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

(a) Das Vektorfeld

$$h\colon \mathbb{R}\times(-1,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 3x^2\ln(y+1)\\ \dfrac{x^3}{y+1}+z^2\\ 2yz+\sin(z)\end{pmatrix}$$

besitzt ein Potential. Berechnen Sie dieses.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C h(x)\,\mathrm{d}\,x$$

für die Kurve

$$C\colon [0,1]\to\mathbb{R}^3\colon t\mapsto\begin{pmatrix} t\\ t^2\\ 1\end{pmatrix}.$$

(a) Das Vektorfeld h ist der Gradient seines Potentials U. Also müssen die partiellen Ableitungen von U mit den Komponenten von h übereinstimmen.

$$U_x(x,y,z)\overset{!}{=}3x^2\ln(y+1) \qquad\Rightarrow\quad U(x,y,z)=x^3\ln(y+1)+c_1(y,z)$$

$$U_y(x,y,z)=\frac{x^3}{y+1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}c_1(y,z)\overset{!}{=}\frac{x^3}{y+1}+z^2 \quad\Rightarrow\quad U(x,y,z)=x^3\ln(y+1)+yz^2+c_2(z)$$

$$U_z(x,y,z)=2yz+c_2'(z)\overset{!}{=}2yz+\sin(z) \qquad\Rightarrow\quad U(x,y,z)=x^3\ln(y+1)+yz^2-\cos z+c_3$$

(b) Da das Vektorfeld h einen einfach zusammenhängenden Definitionsbereich besitzt, kann das Kurvenintegral mit Hilfe des Potentials berechnet werden.

$$\int_C h(x)\,\mathrm{d}\,x=U(C(1))-U(C(0))=U(1,1,1)-U(0,0,1)=1+\ln(2)$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie zu $w = -3 + 3i$ die Polarkoordinatendarstellung $w = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ mit $0 \leqq r$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$.

$r =$	$3\sqrt{2}$	$\varphi =$	$\frac{3}{4}\pi$

(b) Geben Sie alle Lösungen von $z^4 = 16\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$ in der Form $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 =$	$\sqrt{3} + i$	$z_2 =$	$-1 + \sqrt{3}i$
$z_3 =$	$-\sqrt{3} - i$	$z_4 =$	$1 - \sqrt{3}i$