**Aufgabe 1** (*12 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 25x_1^2 + 14x_2^2 + 96x_2x_3 - 14x_3^2 + 50x_1 + 160x_2 + 120x_3 + 175 = 0\}\ .$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an. Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik und geben Sie auch die zugehörige Koordinatentransformation an. Bestimmen Sie weiter anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

---

Die Gleichung der Quadrik lautet $x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 48 \\ 0 & 48 & -14 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 25 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}, \qquad c = 175.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix $A$ lautet $(25-\lambda)(\lambda^2 - 2500)$ und die Eigenwerte sind damit $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 50$ und $\lambda_3 = -50$. Zur Bestimmung der Eigenvektoren ergeben sich die drei Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 48 \\ 0 & 48 & -39 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -25 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 48 \\ 0 & 48 & -64 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 75 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 48 \\ 0 & 48 & 36 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die orthogonale Transformationsmatrix lautet also

$$T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

und diese transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$\tilde{a} = T^\mathsf{T} a = \begin{pmatrix} 25 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die transformierte Gleichung

$$25y_1^2 + 50y_2^2 - 50y_3^2 + 50y_1 + 200y_2 + 175 = 0\,.$$

Quadratische Ergänzung liefert

$$25(y_1+1)^2 - 25 + 50(y_2+2)^2 - 200 - 50y_3^2 + 175 = 0\,.$$

Die euklidische Normalform lautet demnach

$$-\frac{1}{2}z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + 1 = 0$$

und die Gestalt ist ein einschaliges Hyperboloid.

Für die Koordinatentransformation erhält man

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}\right),
\end{aligned}$$

und für die zugehörige Umkehrtransformation

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2** (*7 Punkte*) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

**(a)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{3x - \sin x}$

**(b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$

**(c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ für die Funktionen

$$f\colon \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} (\sin x)^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geqq 0 \end{cases}$$

$$\text{und} \quad g\colon \quad \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon \quad x \mapsto \ln(\cos x).$$

---

**(a)** Wir betrachten die Funktionen $f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x$ und $g\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 3x - \sin x$.

- $f$ und $g$ sind differenzierbar für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $f'(x) = 1$, $g'(x) = 3 - \cos x$.
- $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3 - \cos x} = \dfrac{1}{2}$, also ist mit l'Hospital $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{3x - \sin x} = \dfrac{1}{2}$.

**(b)** Wir betrachten $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x^x - x$ und $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln x - x + 1$.

- $f$ und $g$ sind zweimal differenzierbar für alle $x > 0$ und es gilt

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) - 1\,, \qquad g'(x) = \frac{1}{x} - 1\,,$$

$$f''(x) = x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}\,, \qquad g''(x) = -\frac{1}{x^2}\,.$$

- $g''(x) \neq 0$ für alle $x > 0$.
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} g'(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2$, also ist mit l'Hospital $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = -2$.

**(c)**
- $f$ und $g$ sind zweimal differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} \sin(2x), & x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases},$$

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\searrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \text{ also } f'(0) = 0.$$

Weiter rechnen wir

$$f''(x) = \begin{cases} 2\cos(2x), & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}, \qquad f''(0) = 2,$$

$$g'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x, \qquad g''(x) = -(1 + \tan^2 x)2.$$

- $g''(x) \neq 0$ für alle $x$.
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$.
- Mit l'Hospital berechnen wir

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x^2}{\ln(\cos x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{2x}{-\tan x} = -2$$

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos x)} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{2\sin x \cos x}{-\tan x} = -2,$$

also gilt $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -2$.

**Aufgabe 3** (*8 Punkte*) Geben Sie jeweils den Entwicklungspunkt und den Radius des Konvergenzkreises der folgenden komplexen Potenzreihen an.

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}(z-i)^n$

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} (z-2i+1)^n$

**(c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}(z^2+2z+1)\right)^n$

---

**(a)** Wir berechnen den Konvergenzradius $\rho$ mit Hilfe des Quotientenkriteriums:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}\frac{n^2+1}{2^n} \\ &=2 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = 2\end{aligned}$$

Es kann also abgelesen werden:
Radius: $\frac{1}{2}$ Entwicklungspunkt: $i$

**(b)** Wir berechnen den Konvergenzradius $\rho$ mit Hilfe des Wurzelkriteriums:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &=e\end{aligned}$$

Es kann also abgelesen werden:
Radius: $\frac{1}{e}$ Entwicklungspunkt: $2i-1$

**(c)** Wir substituieren $(z+1)^2 = u$ und erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}(z^2+2z+1)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}u\right)^n$$

Der Konvergenzradius $\rho$ für $u$ berechnet sich als

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{9^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{9}$$

und wir erhalten $9 \geqq |u| = |(z+1)^2|$, also $|z+1| \leqq 3$. Es kann also abgelesen werden:
Radius: 3 Entwicklungspunkt: $-1$

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

**Aufgabe 4** (*11 Punkte*) Mit Hilfe der Methode von Lagrange sollen die Minima und Maxima der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon (x, y)^\intercal \mapsto e^{x^3+y^3+3x^2y+3xy^2+x+y}$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + 2y^2 = 12$$

bestimmt werden.

**(a)** Geben Sie das System von Gleichungen an, das die Multiplikatormethode liefert.

$$\begin{pmatrix} (3x^2+6xy+3y^2+1)e^{x^3+y^3+3x^2y+3xy^2+x+y} + 2\lambda x \\ (3y^2+3x^2+6xy+1)e^{x^3+y^3+3x^2y+3xy^2+x+y} + 4\lambda y \\ x^2+2y^2-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**(b)** Welche Gestalt hat die Lösungsmenge der Gleichung $\operatorname{grad} f = (0,0)^\intercal$?

☐ ein Punkt ☐ eine Gerade ☐ Hyperbel ☐ Kreis ☒ leere Menge
☐ Rechteck ☐ Parabel ☐ Fünfeck ☐ zwei Geraden ☐ Halbebene

**(c)** Bestimmen Sie alle kritischen Punkte unter der Nebenbedingung.

$$P_1 = (2\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad P_2 = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

**(d)** Bestimmen Sie jeweils den Typ der kritischen Punkte.

$P_1$ ist ein Maximum, $P_2$ ein Minimum.

**Aufgabe 5** (*3 Punkte*) Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \leqq -\operatorname{Re}(z)\} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 2|z| \leqq \arg(z)\}$$

mit $0 \leqq \arg(z) < 2\pi$ in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie $M_1$, $M_2$ und $M_1 \cap M_2$.