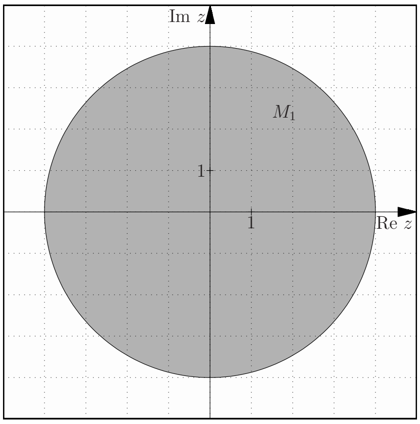
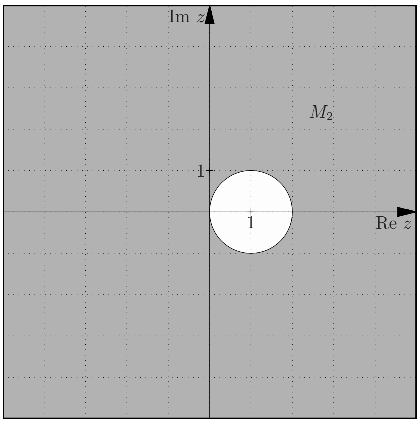
Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |(1+i)z| \leqq 4\sqrt{2} \right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leqq \frac{1}{2},\; z \neq 0 \right\}$$

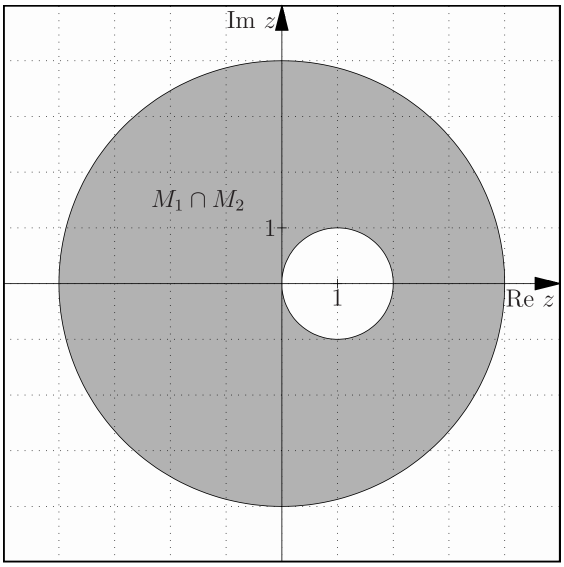
in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie M_1, M_2 und $M_1 \cap M_2$.



Der Randkreis gehört zur Menge M_1.



Der Randkreis ohne 0 gehört zur Menge M_2.



Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 - z + \frac{1}{4} - i = 0$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Die Gleichung kann umgeformt werden zu

$$\left(z - \tfrac{1}{2}\right)^2 = i.$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned}
\left(z - \tfrac{1}{2}\right)^2 &= 1\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\\
z_1 - \tfrac{1}{2} &= \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\\
z_2 - \tfrac{1}{2} &= \cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\\
z_1 &= \tfrac{1+\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\\
z_2 &= \tfrac{1-\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i
\end{aligned}$$

Alternative:

Mit $z = a + bi$ kann die Gleichung umgeformt werden zu

$$(a + bi)^2 - (a + bi) + \frac{1}{4} - i = 0.$$

Wir erhalten

$$\left(a^2 - b^2 - a + \frac{1}{4}\right) + (2ab - b - 1)\; i = 0,$$

und daraus sofort das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 - a + \tfrac{1}{4} &= 0,\\
2ab - b - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \qquad b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$a_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \qquad b_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Daraus ergeben sich

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i, \qquad z_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i.$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)

(a) Berechnen Sie alle reellen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$f_1 = (-1,\, 0,\, 1)^\intercal\,, \qquad f_2 = (3,\, c,\, 0)^\intercal\,, \qquad f_3 = (-2,\, 1,\, c)^\intercal$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(a) Der Gaußalgorithmus liefert:

$$\left[\begin{array}{ccc||c} -1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc||c} -1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc||c} -1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Somit hat die Lösungsmenge die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Die Determinante der Matrix $F = (f_1\ f_2\ f_3)$ ist

$$\det F = -c^2 + 3 + 2c = -(c^2 - 2c + 1) + 4 = -(c-1)^2 + 4\,.$$

Wenn die Determinante ungleich Null ist, hat die Matrix vollen Rang und die Vektoren bilden somit eine Basis, also im Fall

$$\det F = -(c-1)^2 + 4 \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad c \notin \{-1, 3\}\,.$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 1 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik.

Die Quadrik hat die Matrixdarstellung $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = -1\,.$$

Aus dem charakteristischen Polynom $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 1$ ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix lautet also

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch die Koordinatentransformation

$$x = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(y) = Ty = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y$$

wird die Quadrik also in $3y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$ überführt und eine Normierung liefert die euklidische Normalform

$$-3y_1^2 - y_2^2 + 1 = 0\,.$$

Es handelt sich bei der Quadrik folglich um eine Ellipse.

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+1}{x^3+2}\cos(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos(x)}{\sin(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x \sin(x)}{e^{2x}-3}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x\ln(x)-10}$

(a) Auf Grund der Stetigkeit von $\frac{x^3+1}{x^3+2}\cos(x)$ in 0 gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+1}{x^3+2}\cos(x) = \frac{0^3+1}{0^3+2}\cos(0) = \frac{1}{2}.$$

(b) Mit Hilfe des bekannten Grenzwertes $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)}\cos(x) = 1\cos(0) = 1.$$

(c) Durch Umformungen erhält man einen Bruch, dessen Zähler beschränkt ist und dessen Nenner gegen $+\infty$ strebt. Es gilt also

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x \sin(x)}{e^{2x}-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 3e^{-x}} = 0.$$

(d) Durch den bekannten Grenzwert $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ und die Umformung

$$\frac{x^2+1}{x\ln(x)-10} = \frac{1 + {}^1\!/_{x^2}}{{}^{\ln(x)}\!/_x - {}^{10}\!/_{x^2}}$$

sieht man, dass der Funktionsgrenzwert für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ strebt.

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

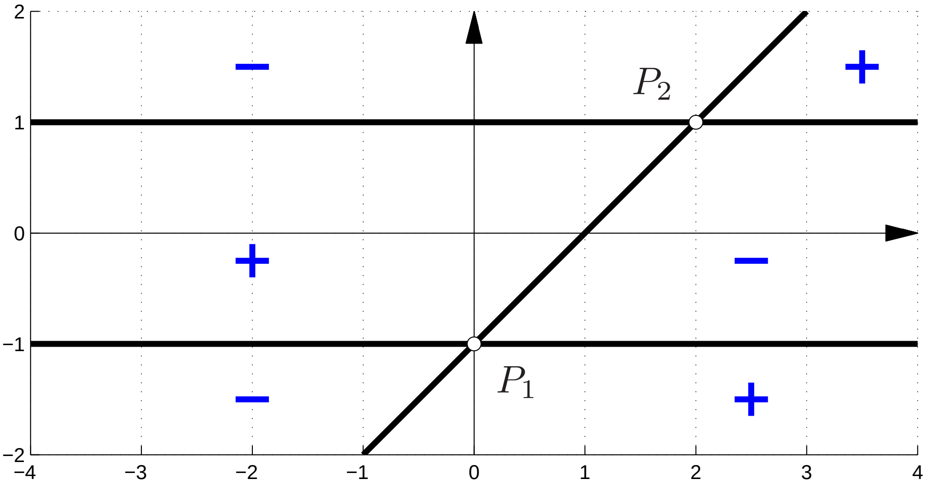
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (y^2-1)(x-y-1)\,.$$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge der Funktion f. Markieren Sie das Vorzeichen der Funktionswerte in allen Bereichen.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von f. Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und markieren Sie diese in Ihrer Skizze.

(c) An welchen dieser kritischen Stellen liegen Extrema, wo Sattelpunkte vor?

(a) Skizze:



(b) Aus der Bedingung

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} y^2-1 \\ 2y(x-y-1)-(y^2-1) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt aus der ersten Zeile $y=\pm 1$. Dies in die zweite Zeile eingesetzt führt auf

$$\pm 2(x \mp 1 - 1) - 0 \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \mp 1 = 1\,,$$

also die kritischen Stellen $P_1 = (0,-1)$ und $P_2 = (2,1)$.

(c) Auf Grund der Vorzeichenverteilung um die kritischen Stellen ist aus der Skizze abzulesen, dass an beiden Stellen Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} {}^1\!/_v \\ -{}^u\!/_{v^2} \end{pmatrix}$$

und die Kurve K, die parametrisiert wird durch

$$C\colon \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x\,.$$

Es gilt

$$C'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_K g(x)\bullet \mathrm{d}\,x &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(C(t))\bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos(t)} \\ \frac{-\sin(t)}{(\cos(t))^2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1 + \left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)^2 \mathrm{d}\,t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}\,t = [\tan(t)]_{t=-\frac{\pi}{4}}^{t=\frac{\pi}{4}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Alternativlösung:

Da $\operatorname{rot} g = 0$ kann die Aufgabe auch mit Hilfe eines Potentials gelöst werden:

Zunächst bestimmt man

$$U(u,v) \in \int g_1(u,v)\,\mathrm{d}\,u = \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}\,u = \left[\frac{u}{v}\right].$$

Das heißt

$$U(u,v) = \frac{u}{v} + c(v)\,.$$

Es muss nun gelten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,v} U(u,v) \stackrel{!}{=} g_2(u,v)\,,$$

folglich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,v}\left(\frac{u}{v} + c(v)\right) = -\frac{u}{v^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,v} c(v) \stackrel{!}{=} -\frac{u}{v^2}\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,v}\,c(v) = 0$$

und damit

$$c(v) \in \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,v}\,c(v)\,\mathrm{d}\,v = \int 0\,\mathrm{d}\,v = [1] \in \mathbb{R}\,,$$

also ist $c(v) = d \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Ein mögliches Potential ist somit gegeben durch

$$U(u,v) = \frac{u}{v}\,.$$

Anfangs- und Endpunkt der Kurve berechnen sich zu

$$P_0 = C(-\tfrac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

und

$$P_1 = C(\tfrac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\,.$$

Damit lässt sich das Wegintegral berechnen

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x = U(P_1) - U(P_0) = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} - \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 2$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A. $\operatorname{Sp} A = \boxed{2i}$ $\det A = \boxed{-2}$

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A. $\chi_A(\lambda) = \boxed{\lambda^2 - 2i\lambda - 2}$

(c) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = \boxed{1+i}$

(d) Bestimmen Sie die Menge M *aller* Eigenwerte von A. $M = \boxed{\{1+i, -1+i\}}$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_2 - 1 = 0 \right\} .$$

$$-\frac{1}{3}z_1^2 - \frac{2}{3}z_2^2 + \frac{1}{3}z_3^2 + 1 = 0$$

Welche Gestalt hat die Quadrik Q?

einschaliges Hyperboloid

Aufgabe 10 (*4 Punkte*) Bestimmmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen. Falls die untersuchte Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n\,n!}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{4^n}$	$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{2n}}{3^n(n+1)}$
$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	$\dfrac{32}{15}$	divergent

Aufgabe 11 (*6 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \, \mathrm{d}\, t$	$=$	$[\ln\lvert\sin(t)\rvert]$
$\int \frac{2x}{1+x^4} \, \mathrm{d}\, x$	$=$	$[\arctan(x^2)]$
$\int \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{e^x} \, \mathrm{d}\, x$	$=$	$\left[xe^{-x}\right]$

Aufgabe 12 (7 *Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto e^{x+y} - \sin(xy)$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{e^{x+y} - y\cos(xy)} \\ \boxed{e^{x+y} - x\cos(xy)} \end{pmatrix}$$

und die Hessematrix

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{e^{x+y} + y^2\sin(xy)} & \boxed{e^{x+y} - \cos(xy) + xy\sin(xy)} \\ \boxed{e^{x+y} - \cos(xy) + xy\sin(xy)} & \boxed{e^{x+y} + x^2\sin(xy)} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big)$ der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt $(x_0,y_0) = (0,0)$.

$$T_2\big(f,(x,y),(0,0)\big) = \boxed{1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}$$