

**Aufgabe 1** (8 Punkte) Bestimmen Sie alle (ggf. komplexen) Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) charakteristisches Polynom:  $(1 - \lambda)(-1 - \lambda) \stackrel{!}{=} 0$       Eigenwerte:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

(b) charakteristisches Polynom:  $(2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0$       Eigenwerte:  $\lambda_1 = 0, \lambda_{2/3} = 2$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (s, t) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

(c) charakteristisches Polynom:  $((4 - \lambda)(-2 - \lambda) + 9)(-2 - \lambda) \stackrel{!}{=} 0$

Eigenwerte:  $\lambda_1 = -2, \lambda_{2/3} = 1$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

**Aufgabe 2** (8 Punkte) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an.

Die Gleichung der Quadrik lautet  $x^T A x + 2a^T x + c = 0$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad c = -9.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  lautet  $(5 - \lambda)^2 - 16$  und die Eigenwerte sind damit

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 9.$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren ergeben sich die Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der orthogonalen Transformation  $y = T x$  lautet also

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und diese transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$\tilde{a} = T^T a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die transformierte Gleichung

$$y_1^2 + 9y_2^2 - 3\sqrt{2}y_1 + 9\sqrt{2}y_2 - 9 = 0.$$

Quadratische Ergänzung liefert

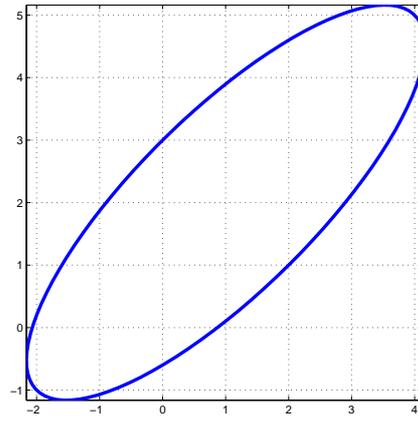
$$\left( y_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 9 \left( y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 18 = 0.$$

Die euklidische Normalform ergibt sich schließlich aus  $z = y - v = y - \frac{\sqrt{2}}{2}(3, -1)^T$  und lautet demnach

$$-\frac{1}{18}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 + 1 = 0.$$

Die Gestalt ist eine Ellipse.

Es ergibt sich die folgende Skizze.



**Aufgabe 3** (5 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion, dass für die Ableitungen von  $f$  gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left( (x+1)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1} \right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion  $f$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe aus Teil (b).

(a) **IA**  $n = 1$ :  $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$   
Also ist die Behauptung für  $n = 1$  wahr.

**IS**  $n \rightarrow (n+1)$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} \left( (-1)^n n! \left( (x+1)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1} \right) \right) \\ &= (-1)^n n! (-n-1) \left( (x+1)^{-(n+1)-1} - (x-1)^{-(n+1)-1} \right) \end{aligned}$$

Deshalb ist die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  wahr.

(b)

$$\begin{aligned} T(f, x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! (1 - (-1)^{-n-1})}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{(1 + (-1)^n)}_{\begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 2 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n} \end{aligned}$$

(c) Mit Hilfe des Wurzelkriteriums ergibt sich

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2} = 1,$$

somit ist der Konvergenzradius  $\rho = 1$ .

**Aufgabe 4** (7 Punkte) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto e^{2x_1-x_2} \begin{pmatrix} 1 + 2x_1 + 2x_2 \\ -\alpha - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  und der Weg  $C$ , welcher geradlinig von  $(1, 1)$  zu  $(1, 3)$  läuft.

- (a) Entscheiden Sie, für welche  $\alpha$  das Vektorfeld ein Potential besitzt.  
 (b) Berechnen Sie für  $\alpha = 0$  das Kurvenintegral

$$\int_C g_0(x) \bullet dx.$$

- (a) Da der Definitionsbereich  $\mathbb{R}^2$  einfach zusammenhängend ist, existiert ein Potential genau dann, wenn die Rotation verschwindet.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} g_\alpha(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1} ((-\alpha - x_1 - x_2)e^{2x_1-x_2}) - \frac{\partial}{\partial x_2} ((1 + 2x_1 + 2x_2)e^{2x_1-x_2}) \\ &= 2e^{2x_1-x_2}(-\alpha - x_1 - x_2) - e^{2x_1-x_2} + e^{2x_1-x_2}(1 + 2x_1 + 2x_2) - 2e^{2x_1-x_2} \\ &= -2e^{2x_1-x_2}(\alpha + 1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1 \end{aligned}$$

- (b) Eine Parametrisierung von  $C$  lautet

$$c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto c(t) = (1, 1 + 2t)^\top,$$

das Kurvenintegral ist somit

$$\begin{aligned} \int_C g_0(x) \bullet dx &= \int_0^1 g_0(c(t)) \bullet c'(t) dt = \int_0^1 e^{2-1-2t} \begin{pmatrix} 1 + 2 + 2(1 + 2t) \\ -1 - 1 - 2t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} dt \\ &= -4 \int_{t=0}^1 e^{1-2t}(1+t) dt = -4 \left( \left[ -\frac{1}{2}e^{1-2t}(1+t) \right]_0^1 - \int_{t=0}^1 -\frac{1}{2}e^{1-2t} dt \right) \\ &= -4 \left( -\frac{1}{e} + \frac{e}{2} - \left[ \frac{1}{4}e^{1-2t} \right]_0^1 \right) = -4 \left( -\frac{1}{e} + \frac{e}{2} - \frac{1}{4e} + \frac{e}{4} \right) = \frac{5}{e} - 3e. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5** (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y)^\top \mapsto e^{2x+y}.$$

Bestimmen Sie

den Gradient von  $f$ :

$$\text{grad } f(x, y) =$$

$$\begin{pmatrix} 2e^{2x+y} \\ e^{2x+y} \end{pmatrix}$$

die Hessematrix:

$$\mathbf{H}f(x, y) =$$

$$\begin{pmatrix} 4e^{2x+y} & 2e^{2x+y} \\ 2e^{2x+y} & e^{2x+y} \end{pmatrix}$$

und das Taylorpolynom der Stufe 2 im Punkt  $(0, 0)$ :

$$T_2(f, (x, y), (0, 0)) =$$

$$1 + 2x + y + 2x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$$

**Aufgabe 6** (3 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls die untersuchte Folge oder Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n-1)} - n$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

**Aufgabe 7** (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$\int \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}} dx$	$\int \frac{x}{(\cos(x))^2} dx$	$\int \sin(x) \cos(y) dy$
$\left[ 2\sqrt{x^3 + 2x + 1} \right]$	$\left[ x \tan(x) + \ln  \cos(x)  \right]$	$\left[ \sin(x) \sin(y) \right]$