Aufgabe 1 (*9 Punkte*)
Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? Berechnen Sie diese Lösung.

(c) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die Lösungsmenge.

(d) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System keine Lösungen?

(a) Durch Zeilenoperationen bekommt man die folgende vereinfachte Matrix B, die die gleiche Determinante besitzt wie A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$\det A = \det B = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\alpha - \frac{3}{4}\right) = 4\alpha - 3$$

(b) Ein LGS mit quadratischer Koeffizientenmatrix hat eine eindeutige Lösung genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet. Also besitzt das LGS eine eindeutige Lösung, falls

$$\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\alpha - 3 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq \frac{3}{4}.$$

Um die Lösung in diesem Fall zu berechnen betrachtet man das augmentierte System $[A||b]$ und vereinfacht es auf dieselbe Weise wie in **(a)** zu $[B||b]$. Aus dieser Schreibweise kann man die Lösung dann ablesen und erhält

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{\beta}{4\alpha - 3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Aus **(b)** weiß man, dass die Matrix nur für den Fall $\alpha = \frac{3}{4}$ unendlich viele Lösungen haben kann. Betrachtet man die letzte Zeile von $[B||b]$, so erhält man für die Lösbarkeit auch noch die Bedingung $\beta = 0$.

Die Lösung kann man wieder aus $[B||b]$ ablesen, man erhält die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) Mit demselben Vorgehen wie in **(c)** erhält man, dass für $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta \neq 0$ das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Aufgabe 2 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie alle (ggf. komplexen) Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

(a) charakteristisches Polynom: $(1-\lambda)^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 1 - i,\ \lambda_2 = 1 + i$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \middle| \ s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \middle| \ s \in \mathbb{C} \right\}$$

(b) charakteristisches Polynom: $(2-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) \stackrel{!}{=} 0$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2/3} = 2$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ (s,t) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

(c) charakteristisches Polynom: $\left((4-\lambda)(-2-\lambda) + 9\right)(-2-\lambda) \stackrel{!}{=} 0$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_{2/3} = 1$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \ s \in \mathbb{C} \right\}$$

Aufgabe 3 (*9 Punkte*) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an.

Die Gleichung der Quadrik lautet $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad c = -9.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet $(5-\lambda)^2 - 16$ und die Eigenwerte sind damit

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = 9\,.$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren ergeben sich die Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der orthogonalen Transformation $y = T^\intercal x$ lautet also

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und diese transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$\tilde{a} = T^\intercal a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die transformierte Gleichung

$$y_1^2 + 9y_2^2 - 3\sqrt{2}y_1 + 9\sqrt{2}y_2 - 9 = 0\,.$$

Quadratische Ergänzung liefert

$$\left(y_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 9\left(y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 18 = 0\,.$$

Die euklidische Normalform ergibt sich schließlich aus $z = y - v = y - \frac{\sqrt{2}}{2}(3, -1)^\intercal$ und lautet demnach

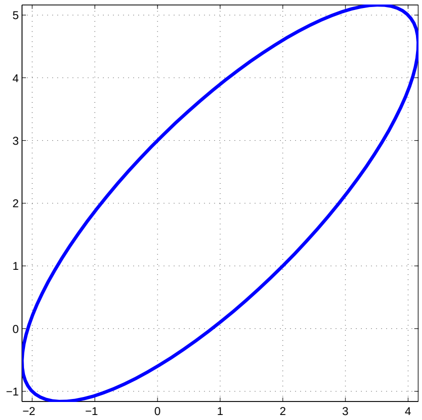
$$-\frac{1}{18} z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 + 1 = 0\,.$$

Die Gestalt ist eine Ellipse.

Für die Koordinatentransformation erhält man

$$z = y - v = T^\intercal x - v \quad \Rightarrow \quad x = T(z + v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

also ergibt sich die folgende Skizze.



Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\,.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion, dass für die Ableitungen von f gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\left((x+1)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe aus Teil **(b)**.

(a) **IA** $n = 1\colon\ f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$

Also ist die Behauptung für $n = 1$ wahr.

IS $n \to (n+1)$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left((-1)^n n!\left((x+1)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1}\right)\right) \\ &= (-1)^n n!(-n-1)\left((x+1)^{-(n+1)-1} - (x-1)^{-(n+1)-1}\right) \end{aligned}$$

Deshalb ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(b)

$$\begin{aligned} T(f,x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!\,(1-(-1)^{-n-1})}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{(1+(-1)^n)}_{=\begin{cases} 0 \text{ für } n \text{ ungerade} \\ 2 \text{ für } n \text{ gerade} \end{cases}} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n} \end{aligned}$$

(c) Mit Hilfe des Wurzelkriteriums ergibt sich

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2} = 1\,,$$

somit ist der Konvergenzradius $\varrho = 1$.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{2x_1-x_2} \begin{pmatrix} 1+2x_1+2x_2 \\ -\alpha - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und der Weg C, welcher geradlinig von $(1,1)$ zu $(1,3)$ läuft.

(a) Entscheiden Sie, für welche α das Vektorfeld ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie für $\alpha = 0$ das Kurvenintegral

$$\int_C g_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x\,.$$

(a) Da der Definitonsbereich $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, existiert ein Potential genau dann, wenn die Rotation verschwindet.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} g_\alpha(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left((-\alpha - x_1 - x_2)\mathrm{e}^{2x_1-x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left((1+2x_1+2x_2)\mathrm{e}^{2x_1-x_2}\right) \\
&= 2\mathrm{e}^{2x_1-x_2}(-\alpha - x_1 - x_2) - \mathrm{e}^{2x_1-x_2} + \mathrm{e}^{2x_1-x_2}(1+2x_1+2x_2) - 2\mathrm{e}^{2x_1-x_2} \\
&= -2\mathrm{e}^{2x_1-x_2}(\alpha+1) \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = -1
\end{aligned}$$

(b) Eine Parametrisierung von C lautet

$$c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto c(t) = (1, 1+2t)^\intercal,$$

das Kurvenintegral ist somit

$$\begin{aligned}
\int_C g_0(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^1 g_0(c(t)) \bullet c'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \mathrm{e}^{2-1-2t} \begin{pmatrix} 1+2+2(1+2t) \\ -1-1-2t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= -4 \int_{t=0}^{1} \mathrm{e}^{1-2t}(1+t)\,\mathrm{d}\,t = -4\left(\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-2t}(1+t)\right]_0^1 - \int_{t=0}^{1} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-2t}\,\mathrm{d}\,t\right) \\
&= -4\left(-\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{\mathrm{e}}{2} - \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{1-2t}\right]_0^1\right) = -4\left(-\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{4\mathrm{e}} + \frac{\mathrm{e}}{4}\right) = \frac{5}{\mathrm{e}} - 3\mathrm{e}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (*3 Punkte*)
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \mathrm{e}^{2x+y}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 im Punkt $(0,0)$.

Der Gradient von f lautet $\operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2x+y} \\ \mathrm{e}^{2x+y} \end{pmatrix}$, die Hessematrix ist

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{2x+y} & 2\mathrm{e}^{2x+y} \\ 2\mathrm{e}^{2x+y} & \mathrm{e}^{2x+y} \end{pmatrix}.$$

Das Taylorpolynom lautet also

$$T_2(0,0) = 1 + 2x + y + 2x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2.$$

.

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen von $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ in der Form $z = x + y\,\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 =$	$1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$	$z_2 =$	$-\sqrt{3} + \mathrm{i}$
$z_3 =$	$-1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$	$z_4 =$	$\sqrt{3} - \mathrm{i}$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls die untersuchte Folge oder Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n(n-1)} - n$	$\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n\pi)$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	divergent

Aufgabe 9 (*6 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$\displaystyle\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x+1}}\,\mathrm{d}\,x$	$\displaystyle\int \frac{x}{(\cos(x))^2}\,\mathrm{d}\,x$	$\displaystyle\int \sin(x)\cos(y)\,\mathrm{d}\,y$
$\left[2\sqrt{x^3+2x+1}\right]$	$\left[x\tan(x)+\ln\lvert\cos(x)\rvert\right]$	$\left[\sin(x)\sin(y)\right]$

Aufgabe 10 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \mathrm{e}^{(x+1)^2+y^2}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion f.

$$\begin{pmatrix} 2(x+1)\mathrm{e}^{(x+1)^2+y^2} \\ 2y\mathrm{e}^{(x+1)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die kritischen Stellen von f.

$$P_1 = (-1, 0)$$

(c) Geben Sie den Typ der kritischen Stellen an.

bei P_1 liegt ein lokales Minimum vor