

**Aufgabe 1** (5 Punkte)

Beweisen Sie für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{z\pi \mid z \in \mathbb{Z}\}$  die Formel

$$\cos(x) \cos(2x) \cos(4x) \cdots \cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1} \sin(x)}$$

für  $n \in \mathbb{N}_0$  mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Dabei dürfen Sie die folgende Gleichung, die für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt, ohne Beweis benutzen:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x).$$

---

ⒾA)  $n = 0$ :

$$\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2 \sin(x)}.$$

Wegen  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$  ist die Behauptung für  $n = 0$  wahr.

ⒾS)  $n \rightarrow (n + 1)$ :

$$\begin{aligned} \cos(x) \cos(2x) \cos(4x) \cdots \cos(2^n x) \cos(2^{n+1}x) &= \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1} \sin(x)} \cos(2^{n+1}x) = \\ \frac{\sin(2^{n+1}x) \cos(2^{n+1}x)}{2^{n+1} \sin(x)} &= \frac{\frac{1}{2} \sin(2 \cdot 2^{n+1}x)}{2^{n+1} \sin(x)} = \frac{\sin(2^{n+2}x)}{2^{n+2} \sin(x)}. \end{aligned}$$

Deshalb ist die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  wahr.

**Aufgabe 2** (9 Punkte)

Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix  $A$ .
- (b) Für welche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  besitzt das System eine eindeutige Lösung? Berechnen Sie diese Lösung.
- (c) Für welche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  besitzt das System unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die Lösungsmenge.
- (d) Für welche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  besitzt das System keine Lösungen?

- (a) Durch Zeilenoperationen bekommt man die folgende vereinfachte Matrix  $B$ , die die gleiche Determinante besitzt wie  $A$ .

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$\det A = \det B = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left( \alpha - \frac{3}{4} \right) = 4\alpha - 3$$

- (b) Ein LGS mit quadratischer Koeffizientenmatrix hat eine eindeutige Lösung genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet. Also besitzt das LGS eine eindeutige Lösung, falls

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{3}{4}.$$

Um die Lösung in diesem Fall zu berechnen betrachtet man das augmentierte System  $[A||b]$  und vereinfacht es auf dieselbe Weise wie in (a) zu  $[B||b]$ . Aus dieser Schreibweise kann man die Lösung dann ablesen und erhält

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{\beta}{4\alpha - 3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Aus (b) weiß man, dass die Matrix nur für den Fall  $\alpha = \frac{3}{4}$  unendlich viele Lösungen haben kann. Betrachtet man die letzte Zeile von  $[B||b]$ , so erhält man für die Lösbarkeit auch noch die Bedingung  $\beta = 0$ .

Die Lösung kann man wieder aus  $[B||b]$  ablesen, man erhält die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) Mit demselben Vorgehen wie in (c) erhält man, dass für  $\alpha = \frac{3}{4}$  und  $\beta \neq 0$  das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

**Aufgabe 3 (10 Punkte)** Bestimmen Sie alle (ggf. komplexen) Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) charakteristisches Polynom:  $(1 - \lambda)(-1 - \lambda) \stackrel{!}{=} 0$       Eigenwerte:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

(b) charakteristisches Polynom:  $(1 - \lambda)^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0$       Eigenwerte:  $\lambda_1 = 1 - i, \lambda_2 = 1 + i$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

(c) charakteristisches Polynom:  $(2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0$       Eigenwerte:  $\lambda_1 = 0, \lambda_{2/3} = 2$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (s, t) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

(d) charakteristisches Polynom:  $((4 - \lambda)(-2 - \lambda) + 9)(-2 - \lambda) \stackrel{!}{=} 0$

Eigenwerte:  $\lambda_1 = -2, \lambda_{2/3} = 1$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C} \right\}$$

**Aufgabe 4** (9 Punkte) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0 \right\}$$

und ermitteln Sie die zugehörige Koordinatentransformation. Bestimmen Sie anhand der Normalform die Gestalt der Quadrik und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik in Standardkoordinaten an.

Die Gleichung der Quadrik lautet  $x^T A x + 2a^T x + c = 0$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad c = -9.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  lautet  $(5 - \lambda)^2 - 16$  und die Eigenwerte sind damit

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 9.$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren ergeben sich die Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus die Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der orthogonalen Transformation  $y = T^T x$  lautet also

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und diese transformiert den linearen Anteil der Gleichung auf

$$\tilde{a} = T^T a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die transformierte Gleichung

$$y_1^2 + 9y_2^2 - 3\sqrt{2}y_1 + 9\sqrt{2}y_2 - 9 = 0.$$

Quadratische Ergänzung liefert

$$\left( y_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 9 \left( y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 18 = 0.$$

Die euklidische Normalform ergibt sich schließlich aus  $z = y - v = y - \frac{\sqrt{2}}{2}(3, -1)^T$  und lautet demnach

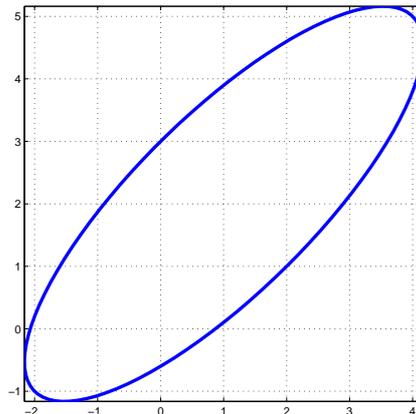
$$-\frac{1}{18}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 + 1 = 0.$$

Die Gestalt ist eine Ellipse.

Für die Koordinatentransformation erhält man

$$z = y - v = T^T x - v \quad \Rightarrow \quad x = T(z + v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

also ergibt sich die folgende Skizze.



**Aufgabe 5** (12 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Menge  $D$  der reellen Stellen  $x$ , an denen der Funktionsterm definiert ist. Ermitteln Sie das Verhalten von  $f$  an den Polstellen.
- (b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von  $f$ .
- (c) Skizzieren Sie das Schaubild von  $f$  für  $x \in [-4, 4]$ .
- (d) Zeigen Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion, dass für die Ableitungen von  $f$  gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left( (x+1)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1} \right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

- (e) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion  $f$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .
- (f) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe aus Teil (e).

(a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

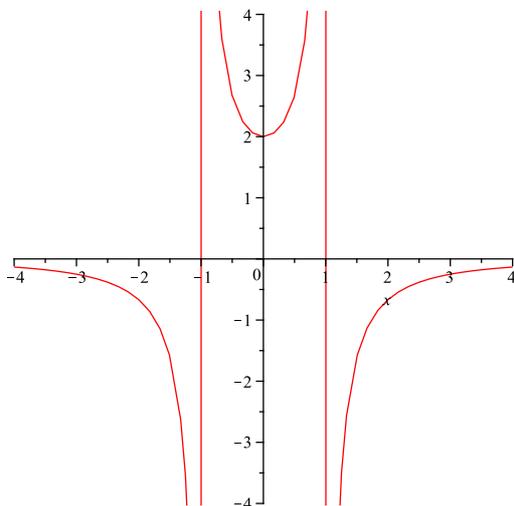
(b) Mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

ergibt sich aus der notwendigen Bedingung für ein lokales Extremum

$$-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -(x-1)^2 + (x+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Wegen  $f''(0) = 4 > 0$  liegt dort also ein lokales Minimum vor.



(c)

(d) **IA**  $n = 1: f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$

Also ist die Behauptung für  $n = 1$  wahr.

**IS**  $n \rightarrow (n+1)$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} \left( (-1)^n n! \left( (x+1)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1} \right) \right) \\ &= (-1)^n n! (-n-1) \left( (x+1)^{-(n+1)-1} - (x-1)^{-(n+1)-1} \right) \end{aligned}$$

Deshalb ist die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$  wahr.

(e)

$$\begin{aligned} T(f, x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! (1 - (-1)^{-n-1})}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{(1 + (-1)^n)}_{\begin{cases} 0 \text{ für } n \text{ ungerade} \\ 2 \text{ für } n \text{ gerade} \end{cases}} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n} \end{aligned}$$

(f) Mit Hilfe des Wurzelkriteriums ergibt sich

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2} = 1,$$

somit ist der Konvergenzradius  $\rho = 1$ .

**Aufgabe 6** (7 Punkte) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto e^{2x_1-x_2} \begin{pmatrix} 1 + 2x_1 + 2x_2 \\ -\alpha - x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  und der Weg  $C$ , welcher geradlinig von  $(1, 1)$  zu  $(1, 3)$  läuft.

- (a) Entscheiden Sie, für welche  $\alpha$  das Vektorfeld ein Potential besitzt.  
 (b) Berechnen Sie für  $\alpha = 0$  das Kurvenintegral

$$\int_C g_0(x) \bullet dx.$$

- (a) Da der Definitionsbereich  $\mathbb{R}^2$  einfach zusammenhängend ist, existiert ein Potential genau dann, wenn die Rotation verschwindet.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} g_\alpha(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1} ((-\alpha - x_1 - x_2)e^{2x_1-x_2}) - \frac{\partial}{\partial x_2} ((1 + 2x_1 + 2x_2)e^{2x_1-x_2}) \\ &= 2e^{2x_1-x_2}(-\alpha - x_1 - x_2) - e^{2x_1-x_2} + e^{2x_1-x_2}(1 + 2x_1 + 2x_2) - 2e^{2x_1-x_2} \\ &= -2e^{2x_1-x_2}(\alpha + 1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1 \end{aligned}$$

- (b) Eine Parametrisierung von  $C$  lautet

$$c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto c(t) = (1, 1 + 2t)^\top,$$

das Kurvenintegral ist somit

$$\begin{aligned} \int_C g_0(x) \bullet dx &= \int_0^1 g_0(c(t)) \bullet c'(t) dt = \int_0^1 e^{2-1-2t} \begin{pmatrix} 1 + 2 + 2(1 + 2t) \\ -1 - 1 - 2t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} dt \\ &= -4 \int_{t=0}^1 e^{1-2t}(1+t) dt = -4 \left( \left[ -\frac{1}{2}e^{1-2t}(1+t) \right]_0^1 - \int_{t=0}^1 -\frac{1}{2}e^{1-2t} dt \right) \\ &= -4 \left( -\frac{1}{e} + \frac{e}{2} - \left[ \frac{1}{4}e^{1-2t} \right]_0^1 \right) = -4 \left( -\frac{1}{e} + \frac{e}{2} - \frac{1}{4e} + \frac{e}{4} \right) = \frac{5}{e} - 3e. \end{aligned}$$

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y)^\top \mapsto e^{2x+y}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 im Punkt  $(0, 0)$ .

---

Der Gradient von  $f$  lautet  $\text{grad}(f) = \begin{pmatrix} 2e^{2x+y} \\ e^{2x+y} \end{pmatrix}$ , die Hessematrix ist

$$H f(x, y) = \begin{pmatrix} 4e^{2x+y} & 2e^{2x+y} \\ 2e^{2x+y} & e^{2x+y} \end{pmatrix}.$$

Das Taylorpolynom lautet also

$$T_2(0, 0) = 1 + 2x + y + 2x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2.$$

**Aufgabe 8** (4 Punkte) Geben Sie alle Lösungen von  $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$  in der Form  $z = x + yi$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  an.

$z_1 =$	$1 + \sqrt{3}i$	$z_2 =$	$-\sqrt{3} + i$
$z_3 =$	$-1 - \sqrt{3}i$	$z_4 =$	$\sqrt{3} - i$

**Aufgabe 9** (5 Punkte) Es seien  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie den Winkel  $\alpha$  zwischen  $b_1$  und  $b_2$ .  
(b) Bestimmen Sie  $f_2 \in L(b_1, b_2)$  so, dass  $f_2$  normiert und senkrecht zu  $b_1$  ist.  
(c) Bestimmen Sie  $f_3$  so, dass  $b_1, f_2, f_3$  ein Rechtssystem bilden.

Tragen Sie die Lösungen in die folgenden Kästen ein:

$$\alpha = \boxed{\frac{\pi}{4}}, \quad f_2 = \boxed{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad f_3 = \boxed{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}.$$

**Aufgabe 10** (5 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls die untersuchte Folge oder Reihe nicht konvergiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n-1)} - n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^2}$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	divergent	divergent

**Aufgabe 11** (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$\int \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}} dx$	$\int \frac{x}{(\cos(x))^2} dx$	$\int \sin(x) \cos(y) dy$
$\left[ 2\sqrt{x^3 + 2x + 1} \right]$	$\left[ x \tan(x) + \ln  \cos(x)  \right]$	$\left[ \sin(x) \sin(y) \right]$

**Aufgabe 12** (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y)^T \mapsto e^{(x+1)^2+y^2}$ .

(a) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion  $f$ .

$$\begin{pmatrix} 2(x+1)e^{(x+1)^2+y^2} \\ 2ye^{(x+1)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die kritischen Stellen von  $f$ .

$$P_1 = (-1, 0)$$

(c) Geben Sie den Typ der kritischen Stellen an.

bei  $P_1$  liegt ein lokales Minimum vor