Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y)^\intercal \mapsto (x^2+1)^y.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Stufe zum Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Der Gradient von f beträgt

$$(\operatorname{grad} f)(x,y)^\intercal = \left(2xy(x^2+1)^{y-1},\ \ln(x^2+1)(x^2+1)^y\right).$$

Die zweifachen partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2y(x^2+1)^{y-1} + 4x^2y(y-1)(x^2+1)^{y-2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2x(x^2+1)^{y-1} + 2xy\ln(x^2+1)(x^2+1)^{y-1}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (\ln(x^2+1))^2(x^2+1)^y\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Taylorpolynom der 2. Stufe zu:

$$T_2(x,y) = 2 + 2(x-1) + 2\ln 2\,(y-1) + (x-1)^2 + (2+2\ln 2)(x-1)(y-1) + (\ln 2)^2(y-1)^2$$

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\right)$ **(b)** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\ln\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)\right)$

(a) Mit Produkt- und Kettenregel ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\left(1+\sqrt{x}\right) \,.$$

(b) Wir berechnen

$$\ln\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right) = \ln\left(e^x\right) - \ln\left(x^2+1\right) = x - \ln\left(x^2+1\right) \,.$$

Dann erhält man mit der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\ln\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(x - \ln\left(x^2+1\right)\right) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \,.$$

Alternative:

Man benutzt Ketten- und Quotientenregel und erhält

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\ln\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)\right) = \frac{x^2+1}{e^x}\,\left(\frac{e^x\,(x^2+1) - e^x\,2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \,.$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)^\intercal\} \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto \frac{-1}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x,y)^\intercal .$$

(a) Berechnen Sie ein Potential von f.

(b) Gegeben seien nun die Punkte $P_1 = (-1,0)^\intercal$ und $P_2 = (1,0)^\intercal$. Geben Sie eine Parametrisierung für eine Kurve K an, welche die Punkte P_1 (Startpunkt) und P_2 (Endpunkt) über einen Halbkreis um den Nullpunkt mit Radius 1 verbindet.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs K.

(a) Wir integrieren zunächst f_x nach x und erhalten mit der Substitution $u(x) = x^2 + y^2$:

$$\int \frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{-1}{2u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\,u = \left[u^{-\frac{1}{2}}\right] = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + c(y)\,.$$

Wenn wir nun diese Stammfunktion nach y differenzieren, sehen wir, dass $c(y)$ konstant sein muss. Daraus ergibt sich ein Potential zu

$$U\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)^\intercal\} \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(b) Zwei mögliche Parametrisierungen sind gegeben durch

$$C\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

$$\hat{C}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Die Varianten mit negativer y-Komponente sind ebenfalls richtig.

(c) **1. Variante:**

Man berechnet das Kurvenintegral am einfachsten mit Hilfe des Potentials aus (a):

$$\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = U(P_2) - U(P_1) = 0\,.$$

2. Variante:

Man verwendet die Parametrisierung aus (b):

$$\begin{aligned}
\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^\pi f\left(C(t)\right) \cdot C'(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\pi \frac{-1}{(\cos^2(t)+\sin^2(t))^{3/2}} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\pi \left(\cos(t)\sin(t) - \sin(t)\cos(t)\right)\mathrm{d}\,t = 0\,.
\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für andere Parametrisierungen.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int e^{\cos x} \sin x \cos x \,\mathrm{d}\, x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x \,\mathrm{d}\, x$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} \,\mathrm{d}\, x$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} \,\mathrm{d}\, x$

(e) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \cos x \,\mathrm{d}\, x$

(a) Wir substituieren $\cos x = t$ und erhalten

$$\int e^{\cos x} \sin x \cos x \,\mathrm{d}\, x = -\int e^t\, t \,\mathrm{d}\, t.$$

Durch partielle Integration, mit $f = e^t$, $g = t$, ergibt sich

$$-\int e^t \,\mathrm{d}\, t = -\left[t\, e^t\right] + \int e^t \,\mathrm{d}\, t = \left[-t\, e^t + e^t\right] = \left[e^t(1-t)\right] .$$

Durch Resubstitution $t = \cos x$ erhält man

$$\int e^{\cos x} \sin x \cos x \,\mathrm{d}\, x = \left[e^{\cos x}(1 - \cos x)\right].$$

Alternative:

Durch partielle Integration, mit $f = -e^{\cos x}$, $g = \cos x$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int e^{\cos x} \sin x \cos x \,\mathrm{d}\, x &= -\left[e^{\cos x}\ \cos x\right] - \int e^{\cos x} \sin x \,\mathrm{d}\, x \\ &= \left[-e^{\cos x}\ \cos x\right] + \int e^{\cos x} \,\mathrm{d}(\cos x) \\ &= \left[-e^{\cos x}\ \cos x + e^{\cos x}\right] \\ &= \left[e^{\cos x}(1 - \cos x)\right] .\end{aligned}$$

(b) Wir substituieren $\cos x = t$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos(x)} \sin(x) \,\mathrm{d}\, x &= -\int_1^{\frac{1}{2}} e^t \,\mathrm{d}\, t \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t \,\mathrm{d}\, t = \left[e^t\right]_{\frac{1}{2}}^1 = e - \sqrt{e}\,.\end{aligned}$$

Alternative: Wir berechnen

$$\int e^{\cos x} \sin x \,\mathrm{d}\, x = \int e^{\cos x} \,\mathrm{d}(\cos x) = \left[-e^{\cos x}\right].$$

Wir erhalten

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x \,\mathrm{d}\, x = \left[-e^{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = e - \sqrt{e}.$$

(c) Durch Substitution $\sin x = t$ erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{1}{1+2t}\,\mathrm{d}\,t$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}\,.$$

Alternative: Wir berechnen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}(1+2\sin x)$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\ln(1+2\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln 3}{2}\,.$$

(d) Wir substituieren $\ln x = t$. Wir erhalten

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}\,x = \int \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}\right]\,.$$

(e) Durch partielle Integration, mit $f = \sin x,\ g = e^{-x}$, erhalten wir

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}\,x = \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Anwenden der partiellen Integration, mit $f = -\cos x,\ g = e^{-x}$, auf das zweite Integral liefert

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}\,x = \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{+\infty} - \left[e^{-x}\cos x\right]_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}\,x\,,$$

woraus sofort

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left[e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]_0^{+\infty}$$

folgt.

Wir berechnen

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{2}\left[e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]_0^{\beta}$$
$$= \lim_{\beta\to+\infty}\frac{\sin\beta - \cos\beta}{2e^{\beta}} - \frac{\sin 0 - \cos 0}{2e^0} = \frac{1}{2}\,.$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Ein quaderförmiger Behälter ohne Deckel soll aus $12\,\mathrm{m}^2$ Blech hergestellt werden. Wir suchen das maximale Volumen eines solchen Behälters.

(a) Geben Sie einen Ausdruck V für das Volumen und einen Ausdruck A für die Oberfläche (also die verwendete Materialmenge) jeweils in Abhängigkeit von Länge, Breite und Höhe des Behälters an.

(b) Bestimmen Sie die Gradienten der Funktionen V und A.

(c) Was ist das maximale Volumen des Behälters?

(a) Wir bezeichnen mit x, y und z die Länge, Breite und Höhe des Behälters (in Metern). Offensichtlich ist es sinnvoll, die Suche auf den Bereich zu beschränken, in dem keiner der drei Werte negativ ist.

Dann können wir das Volumen V und die Oberfläche A des Behälters durch die folgenden Formeln beschreiben:

$$V\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = xyz \quad\text{und}\quad A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = xy + 2xz + 2yz = xy + 2(x+y)z\,.$$

Die Funktionen

$$V\colon [0,+\infty)^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto xyz$$

und

$$A\colon [0,+\infty)^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto xy + 2(x+y)z$$

sind beide stetig und stetig partiell differenzierbar.

(b) Der Gradient von V berechnet sich als

$$\operatorname{grad} V\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial y}\\ \frac{\partial V}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz\\ xz\\ xy\end{pmatrix}.$$

Der Gradient von A berechnet sich als

$$\operatorname{grad} A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}\\ \frac{\partial A}{\partial y}\\ \frac{\partial A}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z\\ x+2z\\ 2(x+y)\end{pmatrix}.$$

(c) Wir wollen die Zielfunktion V unter der Nebenbedingung $A = 12$ maximieren. An allen Stellen auf dem Rand $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in [0,+\infty)^3 \,\middle|\, x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in [0,+\infty)^3 \,\middle|\, xyz = 0\right\}$ des Definitionsbereiches $[0,+\infty)^3$ nimmt V den Wert 0 an; für die Suche nach dem Maximum können wir uns also auf das offene Gebiet $\Omega = (0,+\infty)^3$ beschränken.

Wir verwenden die Methode von Lagrange; diese liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcll} yz & + & \lambda(y+2z) & = & 0 & \qquad (1) \\ xz & + & \lambda(x+2z) & = & 0 & \qquad (2) \\ xy & + & 2\lambda(x+y) & = & 0 & \qquad (3) \\ xy & + & 2(x+y)z & = & 12. & \qquad (4) \end{array}$$

Der Gradient $\operatorname{grad} A$ wird im betrachteten Gebiet $\Omega = (0, +\infty)^3$ nie Null.

Subtraktion der Gleichung (1) von Gleichung (2) liefert $(x-y)(z+\lambda) = 0$,
also $\lambda = -z$ oder $x = y$.

Im Fall $\lambda = -z$ ergibt sich aus Gleichung (1)

$$yz - yz - 2z^2 = 0\,,$$

also $z = 0$. Dieser Wert liegt nicht im zulässigen Bereich Ω für z.

Also gilt $x = y$, und wegen $x > 0$ folgt dann $\lambda = -\frac{x}{4}$ aus Gleichung (3). Dann wird Gleichung (1) zu

$$2xz - x^2 = 0$$

und $x > 0$ liefert $2z = x$. Schließlich wird Gleichung (4) zu

$$x^2 + 2x^2 = 12,$$

und wir erhalten $x = 2$ (wobei wir ein letztes Mal $x > 0$ verwendet haben).

Die Stelle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist also die einzige kritische Stelle, die die Multiplikator-Methode im betrachteten Bereich Ω liefert.

An dieser Stelle gilt $V = 4$.

Warum liegt an dieser Stelle wirklich ein Maximum vor?

Wir zeigen als Nächstes, dass V außerhalb des kompakten Quaders $[0, 18] \times [0, 18] \times [0, 9]$ unter der Nebenbedingung $A = 12$ keine Werte größer oder gleich 4 annehmen kann. Wir können wieder die Stellen auf dem Rand ignorieren (weil dort $V = 0$ gilt) und also $x, y, z > 0$ annehmen. Es gilt $z = \frac{12-xy}{2(x+y)}$ und wegen $xy > 0$ dann $x + y = \frac{12-xy}{2z} < \frac{12}{2z} = \frac{6}{z}$. Mit $x > 0$ und $y > 0$ folgt weiter $x < \frac{6}{z}$ und $y < \frac{6}{z}$. Für $z > 9$ ergibt sich $V < \left(\frac{6}{z}\right)^2 z = \frac{36}{z} < 4$.

Jetzt nehmen wir an, dass $\max\{x, y\} > 18$. Dann gilt $z = \frac{12-xy}{2(x+y)} < \frac{12}{2\max\{x,y\}} < \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$, und aus $0 < z$ folgt $0 < 12 - xy$, also $xy < 12$. Damit ergibt sich $V = xyz < 12z < \frac{12}{3} = 4$.

Auf der kompakten Menge $\Big([0, 20] \times [0, 20] \times [0, 10]\Big) \cap \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12 \right\}$ nimmt die stetige Funktion V ein Maximum an. Dieses Maximum ist mindestens 4, weil ja V an der Stelle $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Wert 4 liefert (und an dieser Stelle die Nebenbedingung $A = 12$ erfüllt ist). Die Maximalstelle kann nicht auf dem Rand des Quaders $([0, 20] \times [0, 20] \times [0, 10])$ liegen (weil diese Randpunkte entweder $xyz = 0$ erfüllen oder außerhalb des vorhin betrachteten Quaders $[0, 18] \times [0, 18] \times [0, 9]$ liegen und wir schon wissen, dass V dort draußen nur Werte kleiner 4 annimmt). Also muss (nach 4.6.3) das Maximum an der einzigen kritischen Stelle liegen, die uns die Multiplikator-Bedingungen übrig gelassen haben: bei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das maximale Volumen ist also $4\,\mathrm{m}^3$.

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k+1}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(3+(-1)^k)^k}$

(a) **1. Variante:** Das Quotientenkriterium liefert

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^k+1}{2^{k+1}+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^k}}{2+\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Daher konvergiert die Reihe.

2.Variante: Wegen $\frac{1}{2^k+1} < \frac{1}{2^k}$ kann man die Reihe durch eine konvergente geometrische Reihe abschätzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k+1} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

Das Majorantenkriterium liefert dann die Konvergenz der ursprünglichen Reihe.

(b) Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \geqq \frac{1}{\sqrt{2k^2}} = \frac{1}{k\sqrt{2}}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, so divergiert auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{2}},$$

und damit nach dem Minorantenkriterium auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}.$$

(c) Für gerade k gilt:

$$a_k := \frac{2^{2k}}{(3+(-1)^k)^k} = \frac{4^k}{4^k} = 1.$$

Die Folge a_k ist also keine Nullfolge. Daher kann die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht konvergieren.

(Auch die Betrachtung der Summanden mit ungeraden Indizes liefert diese Erkenntnis: Für ungerade k gilt nämlich $a_k = \frac{2^{2k}}{(3+(-1)^k)^k} = \frac{4^k}{2^k} = 2^k$).

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Es sei eine Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E_2 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 5 = 0$$

(a) Bestimmen Sie die Ebenen E_1 und E_3 parallel zu E_2, welche von E_2 jeweils den Abstand 3 haben.

Wir betrachten eine Gerade g durch den Ursprung, welche E_1 im Punkt A schneidet, E_2 im Punkt B und E_3 im Punkt C. Dabei betragen die Abstände $|AB|$ und $|BC|$ jeweils 6.

(b) Machen Sie eine Skizze des geometrischen Sachverhalts.

(c) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die Gerade g die Ebenen E_1, E_2 und E_3 schneidet. Ermitteln Sie dabei den Winkel zur jeweiligen Normalen der Ebene.

(a) E_2 in Hesse-Normalform lautet

$$E_2\colon \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\vec{x} - \frac{5}{3} = 0.$$

Damit hat die Ebene E_2 vom Ursprung den Abstand $\frac{5}{3}$. Für E_1 und E_3 brauchen wir also Ebenen mit demselben Normalenvektor $\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ und den Aufpunkten $\frac{14}{3}\,\vec{n}$ und $-\frac{4}{3}\,\vec{n}$.

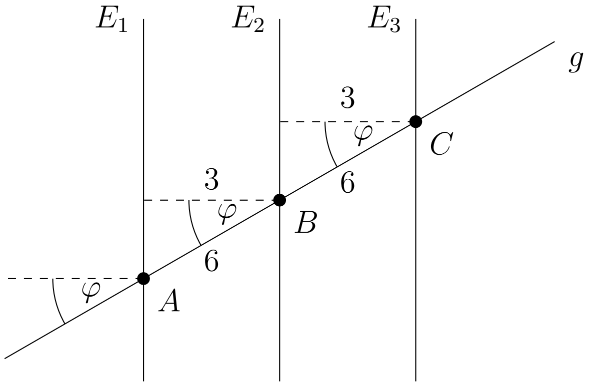
Die Gleichungen lauten daher

$$E_1\colon \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\vec{x} - \frac{14}{3} = 0 \qquad \text{und} \qquad E_3\colon \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\vec{x} + \frac{4}{3} = 0$$

$$\text{bzw.} \qquad E_3\colon \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\vec{x} - \frac{4}{3} = 0\,.$$

(Die zweite Gleichung ist die Hesse-Normalform für E_3.)

(b) Der geometrische Sachverhalt läßt sich am besten in einer Ebene beschreiben, welche die Gerade g enthält und senkrecht auf den Ebenen E_1, E_2 und E_3 steht. Dann ergibt sich folgendes Bild:



(c) Der Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene und der Geraden g läßt sich in der Ebene messen, die im Teil (b) gezeichnet wurde. Weil die Ebenen parallel sind, sind alle diese Winkel gleich. Insbesondere gilt:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Aufgabe 8 (*8 Punkte*)

Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? Berechnen Sie diese Lösung.

(c) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die Lösungsmenge.

(d) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System keine Lösungen?

(a) Durch Zeilenoperationen bekommt man die folgende vereinfachte Matrix $\tilde{A}$, die die gleiche Determinante besitzt wie A.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Also gilt:

$$\det A = \det \tilde{A} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) = 2 + \alpha\,.$$

(b) Ein LGS mit quadratischer Koeffizientenmatrix hat eine eindeutige Lösung genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet. Also besitzt das LGS eine eindeutige Lösung, falls

$$\det A \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 + \alpha \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \neq -2\,.$$

Um die Lösung in diesem Fall zu berechnen betrachtet man das augmentierte System

$$[A||b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

und vereinfacht es auf dieselbe Weise wie in **(a)** zu

$$[\tilde{A}||\tilde{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 2+\alpha & 2+\beta \end{array}\right).$$

Aus dieser Schreibweise kann man die Lösung dann ablesen und erhält

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2+\alpha} \begin{pmatrix} \beta-\alpha \\ \alpha-\beta \\ \beta-\alpha \\ 2+\beta \end{pmatrix} .$$

(c) Aus **(b)** weiß man, dass die Matrix nur für den Fall $\alpha = -2$ unendlich viele Lösungen haben kann. Betrachtet man die letzte Zeile von $[\tilde{A}||\tilde{b}]$, so erhält man für die Lösbarkeit auch noch die Bedingung $\beta = -2$.
Wir setzen nun $\alpha = \beta = -2$ in die augmentierte Matrix $[\tilde{A}||\tilde{b}]$ ein und erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösung kann man daraus ablesen, man erhält die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} .$$

(d) Aus **(c)** erhält man, dass für $\alpha = -2$ und $\beta \neq -2$ das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit aller Eigenwerte an.

Das charakteristische Polynom der Matrix A: $(1-\lambda)(1+\lambda)^2 \overset{!}{=} 0$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,$
Algebraische Vielfachheiten: $e_{\lambda_1} = 1,\ e_{\lambda_2} = 2.$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(\lambda_1) = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C} \right\}$$

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; V(\lambda_2) = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C} \right\}$$

Geometrische Vielfachheiten: $d_{\lambda_1} = d_{\lambda_2} = 1.$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung

$$z(2-\mathrm{i}) = 1+3\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$(1+\mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right) .$$

(a) Die Gleichung kann umgeformt werden zu

$$z = \frac{1+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(1+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{-1+7\mathrm{i}}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}\,.$$

(b) Zunächst ist $\arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$ und $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, also

$$1+\mathrm{i} \;=\; 2^{\frac{1}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) .$$

Es folgt

$$(1+\mathrm{i})^n \;=\; 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n \;=\; 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Alternative Lösung.
Zunächst ist $\arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$ und $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, also

$$1+\mathrm{i} \;=\; 2^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} .$$

Mit der Formel von Euler und de Moivre folgt

$$(1+\mathrm{i})^n \;=\; 2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi n}{4}} \;=\; 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Geben Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt an und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

	Entwicklungspunkt	Konvergenzradius
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n z^{2n}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}(z-3i)^n$	$3i$	$\frac{1}{3}$

Aufgabe 12 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = \boxed{0}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+\cos(x)}{x} = \boxed{1}$

(c) $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\frac{(-1)^n n}{2n^2+1} - 2\right) = \boxed{-2}$

Aufgabe 13 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x_1^2 - x_3^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3 + 1 = 0 \right\} .$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an.

$$x^\intercal \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} x + 1 = 0$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik.

$$(\sqrt{5} - 1)y_1^2 - (\sqrt{5} + 1)y_2^2 + 1 = 0$$

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik anhand der Normalform.

hyperbolischer Zylinder

Aufgabe 14 (*8 Punkte*) Wir betrachten für $\mathbb{R}^3$ die beiden Basen

$$\mathcal{E}_3\colon \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}\colon \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

und für $\mathbb{R}^2$ die Basen

$$\mathcal{B}_1\colon \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2\colon \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die Matrix

$$_{\mathcal{E}_3}f_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen

$$_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{E}_3} = \boxed{\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad _{\mathcal{B}_1}\mathrm{id}_{\mathcal{B}_2} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & 7\end{pmatrix}}$$

sowie die Abbildungsmatrix in neuen Basen

$$_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}_2} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -7\\ -1 & 5\\ 3 & 9\end{pmatrix}}.$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 15 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \colon \quad (x, y, z)^\intercal \mapsto \left(\alpha \frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \ln(xy)\right)^\intercal$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f_α:

$$\mathrm{J} f_\alpha \left((x, y, z)^\intercal\right) = \boxed{\begin{pmatrix} -\alpha \frac{z}{x^2} & 0 & \frac{\alpha}{x} \\ 0 & -\frac{z}{y^2} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix}} .$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld ein Potential: $\alpha = \boxed{1}$?