Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 5 – 8** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 17. 10. 2011 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **18. 10.** bis **21. 10. 2011** mit Jörg Hörner (Raum V 57.8.160) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*6 Punkte*)
Gegeben ist das reelle lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Für welche Werte des Parameters α ist das System eindeutig lösbar?

(b) Geben Sie den Rang der Matrix A_α in Abhängigkeit von α an.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems für $\alpha = -3$.

(d) Gibt es einen Parameterwert α, für den in einer Lösung des Gleichungssystems alle Variablen den gleichen Wert (d.h. $x_1 = x_2 = x_3$) annehmen?

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei die folgende Quadrik:

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 1 = 0$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{k!}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} + \frac{(-2)^k}{6^k} \right)$

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Gegeben seien die Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ sowie das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\alpha xy + 3\sin(y) + 5yz \\ \alpha x^2 + 3x\cos(y) + 5xz \\ \beta xy \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Parameter α, β besitzt f ein Potential?

(b) Berechnen Sie ein Potential von f für die Parameterwerte aus **(a)**.

(c) Sei nun $\beta = 5$ und folgende Parametrisierung der Kurve K gegeben.

$$C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1+t \\ t\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für die

$$\int_K f(s) \bullet ds = 1$$

gilt.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 5 (*5 Punkte*)

Gegeben ist die Menge $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ von vier Vektoren des $\mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren v_1 und v_2 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2$.

$\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

(b) Stellen Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren v_2 und v_3 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ so, dass $v_4 = \gamma v_2 + \delta v_3$.

$\gamma =$ $\qquad\qquad$ $\delta =$

(c) Geben Sie eine Basis $B \subseteqq M$ des von M erzeugten Vektorraums $W = \mathrm{L}(M)$ aus Vektoren von M an.

$B :$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Ableitungen in den jeweiligen Definitionsbereichen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x\, e^{2x} =$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \frac{x-3}{(x+1)^2} =$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x/2)\,, \quad x_0 = 0$

$$T_3(f, x, 0) = \boxed{}$$

(b) $g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(x^2)\,, \quad x_0 = 1$

$$T_3(g, x, 1) = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int (x+1)\big(5e^x - \sin(2x)\big)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int \cos(x)\,\big(\sin(x)^3 + 3\sin(x)^2 + 3\sin(x) + 1\big)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x-1}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{3x^2+2}{x^3+2x-1}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$
