Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Punkt $P = (2, -2, 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren f_1, f_2, f_3 paarweise orthogonal sind, aber kein Orthonormal-System bilden.

(b) Sei E die Ebene senkrecht zu f_1 durch den Punkt P. Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E an und bestimmen Sie den Abstand der Ebene vom Ursprung O.

(a) Test auf Orthogonalität:

$$\begin{aligned} \langle f_1 | f_2 \rangle &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0\,, \; \langle f_1 | f_3 \rangle = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0\,, \\ \langle f_2 | f_3 \rangle &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0\,. \end{aligned}$$

Nicht normiert:

$$|f_1|^2 = 1 + 1 + 4 = 6\,, \; |f_2|^2 = 1 + 1 + 0 = 2\,, \; |f_3|^2 = 1 + 1 + 1 = 3\,,$$

Es genügt natürlich nur bei einem Vektor festzustellen, dass er nicht normiert ist.

(b) $\langle f_1 | p \rangle = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 6 \Rightarrow$

Beschreibung der Ebene in Hessescher Normalform: (auf positive rechte Seite achten)

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{6}} f_1 \,\middle|\, x \right\rangle = \sqrt{6}$$

Abstand zum Ursprung: $\sqrt{6}$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Gegeben ist das reelle lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Für welche Werte des Parameters α ist das System eindeutig lösbar?

(b) Geben Sie den Rang der Matrix A_α in Abhängigkeit von α an.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems für $\alpha = -3$.

(d) Gibt es einen Parameterwert α, für den in einer Lösung des Gleichungssystems alle Variablen den gleichen Wert (d.h. $x_1 = x_2 = x_3$) annehmen?

Wir betrachten die erweiterte Matrix

$$[A_\alpha || b] = \left(\begin{array}{ccc||c} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & \alpha & 1 \end{array}\right)$$

Durch Zeilenumformungen vereinfacht man sie zu

$$[\tilde{A}_\alpha || \tilde{b}] = \left(\begin{array}{ccc||c} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 6 \end{array}\right).$$

(a) An der letzten Zeile von $[\tilde{A}_\alpha || \tilde{b}]$ erkennt man, dass das System für alle $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ eindeutig lösbar ist.

Alternativ: Das System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det A_\alpha = -2\alpha - 2 \neq 0$ ist, also für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

(b) Aus der obigen Darstellung von $[\tilde{A}_\alpha || \tilde{b}]$ folgt:

$$\mathrm{Rg}(A_\alpha) = 3 \quad \text{für} \quad \alpha \neq -1, \qquad \mathrm{Rg}(A_{(-1)}) = 2.$$

(c) Für $\alpha = -3$ erhalten wir mit den gleichen Umformungen wie oben das Gleichungssystem

$$[\tilde{A}_3 || \tilde{b}] = \left(\begin{array}{ccc||c} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right).$$

Mit Rückwärtseinsetzen erhält man jetzt die Lösung:

$$x = (11, 5, -3)^\intercal.$$

(d) Im Fall $x_1 = x_2 = x_3$ folgt aus der zweiten Zeile von $[\tilde{A}_\alpha || \tilde{b}]$, dass $2x = 2$ ist und somit

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

gilt. Aus der dritten Zeile sieht man dann, dass $\alpha = 5$ sein muss.

Einsetzen in die erste Zeile ergibt auch keinen Widerspruch; also ist $(1, 1, 1)^\intercal$ eine Lösung für $\alpha = 5$.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Gegeben sei die folgende Quadrik:

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 1 = 0$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik.

Um die euklidische Normalform der Quadrik zu bestimmen, muss man die Matrixbeschreibung der Quadrik aufstellen:

$$0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 1$$

Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(\lambda) = -9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$. Somit sind die Eigenwerte von A $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 0$.

Weil die Quadrikgleichung keinen linearen Teil hat, ergibt sich daraus direkt die euklidische Normalform der Quadrik:

$$-3y_1^2 - 3y_2^2 + 1 = 0$$

Die Quadrik ist ein elliptischer Zylinder (bzw. Kreiszylinder, da die Hauptachsen gleiche Länge haben).

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen.

$$\textbf{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n^2+2}\right) \qquad \textbf{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+n}{2^n}}$$

(a)

$$\begin{aligned} n-\sqrt{n^2+2} &= \frac{(n-\sqrt{n^2+2})(n+\sqrt{n^2+2})}{n+\sqrt{n^2+2}} = -\frac{2}{n+\sqrt{n^2+2}} \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^2+2} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{n+\sqrt{n^2+2}} \underbrace{=}_{\frac{-2}{\infty}} 0. \end{aligned}$$

(b) Aus $1 \leqq n^2+n \leqq 2n^2$ für $n \geqq 1$ folgt $\sqrt[n]{1} \leqq \sqrt[n]{n^2+n} \leqq \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n^2}$. Wegen $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $a\in\mathbb{R}^+$ und $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$ folgt weiter mit dem Sandwich-Theorem: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2+n}=1$ und damit schließlich

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+n}{2^n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2+n} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

(a) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k}{2^k}$ auf Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{k!}$.

(c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} + \frac{(-2)^k}{6^k} \right)$.

(a) Es ist

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{(k+1)^2 + (k+1)}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k^2+k} = \frac{1}{2} \frac{k^2+3k+2}{k^2+k}$$

woraus

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{1+3/k+2/k^2}{1+1/k}}_{\longrightarrow 1} = 1/2$$

folgt. Das Quotientenkriterium liefert die Konvergenz der Reihe.

Alternative:

Aus $1 \leqq k^2 + k \leqq 2k^2, k \geqq 1$ folgt $\sqrt[k]{1} \leqq \sqrt[k]{k^2+k} \leqq \sqrt[k]{2}\sqrt[k]{k^2}$. Wegen $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a} = 1$, $a \in \mathbb{R}^+$ und $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k} = 1$ folgt weiter mit dem Sandwich-Theorem: $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k^2+k} = 1$.
Wir überprüfen nun mit dem Wurzelkriterium, ob wir die Konvergenz entscheiden können:

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \sqrt[k]{\frac{k^2+k}{2^k}} = \frac{1}{2} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \underbrace{\sqrt[k]{k^2+k}}_{\to 1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Damit folgt die Konvergenz der Reihe.

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k!} - 1 = \exp(-4) - 1 = 1/e^4 - 1.$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k} + \frac{(-2)^k}{6^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k + \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

Es handelt sich um zwei absolut konvergente geometrische Reihen und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^k} + \frac{(-1)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-1/5} + \frac{1}{1+1/3} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2.$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^3 - y^2 - 2x\,.$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f. Welcher Typ liegt jeweils vor?

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f auf der Geraden $y = x - 1$.

(a) Mit dem Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2 \\ -2y \end{pmatrix}$$

folgt aus der notwendigen Bedingung $\operatorname{grad} f = 0$:

$$y = 0 \text{ und } x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Aus der Hesse-Matrix

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich an der Stelle $(\sqrt{6}/3, 0)$ ein Sattelpunkt und an der Stelle $(-\sqrt{6}/3, 0)$ ein Maximum.

(b) Die Gerade lässt sich durch

$$C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}$$

parametrisieren. Damit ist die auf Extrema zu untersuchende Funktion einer Veränderlichen

$$h(t) = f(C(t)) = t^3 - (t-1)^2 - 2t = t^3 - t^2 - 1$$

mit den Ableitungen

$$h'(t) = 3t^2 - 2t \qquad \text{und} \qquad h''(t) = 6t - 2\,.$$

Die notwendige Bedingung $h'(t) = 0$ führt auf

$$t_1 = 0 \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{2}{3}$$

mit $h''(t_1) = -2$ und $h''(t_2) = 2$.

Somit sind die lokalen Extrema:

An der Stelle $(0, -1)$ lokales Maximum mit Wert $f(0,-1) = -1$

An der Stelle $(2/3, -1/3)$ lokales Minimum mit Wert $f(2/3, -1/3) = -31/27$

Aufgabe 7 (*8 Punkte*) Gegeben seien die Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ sowie das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\alpha xy + 3\sin(y) + 5yz \\ \alpha x^2 + 3x\cos(y) + 5xz \\ \beta xy \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Parameter α, β besitzt f ein Potential?

(b) Berechnen Sie ein Potential von f für die Parameterwerte aus **(a)**.

(c) Sei nun $\beta = 5$ und folgende Parametrisierung der Kurve K gegeben.

$$C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 1+t \\ t\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für die

$$\int_K f(s) \bullet ds = 1$$

gilt.

(a) $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend, die hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials lautet somit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \beta x - 5x \\ 5y - \beta y \\ 2\alpha x + 3\cos(y) + 5z - 2\alpha x - 3\cos(y) - 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta-5)x \\ (5-\beta)y \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta = 5$.

(b) Wegen $\operatorname{grad}(U) = f$ gilt zunächst

$$U(x,y,z) = \int 2\alpha xy + 3\sin(y) + 5yz \,\mathrm{d}\,x = \alpha x^2 y + 3x\sin(y) + 5xyz + c_1(y,z).$$

Mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}U(x,y,z) = \alpha x^2 + 3x\cos(y) + 5xz + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}c_1(y,z) \overset{!}{=} \alpha x^2 + 3x\cos(y) + 5xz$$

folgt $c_1(y,z) = c_2(z)$ und schließlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z}U(x,y,z) = 5xy + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z}c_2(z) \overset{!}{=} 5xy \quad \Rightarrow \quad c_2(z) = c \in \mathbb{R}.$$

Ein Potential ist somit $U(x,y,z) = \alpha x^2 y + 3x\sin(y) + 5xyz$.

(c) Für $\beta = 5$ ist das Kurvenintegral wegunabhängig.

$$1 = \int_K f(s) \bullet ds = U(C(1)) - U(C(0)) = \alpha 4\pi + 6\sin(\pi) - 0 = \alpha 4\pi$$

Die Bedingung ist somit für $\alpha = \dfrac{1}{4\pi}$ erfüllt.

Alternative:

Kurvenintegral:

$$\begin{aligned}
\int_K f(s) \bullet ds &= \int_0^1 f(C(t)) \bullet C'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\alpha(1+t)t\pi + 3\sin(t\pi) \\ \alpha(1+t)^2 + 3(1+t)\cos(t\pi) \\ 5(1+t)t\pi \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 2\alpha(1+t)t\pi + 3\sin(t\pi) + \alpha\pi(1+t)^2 + 3\pi(1+t)\cos(t\pi)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^1 \alpha\pi + 4\alpha\pi t + 3\alpha\pi t^2 + 3\sin(t\pi) + 3\pi(1+t)\cos(t\pi)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[\alpha\pi t + 2\alpha\pi t^2 + \alpha\pi t^3 - \frac{3}{\pi}\cos(t\pi) + 3(1+t)\sin(t\pi)\right]_0^1 - 3\int_0^1 \sin(t\pi)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[\alpha\pi t + 2\alpha\pi t^2 + \alpha\pi t^3 - \frac{3}{\pi}\cos(t\pi) + 3(1+t)\sin(t\pi)\right]_0^1 + \frac{3}{\pi}\left[\cos(t\pi)\right]_0^1 \\
&= \left[\alpha\pi t + 2\alpha\pi t^2 + \alpha\pi t^3 + 3(1+t)\sin(t\pi)\right]_0^1 \\
&= [\alpha\pi + 2\alpha\pi + \alpha\pi] \\
&= 4\alpha\pi
\end{aligned}$$

Die Bedingung ist somit für $\alpha = \dfrac{1}{4\pi}$ erfüllt.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 8 (*5 Punkte*)

Gegeben ist die Menge $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ von vier Vektoren des $\mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren v_1 und v_2 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2$.

$\alpha =$ $\boxed{4}$ $\quad \beta =$ $\boxed{3}$

(b) Stellen Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren v_2 und v_3 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ so, dass $v_4 = \gamma v_2 + \delta v_3$.

$\gamma =$ $\boxed{5}$ $\quad \delta =$ $\boxed{2}$

(c) Geben Sie eine Basis $B \subseteq M$ des von M erzeugten Vektorraums $W = \mathrm{L}(M)$ aus Vektoren von M an.

B : $\{v_1, v_2\}$ oder beliebige andere zwei

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a+b\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie die Determinante von A in Abhängigkeit von a und b an.

$$\det A = \boxed{a + b\mathrm{i}}$$

(b) Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ haben alle Eigenwerte die algebraische Vielfachheit 1?

$$\boxed{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0, 1), (0, -1)\}}$$

(c) Für welche Werte von a und b ist der Vektor $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor?

$$(a, b) = \boxed{(0, 2)}$$

Aufgabe 10 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Ableitungen in den jeweiligen Definitionsbereichen.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x\,e^{2x} =$	$(2x+1)e^{2x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \frac{x-3}{(x+1)^2} =$	$\frac{-x+7}{(x+1)^3}$

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x/2)\,, \quad x_0 = 0$

$$T_3(f, x, 0) = \boxed{1 - \frac{1}{8}x^2\,.}$$

(b) $g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(x^2)\,, \quad x_0 = 1$

$$T_3(g, x, 1) = \boxed{2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3}$$

Aufgabe 12 (*6 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$\int (x+1)\big(5e^x - \sin(2x)\big)\,\mathrm{d}\,x =$	$\left[5xe^x + \frac{1}{2}(x+1)\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]$
$\int \cos(x)\,\big(\sin(x)^3 + 3\sin(x)^2 + 3\sin(x) + 1\big)\,\mathrm{d}\,x =$	$\left[\frac{1}{4}(\sin(x)+1)^4\right]$
$\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x-1}\,\mathrm{d}\,x =$	$\left[\ln\lvert x^3+2x-1\rvert\right]$
$\int_{-2}^{-1} \frac{3x^2+2}{x^3+2x-1}\,\mathrm{d}\,x =$	$\ln\left(\frac{4}{13}\right)$