Aufgabe 1 (*7 Punkte*) Gegeben seien folgende Potenzreihen:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n,$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{3}\right)^n (x+1)^n .$$

(a) Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius und den Entwicklungspunkt.

(b) Entscheiden Sie nun für jedes $x \in \mathbb{R}$, ob die obigen Reihen jeweils konvergieren oder divergieren.

(a) Für die Reihe f ist der Entwicklungspunkt gleich 0, für die Reihe g gleich -1.
Konvergenzradius für die Reihe f: Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^{n+1} n}{(n+1)(-2)^n} \right| = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 2,$$

und damit $\rho = \frac{1}{2}$. (Die Berechnung über $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n}\right|}$ ist ebenso möglich.)
Konvergenzradius für die Reihe g: Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{1+(-1)^n}{3}\right)^n \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{3}$$

existiert nicht. Die Teilfolge $\frac{1+(-1)^{2n}}{3}$ strebt gegen $\frac{2}{3}$, die Teilfolge $\frac{1+(-1)^{2n+1}}{3}$ strebt gegen 0. Es existiert daher der Limes superior

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{1+(-1)^n}{3}\right)^n \right|} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{3} = \frac{2}{3},$$

und damit ist $\rho = \frac{3}{2}$.

(b) Eine Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ mit Konvergenzradius ρ und Entwicklungspunkt x_0 konvergiert absolut, wenn $|x-x_0| < \rho$. Sie divergiert, falls $|x-x_0| > \rho$. Der Fall $|x-x_0| = \rho$ muss für jedes solche x gesondert untersucht werden. Hier bedeutet das konkret:
Für die Reihe f:

- (absolute) Konvergenz für $|x| < \frac{1}{2}$, Divergenz für $|x| > \frac{1}{2}$.
- Auf dem Rand (und $x \in \mathbb{R}$):
  $x = \frac{1}{2}$: Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert (aber nicht absolut),
  $x = -\frac{1}{2}$: Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Für die Reihe g:

- (absolute) Konvergenz für $|x+1| < \frac{3}{2}$, Divergenz für $|x+1| > \frac{3}{2}$.

- Auf dem Rand (und $x \in \mathbb{R}$):
  $x = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{3}\right)^n \left(\frac{1}{2}+1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)^n.$$
  Die Folge
  $$\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$
  ist keine Nullfolge, folglich divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)^n$.
  $x = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{3}\right)^n \left(-\frac{5}{2}+1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)^n.$$
  Die Folge
  $$(-1)^n \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$
  ist keine Nullfolge, folglich divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)^n$.

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Geben Sie eine reelle Matrix an, die den Eigenvektor $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ zum Eigenwert 3 und den Eigenvektor $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ zum Eigenwert -2 hat.

Alternative 1: Sei $A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ eine reelle Matrix. Dass $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 3 ist, heißt

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Ebenso bedeutet, dass $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -2 ist, dass

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a + b &= 3\\ c + d &= 3\\ 2a + b &= -4\\ 2c + d &= -2 \end{aligned}$$

Das Lösen dieses Gleichungssystems liefert $A = \begin{pmatrix}-7 & 10\\-5 & 8\end{pmatrix}$.

Alternative 2: Zu der gesuchten Matrix A betrachten wir die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(v) = Av$. Sei $B : b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ die Basis, die aus den gegebenen Eigenvektoren besteht.

Dass diese aus Eigenvektoren besteht, bedeutet, dass ${}_B\alpha_B = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$.

Sei E die Standardbasis. Dann ist ${}_E\alpha_E = {}_E\operatorname{id}_B \cdot {}_B\alpha_B \cdot {}_B\operatorname{id}_E$ und ${}_E\operatorname{id}_B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$.

Die Inverse zu ${}_E\operatorname{id}_B$ ist ${}_B\operatorname{id}_E$, also ${}_B\operatorname{id}_E = \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}$.

Demnach ergibt sich ${}_E\alpha_E = \begin{pmatrix}-7 & 10\\-5 & 8\end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Der Graph der Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \cosh(x) - 1$$

ist parametrisiert durch

$$C : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, \cosh(t) - 1)^\intercal .$$

Berechnen Sie die Länge des Graphen von f.

Die Länge des Graphen $\Gamma(f)$ von f ergibt sich zu

$$\begin{aligned} L(\Gamma(f)) &= \int_{\Gamma(f)} 1 \,\mathrm{d}\, s \\ &= \int_{-1}^{1} |C'(t)| \,\mathrm{d}\, t \\ &= \int_{-1}^{1} |(1, \sinh(t))^\intercal| \,\mathrm{d}\, t \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1^2 + \sinh(t)^2} \,\mathrm{d}\, t \\ &= \int_{-1}^{1} \cosh(t) \,\mathrm{d}\, t \\ &= [\sinh(t)]_{-1}^{1} \\ &= \sinh(1) - \sinh(-1) \\ &= \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} . \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+(\ln(x))^2)}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x+6}{x^2+3x}\,\mathrm{d}\,x$

(a) Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} v' &:= x^2, &\quad \text{also} \quad v &= \tfrac{1}{3}x^3, \text{ und} \\ u &:= \ln(x), &\quad \text{also} \quad u' &= \tfrac{1}{x}\,, \end{aligned}$$

bekommen wir durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int uv'\,\mathrm{d}\,x \\ &= [uv] - \int u'v\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right] - \int \frac{1}{3}x^2\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3\right] = \left[\frac{1}{9}x^3(3\ln(x)-1)\right] \end{aligned}$$

(b) Mit der Substitution $u = \ln(x)$ folgt $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{x}$ und also

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+(\ln(x))^2)}\,\mathrm{d}\,x &= \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u \\ &= [\arctan(u)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(c) Die Polynomdivision liefert

$$\frac{2x^2+7x+6}{x^2+3x} = 2 + \frac{x+6}{x^2+3x}.$$

Mit Partialbruchzerlegung erhält man

$$\frac{x+6}{x^2+3x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+3}\,.$$

Somit gilt

$$\int \frac{2x^2+7x+6}{x^2+3x}\,\mathrm{d}\,x = \int 2\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}\,x - \int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}\,x = \Big[2x + 2\ln|x| - \ln|3+x|\Big]\,.$$

Aufgabe 5 (*9 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 21x_1^2 + 8\sqrt{3}x_1x_2 + 13x_2^2 = 225\}\,.$$

Bestimmen Sie euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik. Skizzieren Sie die Quadrik im Ausgangskoordinatensystem.

Die Gleichung in Matrixschreibweise $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 225 = 0.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \lambda^2 - 34\lambda + 225$.

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = 9$.

Der Eigenraum zu λ_1 ist der Lösungsraum $V(\lambda_1)$ des LGS

$$\left[\begin{array}{cc||c} -4 & 4\sqrt{3} & 0 \\ 4\sqrt{3} & -12 & 0 \end{array}\right].$$

Dieser Lösungsraum wird aufgespannt durch den normierten Eigenvektor $v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Einen Eigenvektor v_2 zu λ_2 kann man analog durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_2 E_2)x = 0$ bestimmen. (Alternativ kann man verwenden, dass A symmetrisch ist: Somit sind die Eigenräume zu λ_1 und λ_2 orthogonal.) Man erhält als normierten Eigenvektor $v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(Die Eigenvektoren brauchen wir wegen $a = 0$ nicht für die Transformation, aber später zum Zeichnen.)

Die transformierte Gleichung lautet

$$25y_1^2 + 9y_2^2 - 225 = 0.$$

Um die euklidische Normalform zu bestimmen, normiert man noch die Konstante:

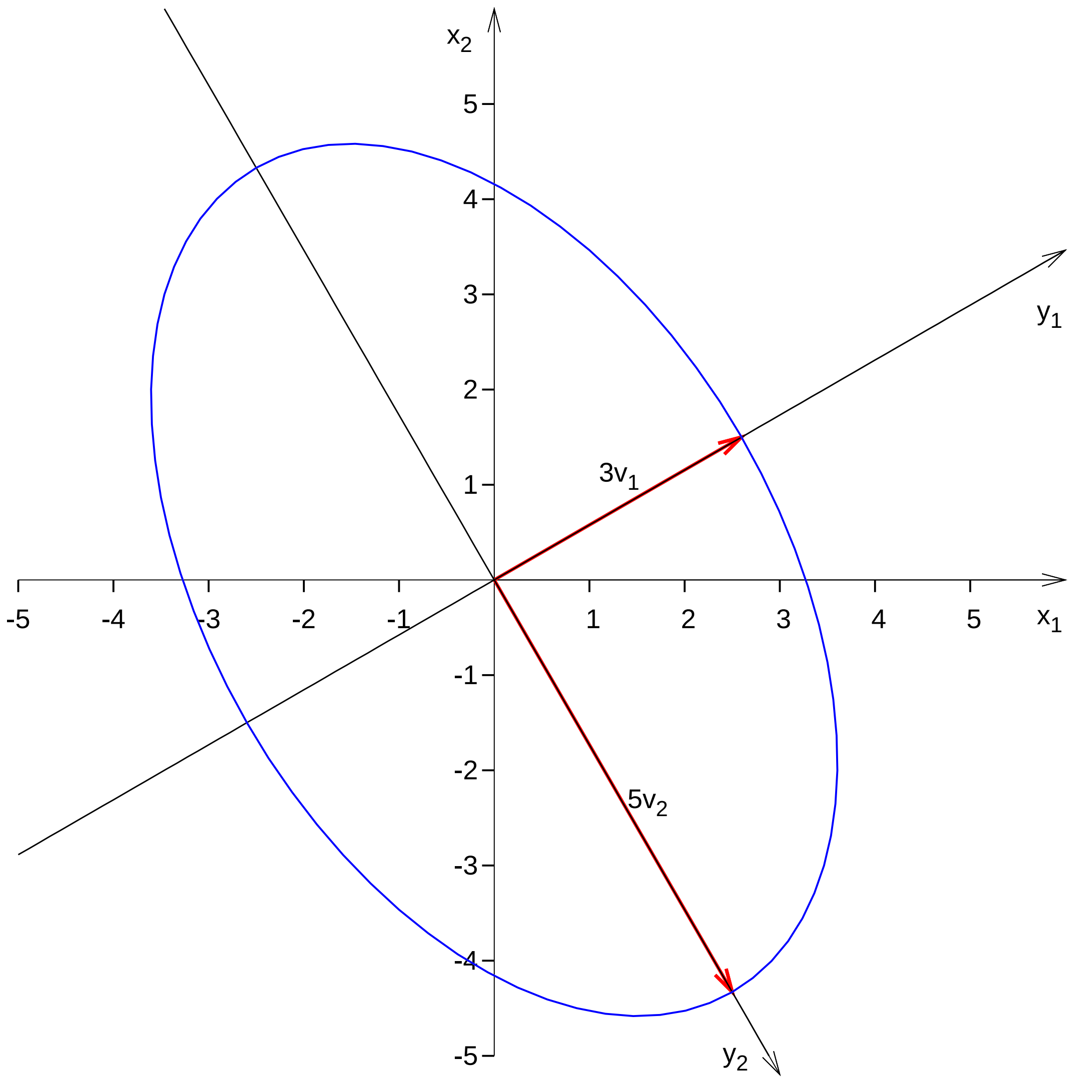
$$-\frac{1}{9}y_1^2 - \frac{1}{25}y_2^2 + 1 = 0\,.$$

Die Gleichung beschreibt eine Ellipse mit den Hauptachsenlängen 3 und 5.

Da keine quadratische Ergänzung bei der Bestimmung der euklidischen Normalform nötig war, wurde die Quadrik beim Transformieren nicht verschoben.

Die Achsen des neuen Koordinatensystem (also $\mathbb{R}v_1$ bzw. $\mathbb{R}v_2$) sind die Symmetrieachsen der Ellipse.

Dies liefert folgende Zeichnung der Quadrik:


x2
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x1
y1
y2
3v1
5v2

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Sei

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \tfrac{1}{9} - x^2\,.$$

Die Funktion f besitzt im Intervall $[0,1]$ genau eine Nullstelle. Benutzen Sie die Intervallhalbierungsmethode, ausgehend von $[a_1, b_1] := [0,1]$, um diese Nullstelle mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 0{,}25$ zu approximieren.

Starte mit

$$[a_1, b_1] = [0,1]\,.$$

Es gilt

$$f(a_1) = \frac{1}{9} > 0, \qquad f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{36} < 0,$$

also

$$f(a_1) \cdot f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0.$$

Setze demnach

$$[a_2, b_2] := \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Weiter mit dem zweiten Schritt:

$$f(a_2) = \frac{1}{9} > 0, \qquad f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144} > 0,$$

also

$$f(a_2) \cdot f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) > 0.$$

Setze

$$[a_3, b_3] := \left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right].$$

Die Nullstelle liegt im Intervall $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Weil dieses die Länge $\frac{1}{4} \leqq \varepsilon$ hat, ist die geforderte Genauigkeit erreicht.

Aufgabe 7 (*11 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + (y-1)^2$$

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 2x^2 + \frac{y^2}{2} - 1$$

Es ist $f(x,y)$ das Quadrat des Abstands des Punktes $P := (0,1)$ vom Punkt (x,y).

Die Menge $E := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0 \,\}$ ist eine Ellipse.

Bestimmen Sie die absoluten Minimalstellen und die absoluten Maximalstellen von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes P von einem Punkt der Ellipse E.

Erste Variante: Multiplikatormethode nach Lagrange

Die Multiplikatormethode nach Lagrange liefert kritische Stellen, an denen Extrema vorliegen könnten. Das Kriterium lautet: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} g(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-1) \end{pmatrix} \\ \operatorname{grad} g(x,y) &= \begin{pmatrix} 4x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bedeutet das also

$$\begin{aligned} 2x + 4\lambda x &= 0 && (1) \\ 2(y-1) + \lambda y &= 0 && (2) \\ 2x^2 + \frac{y^2}{2} - 1 &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Aus (1) erhält man $2x(1+2\lambda) = 0$. Dies ist für $x = 0$ oder für $\lambda = -\frac{1}{2}$ erfüllt.

Fall 1 $(x = 0)$

Aus (3) erhält man $y^2 = 2$. Daraus folgt, dass $y = \pm\sqrt{2}$.
Die Punkte $P_1 = (0, \sqrt{2})$ und $P_2 = (0, -\sqrt{2})$ sind kritische Stellen der Funktion $f(x,y)$ auf der Ellipse $g(x,y) = 0$.

Fall 2 $(x \neq 0)$

In diesem Fall muss $\lambda = -\frac{1}{2}$ gelten.

Aus (2) folgt dann

$$\frac{3}{2}y = 2,$$

und damit auch

$$y = \frac{4}{3}\,.$$

Dies in (3) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 1 - \frac{y^2}{2} \\ &= 1 - \frac{16}{18} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{18}} = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Die Punkte $P_3 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3}\right)$ und $P_4 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3}\right)$ sind weitere kritische Stellen der Funktion $f(x,y)$ auf der Ellipse $g(x,y) = 0$.

Auffinden der absoluten Extrema unter den kritischen Stellen

Die Auswertung der Funktion $f(x,y)$ an den kritischen Stellen ergibt

$$\begin{aligned} f(P_1) &= (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \\ f(P_2) &= (\sqrt{2}+1)^2 = 3 + 2\sqrt{2} \\ f(P_3) &= \frac{1}{6} \\ f(P_4) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Wir sortieren nun diese Funktionswerte der Größe nach. Wir vergleichen als erstes $f(P_1)$ mit $f(P_3) = f(P_4)$. Dazu betrachten wir das Vorzeichen der Differenz

$$f(P_1) - f(P_3) = 3 - 2\sqrt{2} - \frac{1}{6} = \frac{17}{6} - 2\sqrt{2}\,,$$

untersuchen also, ob $\frac{17}{6} > 2\sqrt{2}$ oder $\frac{17}{6} < 2\sqrt{2}$ gilt. Wegen der Monotonie des Quadrierens ist die erste dieser Ungleichungen äquivalent zu

$$\frac{17^2}{6^2} = \frac{289}{36} > \frac{288}{36} = 8 = (2\sqrt{2})^2\,.$$

Dies ist korrekt, also gilt $f(P_1) > f(P_3) = f(P_4)$.

Wegen $f(P_1) = 3 - 2\sqrt{2} < 3 < 3 + 2\sqrt{2} = f(P_2)$ erhalten wir insgesamt

$$f(P_2) > f(P_1) > f(P_3) = f(P_4)\,.$$

Wegen der Kompaktheit der Ellipse besitzt die Funktion f auf der Ellipse sowohl ein absolutes Minimum als auch ein absolutes Maximum. Diese werden an kritischen Stellen angenommen.

Die absoluten Minimalstellen von f auf der Ellipse E sind also $P_3 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\, \frac{4}{3}\right)$ und $P_4 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}},\, \frac{4}{3}\right)$; der minimale Funktionswert beträgt $\frac{1}{6}$.
Die absolute Maximalstelle von f auf der Ellipse E ist $P_2 = (0,\, -\sqrt{2})$; der Funktionswert dort beträgt $3 + 2\sqrt{2}$.

Der minimale Abstand des Punktes P von einem Punkt der Ellipse E beträgt somit $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Zweite Variante: Parametrisierung der Ellipse mit trigonometrischen Funktionen

Wir parametrisieren die Ellipse durch $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon \varphi \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\varphi), \sqrt{2}\sin(\varphi)\right)$.
Es sind also die absoluten Maximal- und Minimalstellen von $h\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}\colon \varphi \mapsto f(C(\varphi))$ zu finden. Es gilt

$$h(\varphi) = 1 + \tfrac{1}{2}(\cos(\varphi))^2 + 2(\sin(\varphi))^2 - 2\sqrt{2}\,\sin(\varphi)\,.$$

Die erste Ableitung ist

$$h'(\varphi) = \cos(\varphi)(-2\sqrt{2} + 3\sin(\varphi))\,,$$

diese verschwindet im Intervall $[0, 2\pi]$ genau dann, wenn einer ihrer Faktoren Null wird:

(a) Für $\cos(\varphi) = 0$, das heißt für $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ und für $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$.
Die Auswertung der Funktion $h(\varphi)$ an diesen Stellen ergibt $h(\varphi_1) = 3 - 2\sqrt{2} < 3 + 2\sqrt{2} = h(\varphi_2)$.

(b) Für $\sin(\varphi) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, das heißt für $\varphi_3 = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ und für $\varphi_4 = \pi - \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.
Die Auswertung der Funktion $h(\varphi) = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - (\sin(\varphi))^2\right) + 2(\sin(\varphi))^2 - 2\sqrt{2}\,\sin(\varphi)$ an diesen Stellen ergibt $h(\varphi_3) = h(\varphi_4) = \frac{1}{6}$.

An den Rändern des Parameter-Intervalls könnten auch noch Extrema vorliegen. Hier ergeben sich aber die Funktionswerte $h(0) = \frac{3}{2} = h(2\pi)$. Es gilt $\frac{1}{6} < \frac{3}{2} < 3 + 2\sqrt{2}$, die Ränder kommen also für Extrema hier nicht in Frage.

Es bleibt noch zu entscheiden, welcher der beiden Werte $h(\varphi_3) = h(\varphi_4) = \frac{1}{6}$ und $h(\varphi_1) = 3 - 2\sqrt{2}$ der größere ist. Dazu betrachten wir das Vorzeichen der Differenz $3 - 2\sqrt{2} - \frac{1}{6} = \frac{17}{6} - 2\sqrt{2}$, untersuchen also, ob $\frac{17}{6} > 2\sqrt{2}$ oder $\frac{17}{6} < 2\sqrt{2}$ gilt. Wegen der Monotonie des Quadrierens ist die erste dieser Ungleichungen äquivalent zu $\frac{17^2}{6^2} = \frac{289}{36} > \frac{288}{36} = 8 = (2\sqrt{2})^2$. Dies ist korrekt, also gilt $h(\varphi_3) = h(\varphi_4) = \frac{1}{6} < 3 - 2\sqrt{2} = h(\varphi_1)$.

Wegen der Kompaktheit des Parameter-Intervalls nimmt die Funktion h sowohl ein absolutes Minimum als auch ein absolutes Maximum an. Diese werden an kritischen Stellen angenommen: das Minimum bei φ_3 und φ_4, das Maximum bei φ_2. Die Funktion f nimmt ihr absolutes Minimum $\frac{1}{6}$ auf der Ellipse an den Stellen $C(\varphi_3) = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3}\right)$ und $C(\varphi_4) = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3}\right)$ an, ihr absolutes Maximum $3 + 2\sqrt{2}$ an der Stelle $C(\varphi_2) = (0, -\sqrt{2})$.

Der minimale Abstand des Punktes P von einem Punkt der Ellipse E beträgt somit $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Dritte Variante: Parametrisierung der Ellipse durch Wurzelterme

Wir lösen die Gleichung $g(x,y) = 0$ nach x auf, erhalten $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2-y^2}$ und parametrisieren die Ellipse (in zwei Teilen) durch

$$C_+\colon [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2\colon y \mapsto C_+(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2-y^2} \\ y \end{pmatrix}$$
$$C_-\colon [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2\colon y \mapsto C_-(y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2-y^2} \\ y \end{pmatrix}$$

Durch die Parametrisierung wird das Extremwertproblem transformiert in das folgende Problem: Bestimme die absoluten Minimalstellen und die absoluten Maximalstellen der beiden Funktionen

$$h_+\colon [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \to \mathbb{R}\colon y \mapsto f(C_+(y)) = \tfrac{3}{4}y^2 - 2y + \tfrac{3}{2} \quad \text{und}$$
$$h_-\colon [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \to \mathbb{R}\colon y \mapsto f(C_-(y)) = \tfrac{3}{4}y^2 - 2y + \tfrac{3}{2}\,.$$

Die gesuchten absoluten Minimalstellen und Maximalstellen treten entweder an Nullstellen dieser Ableitungen oder am Rand des Intervalls $\left[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right]$ auf.
Es ist $h_+'(y) = \frac{3}{2}y - 2$, und es gilt $h_+'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow h_-'(y) = 0$.

Kandidaten für die absoluten Extremalstellen auf der Ellipse sind damit die Stellen $C_+(\frac{4}{3}) = (\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3})$, $C_-(\frac{4}{3}) = (-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3})$ sowie die Stellen $C_+(-\sqrt{2}) = C_-(-\sqrt{2}) = (0,-\sqrt{2})$ und $C_+(\sqrt{2}) = C_-(\sqrt{2}) = (0,\sqrt{2})$, die von den Rändern des Parameter-Intervalls herrühren.

Die Auffinden der absoluten Extrema unter den kritischen Stellen und die Bestimmung des minimalen Abstands erfolgt nun genauso wie in der ersten Variante.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Ebene $E = \{(x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid y = 1\}$ und die Punkte $A = (1,0,3)^\intercal$ und $B = (3,2,3)^\intercal$.

(a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g durch A und B mit der Ebene E.

$S = \boxed{(2,1,3)^\intercal}$

(b) Geben Sie einen Normalenvektor n von E an.

$n = \boxed{(0,1,0)^\intercal}$

(c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen g und n.

$\alpha = \boxed{\frac{\pi}{4}}$ (oder $\frac{3\pi}{4}$, je nach Wahl des Richtungsvektors für g)

(d) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene F, welche durch A, B und den Ursprung geht.

$\boxed{\frac{-3x+3y+z}{\sqrt{19}} = 0}$

(e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von A, B und dem Ursprung aufgespannten Dreiecks.

$\boxed{\sqrt{19}}$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + xy + 2y.$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(f,(x,y),(1,1))$.

$T_1(f,(x,y),(1,1)) = \boxed{4 + 3(x-1) + 3(y-1).}$

(b) Entwickeln Sie f nach Potenzen von $(x-1)$ und $(y-1)$, d.h. schreiben Sie f in der Form

$$f(x,y) = a + b_0(x-1) + b_1(y-1) + \sum_{j=0}^{2} c_j (x-1)^j (y-1)^{2-j}, \qquad \text{mit } a, b_0, b_1, c_j \in \mathbb{R}.$$

$a = \boxed{4}$, $b_0 = \boxed{3}$, $b_1 = \boxed{3}$, $c_0 = \boxed{0}$, $c_1 = \boxed{1}$, $c_2 = \boxed{1}$.

Aufgabe 10 (*5 Punkte*) Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \alpha(x) = Ax$.

(a) Bestimmen Sie den Kern von α.

$$\operatorname{Kern}(\alpha) = \boxed{\mathrm{L}\left((1,-2,1)^\intercal\right)}$$

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 2\lambda^2}$$

(c) Welche Eigenwerte hat A?

$$\boxed{\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2}$$

(d) Geben Sie zu jedem Eigenwert seine algebraische und seine geometrische Vielfachheit an.

Eigenwert	algebraische Vielfachheit	geometrische Vielfachheit
λ_1	2	1
λ_2	1	1