Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} \mapsto s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei E_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und sei E_3 die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Sei

$$B\colon \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$ und sei

$$C\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrizen ${}_{E_2}f_{E_3}$, ${}_{E_2}f_C$, und ${}_Bf_C$.

Es ist

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich die Matrix von f bezüglich der Standardbasen E_3 von $\mathbb{R}^3$ und E_2 von $\mathbb{R}^2$ als

$${}_{E_2}f_{E_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$${}_{E_3}\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit berechnet sich ${}_{E_2}f_C$ als

$${}_{E_2}f_C = {}_{E_2}f_{E_3} \cdot {}_{E_3}\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin ist ${}_{E_2}\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, und damit

$${}_B\mathrm{id}_{E_2} = ({}_{E_2}\mathrm{id}_B)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt

$$ {}_B f_C = {}_B\mathrm{id}_{E_2} \cdot {}_{E_2} f_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. $$

Alternativ:

Es ist

$$ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

Hieraus ergibt sich die Matrix von f bezüglich der Basis C von $\mathbb{R}^3$ und der Standardbasis E_2 von $\mathbb{R}^2$ als

$$ {}_{E_2} f_C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}. $$

Weiterhin ist

$$ \begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned} $$

Hieraus ergibt sich die Matrix von f bezüglich der Basis C von $\mathbb{R}^3$ und der Basis B von $\mathbb{R}^2$ als

$$ {}_B f_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. $$

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x + \sqrt[4]{1+x^4}}{x + \sqrt{1+x^2}}$

(a) Zweimalige Anwendung der Regel von l'Hospital liefert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x - \sin x} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x + \sin x}{\sin x}$$

An dieser Stelle kann man nun entweder nochmal die Regel von l'Hospital anwenden, und erhält

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x + \sin x}{\sin x} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x + \cos x}{\cos x} = 2,$$

oder man nutzt alternativ einen aus der Vorlesung bekannten Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x + \sin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cos x + 1 \right) = 2.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{3x + \sqrt[4]{1+x^4}}{x + \sqrt{1+x^2}} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x(3 + \sqrt[4]{x^{-4}+1})}{x(1 + \sqrt{x^{-2}+1})} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{3 + \sqrt[4]{x^{-4}+1}}{1 + \sqrt{x^{-2}+1}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^4 + x^2 y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben ist, nicht stetig ist.

---

1. Möglichkeit: Wäre f stetig in $(0,0)$, dann würde jede gegen $(0,0)$ konvergente Folge in $\mathbb{R}^2$ eine gegen $f(0,0)$ konvergente Folge von Funktionswerten besitzen.

Nun ist zwar

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = (0,0) \ ,$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-4}}{3n^{-4}} = \frac{1}{3} \neq 0 = f(0,0) \ .$$

Also ist f nicht stetig in $(0,0)$. Somit ist f nicht stetig.

2. Möglichkeit: Die Funktion f ist nicht stetig in $(0,0)$, da sich

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-4}}{3n^{-4}} = \frac{1}{3}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{n^{-4}} = 0$$

ergeben und nicht beide Grenzwerte als Funktionswert von f bei $(0,0)$ auftreten können.

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto 1 + 6xy - x^3 - 8y^3$$

(a) alle kritischen Stellen,

(b) Lage, Art und Wert der lokalen Extrema.

(a) Der Gradient von f ist:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6y - 3x^2 \\ 6x - 24y^2 \end{pmatrix}$$

Kritische Stellen sind Nullstellen des Gradienten. Dies ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2y - x^2 &= 0 \\ x - 4y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt $x = 4y^2 = (2y)^2 = (x^2)^2 = x^4$ und also $x = 0$ oder $x = 1$. Zu $x = 0$ gehört $y = \frac{1}{2}x^2 = 0$. Zu $x = 1$ gehört $y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}$.

Einsetzen ergibt in der Tat, dass $(0,0)$ und $(1, \frac{1}{2})$ das Gleichungssystem lösen. Dies sind also die beiden kritischen Stellen.

(b) Die Hesse-Matrix von f ist:

$$\mathrm{H}f\,(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -48y \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrix wird an der kritischen Stelle $(1, 1/2)$ ausgewertet:

$$\mathrm{H}f\,(1,1/2) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -24 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det \mathrm{H}f\,(1,1/2) = 108 > 0$ und $f_{xx}(1,1/2) = -6 < 0$. Es liegt also bei $(1,1/2)$ ein lokales Maximum vor.

Alternativ: Die beiden Eigenwerte dieser Matrix, $\lambda_{1/2} = -15 \pm 3\sqrt{13}$ sind beide negativ, also ist die Matrix negativ definit. Es liegt also bei $(1,1/2)$ ein lokales Maximum vor.

Die Hesse-Matrix wird an der kritischen Stelle $(0,0)$ ausgewertet:

$$\mathrm{H}f\,(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $\det \mathrm{H}f\,(0,0) = -36 < 0$. Es liegt also ein Sattelpunkt vor.

Alternativ: Die beiden Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm 6$ haben verschiedenes Vorzeichen. Es liegt also bei $(0,0)$ ein Sattelpunkt vor.

Bei der einzigen lokalen Extremstelle ist noch der Wert der Funktion anzugeben. Dieser ergibt sich zu $f(1,1/2) = 2$.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

Gegeben ist die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2 - 2\mathrm{i}z - 1}{9} \right)^n .$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius. Skizzieren Sie den Konvergenzkreis.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe für $z = 2\mathrm{i}$.

(c) Geben Sie an, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe konvergiert und für welche $z \in \mathbb{C}$ sie divergiert.

(a) Es ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2 - 2\mathrm{i}z - 1}{9} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\mathrm{i}}{3} \right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-2n} (z-\mathrm{i})^{2n}$$

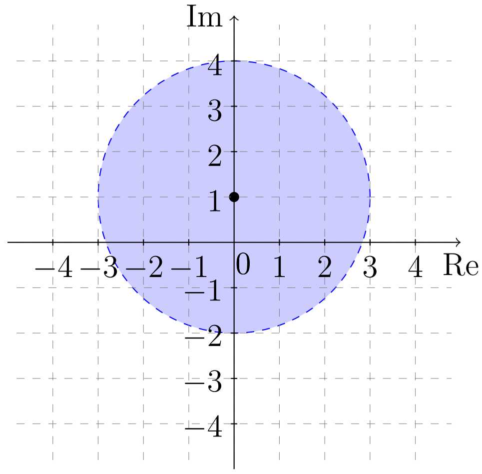
und somit ist der Entwicklungspunkt $z_0 = \mathrm{i}$ und $a_k = \begin{cases} 3^{-k} & \text{falls } k = 2n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Das Wurzelkriterium liefert mit

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{(1/3)^{2n}} = 1/3$$

den Konvergenzradius 3 .

Skizze: (der Rand des Kreises gehört nicht zum Konvergenzkreis)



(b) Es ist

$$f(2\mathrm{i}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{3} \right)^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{9} \right)^k = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{9})} = \frac{9}{10} .$$

(c) Die Potenzreihe konvergiert für alle z im Konvergenzkreis und divergiert außerhalb. Für ein w auf dem Rand ist $|w - \mathrm{i}| = 3$ und die Reihenglieder haben alle Betrag $|w - \mathrm{i}|^2/9 = 1$. Sie bilden also keine Nullfolge. Die Reihe ist also für keinen Randpunkt konvergent.

Somit ist die Reihe für $\{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| < 3\}$ konvergent und für $\{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| \geqq 3\}$ divergent.

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben ist die skalare Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x_2\,(\cos(x_1))^2 - \exp(x_2)$$

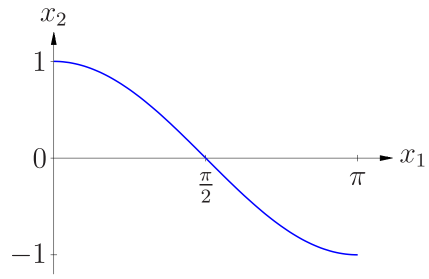
und die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,\pi]\,.$$

Skizzieren Sie K. Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto (\operatorname{grad} f)(x)$ das Gradientenfeld von f. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x\,.$$

Es ist K der Graph der Cosinus-Funktion auf $[0,\pi]$. Skizze:



Als Gradientenfeld hat g das Potential f und daher kann das Kurvenintegral durch Auswertung des Potentials f an den Kurvenendpunkten bestimmt werden.

Wir erhalten

$$C(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C(\pi) = \begin{pmatrix} \pi \\ -1 \end{pmatrix}$$

und den Integralwert

$$\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x \;=\; f(\pi,-1) - f(0,1) \;=\; -1\,(\cos(\pi))^2 - \exp(-1) - 1\,(\cos(0))^2 + \exp(1) \;=\; \mathrm{e} - 2 - 1/\mathrm{e}\,.$$

Alternativ:

Gradientenfeld:

$$g(x) = \begin{pmatrix} -2x_2\cos(x_1)\sin(x_1) \\ (\cos(x_1))^2 - \exp(x_2) \end{pmatrix}$$

Kurvenintegral:

$$\begin{aligned}
\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} -2\cos(t)\cos(t)\sin(t) \\ (\cos(t))^2 - \exp(\cos(t)) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^\pi -3(\cos(t))^2\sin(t) + \sin(t)\exp(\cos(t))\,\mathrm{d}\,t = \Big[(\cos(t))^3 - \exp(\cos(t))\Big]_0^\pi \\
&= -1 - \exp(-1) - 1 + \exp(1) = \mathrm{e} - 2 - 1/\mathrm{e}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto (x^2-4x+4)(y^2+2y+1)+xy-2y+3.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,(x,y),(0,-1))$.

Jedes Polynom entspricht seiner Taylor-Reihe. Für den Entwicklugspunkt $(0,-1)$ wird nach Termen $cx^k(y+1)^\ell$ umgeformt:

$$(x^2-4x+4)(y^2+2y+1)+xy-2y+3 = (x^2-4x+4)(y+1)^2+x(y+1)-x-2(y+1)+5\,.$$

Zum Taylor-Polynom der Stufe zwei gehören die Terme, bei denen $k+\ell \leqq 2$ ist:

$$T_2(f,(x,y),(0,-1)) = 4(y+1)^2+x(y+1)-2(y+1)-x+5$$

Alternativ:

$$\begin{array}{rcllrcl}
 & & & & f(0,-1) & = & 5\\
f_x & : & (2x-4)(y^2+2y+1)+y\,, & & f_x(0,-1) & = & -1\\
f_y & : & (x^2-4x+4)(2y+2)+x-2\,, & & f_y(0,-1) & = & -2\\
f_{xx} & : & 2(y^2+2y+1)\,, & & f_{xx}(0,-1) & = & 0\\
f_{xy} & : & (2x-4)(2y+2)+1\,, & & f_{xy}(0,-1) & = & 1\\
f_{yy} & : & 2(x^2-4x+4)\,, & & f_{yy}(0,-1) & = & 8
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
T_2(f,(x,y),(0,-1)) &= f(0,-1)+f_x(0,-1)(x-0)+f_y(0,-1)(y-(-1))\\
&\quad +\frac{1}{2}f_{xx}(0,-1)(x-0)^2+f_{xy}(0,-1)(x-0)(y-(-1))+\frac{1}{2}f_{yy}(0,-1)(y-(-1))^2\\
&= 5-x-2(y+1)+x(y+1)+4(y+1)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Ebenen im Raum $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 10x_2 - x_3 = -28\}, \\ E_2 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_2 - 2x_3 = 8\}, \\ E_3 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -12\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Schnittmenge $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

Das zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 4 & -10 & -1 & -28 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & -4 & -1 & -12 \end{array}\right]$$

Nach Tausch der ersten und dritten Zeile liefert das Gauß-Verfahren:

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 2 & -4 & -1 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \\ 4 & -10 & -1 & -28 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - 2\,Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 2 & -4 & -1 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{2}\,Z_2 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 2 & -4 & -1 & -12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 2 & -4 & -1 & -12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 2\,Z_2 : \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 2 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\,Z_1 : \\ \frac{1}{2}\,Z_2 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hieraus ergibt sich als Lösung des LGS und damit als Schnittmenge der Ebenen:

$$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$$

---

1. Möglichkeit: Beweis durch Induktion

IA Für $n = 1$ erhalten wir $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{1+1}\,.$

IH Es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$$

IS Für $n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)}_{=\frac{n}{n+1} \text{ nach } \mathbf{IH}} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)+1}
\end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Direkte Berechnung mit Teleskopsumme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 10 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} uv \\ v+1 \end{pmatrix}, \quad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ y+z \end{pmatrix}, \quad h := f \circ g$$

und der Punkt $p := (0, 1, 1)$. Bestimmen Sie:

die Jacobimatrix $\mathrm{J}f\,(u,v) = \boxed{\begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$, $\mathrm{J}g\,(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$,

den Vektor $g(p) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$, $\mathrm{J}h\,(p) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

Aufgabe 11 (*5 Punkte*) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sei eine Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A_α.

$$\boxed{(\alpha - \lambda)(2 - \lambda)^2}$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A_α.

$$\boxed{\alpha, \quad 2}$$

(c) Für welche Werte von α ist A_α diagonalisierbar?

$$\boxed{\text{Für alle } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.}$$

(d) Geben Sie für diese Werte eine invertierbare Matrix T_α so an, dass $T_\alpha^{-1} A_\alpha T_\alpha$ eine Diagonalmatrix ist.

$$T_\alpha = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 12 (*2 Punkte*) Seien $v_1 = (5,3,2)^\intercal$ und $v_2 = (2,4,6)^\intercal$. Berechnen Sie:

$\langle v_1 | v_2 \rangle = \boxed{34}$ und $\langle 3v_2 | v_1 \rangle + \langle 7v_1 | v_1 \times v_2 \rangle = \boxed{102}$

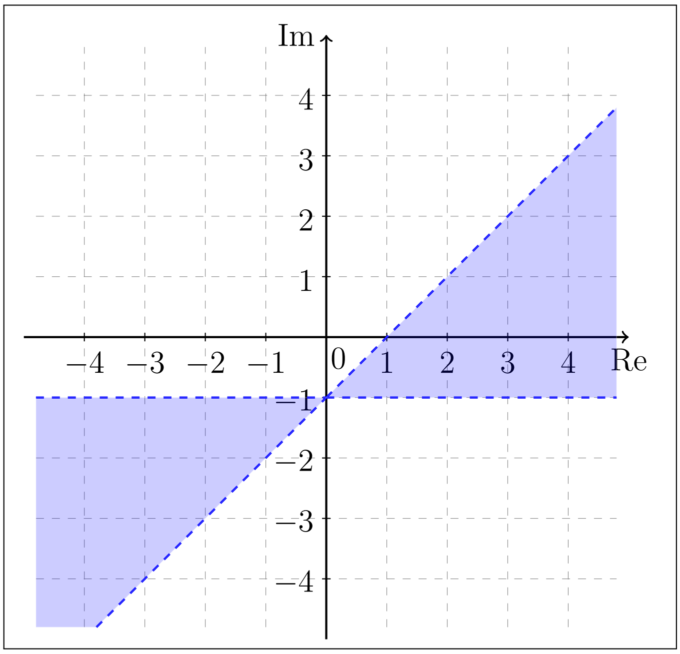
Aufgabe 13 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Integrale.

$$\int \frac{3}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x = \boxed{\Big[(1-x)^{-3}\Big]} \qquad \int_4^{+\infty} \frac{3}{(1-x)^4}\,\mathrm{d}x = \boxed{1/27}$$

$$\int \frac{4x^3}{1-x^4}\,\mathrm{d}x = \boxed{\Big[-\ln|1-x^4|\Big]} \qquad \int_{-4}^{4} \frac{4x}{(1+x^2)^2} + 4\,\mathrm{d}x = \boxed{32}$$

Aufgabe 14 (*5 Punkte*)

(a) Zeichnen Sie die Menge $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) \neq -1 \text{ und } \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)+1} > 1 \right\}$ in der komplexen Zahlenebene.



Die berandenden Geraden gehören nicht zur gefragten Menge.

(b) Sei $z = \sqrt{2}\cdot(\cos(\frac{\pi}{12})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{12}))$. Zeichnen Sie die Punkte $u = z^3$ und $v = z^3 - 3\mathrm{i}$ in der komplexen Zahlenebene.