Aufgabe 1 (*6 Punkte*)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Spur von A_α.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A_α.

(c) Zeichnen Sie die Menge $\{c \in \mathbb{C} \mid \text{Es gibt ein } \alpha \in \mathbb{R} \text{ so, dass } c \text{ Eigenwert von } A_\alpha \text{ ist}\}$ in der komplexen Zahlenebene ein.

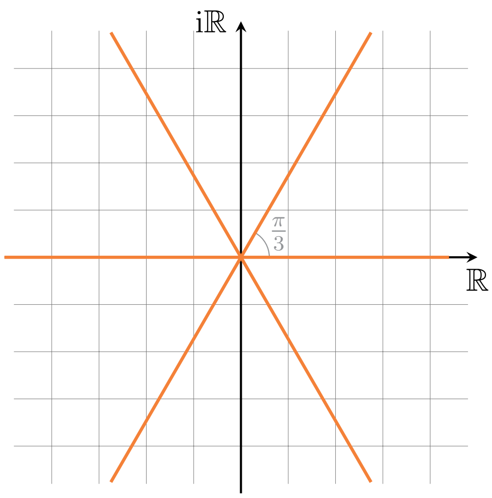
(a) Alle Einträge der Diagonalen sind 0. Es ergibt sich also $\operatorname{Sp} A_\alpha = 0$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Das charakteristische Polynom der Matrix A_α ergibt sich als $\det(A_\alpha - \lambda E)$:

$$|A_\alpha - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \alpha \\ \alpha & -\lambda & 0 \\ 0 & \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 + 0 + \alpha^3 - 0 - 0 - 0 = -\lambda^3 + \alpha^3$$

Die Eigenwerte ergeben sich als Lösungen der Gleichung $\lambda^3 = \alpha^3$,
also [komplexes Wurzelziehen] als α, $e^{\frac{2\pi i}{3}}\alpha$ und $e^{\frac{4\pi i}{3}}\alpha$.

(c)



Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^5+3n-1}{-n^4+35n^3-108n^2+13}\right)$ **(c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-9)^k}{(2k+1)!}\right)$

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1\right)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^5+3n-1}{-n^4+35n^3-108n^2+13}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4\left(4n+\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(-1+\frac{35}{n}-\frac{108}{n^2}+\frac{13}{n^4}\right)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{-1+\frac{35}{n}-\frac{108}{n^2}+\frac{13}{n^4}}\right)\\
&= \left(\frac{\infty+0-0}{-1+0-0+0}\right)\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(3\sum_{k=0}^{n}\frac{(-9)^k}{(2k+1)!}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3\cdot 9^k}{(2k+1)!}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(3)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(3)^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&= \sin(3)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^{n+1}-2^n}\,.$$

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Wir berechnen den Konvergenzradius ρ mit Hilfe des Quotienten-Kriteriums.

Mit Koeffizienten $a_n = \dfrac{1}{n2^{n+1}-2^n}$ ergibt sich

$$a = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^{n+1}-2^n}{(n+1)2^{n+2}-2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{4(n+1)-2} = \frac{1}{2}.$$

Der Konvergenzradius ist $\rho = \dfrac{1}{a} = 2\,.$

Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 1$. Die Reihe konvergiert absolut für jedes $x \in (-1,3)$.

Die Reihe divergiert für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,3]$.

Um den Konvergenzbereich festzustellen, müssen wir noch das Verhalten in den Randpunkten -1 und 3 untersuchen.

Für $x = -1$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^{n+1}-2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}.$$

Diese Reihe ist eine alternierende Reihe. Sie konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $\left(\frac{1}{2n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge ist.

Für $x = 3$ dagegen ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

Diese Reihe ist divergent, da die Minorante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergiert.

Daher konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^{n+1}-2^n}$ auf dem Intervall $[-1,\ 3)$ und divergiert außerhalb.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-2,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(2+x)\,.$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,x_0)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1\,.$

(b) Berechnen Sie den Wert $T_2(f,-\frac{1}{2},-1)\,.$

(c) Geben Sie das zugehörige Restglied $R_2(f,-\frac{1}{2},-1)$ nach Lagrange an.

(d) Zeigen Sie, dass der Fehler $\left|T_2(f,-\frac{1}{2},-1) - f(-\frac{1}{2})\right|$ höchstens $1/24$ beträgt.

(a) Der Funktionswert und die Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2+x), & f(-1) &= 0,\\ f'(x) &= \frac{1}{2+x}, & f'(-1) &= 1,\\ f''(x) &= -\frac{1}{(2+x)^2}, & f''(-1) &= -1. \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom zweiter Stufe lautet

$$T_2(f,x,-1) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{1}{2}f''(-1)(x+1)^2 = (x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^2.$$

(b) Es gilt

$$T_2(f,-\tfrac{1}{2},-1) = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

(c) Mit $f'''(x) = \dfrac{2}{(2+x)^3}$ ergibt sich die Lagrange-Darstellung des Restgliedes:

$$R_2(f,x,-1) = \frac{f'''(-1+\vartheta_{x,-1}(x-(-1)))}{3!}(x-(-1))^3 = \frac{(x+1)^3}{3(1+\vartheta_{x,-1}(x+1))^3} \quad \text{mit } \vartheta_{x,-1} \in [0,1)\,.$$

Speziell an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ ergibt sich mit $x+1 = \frac{1}{2}$ und der Abkürzung $\vartheta := \vartheta_{-\frac{1}{2},-1}$:

$$R_2\left(f,-\tfrac{1}{2},-1\right) = \frac{(-\frac{1}{2}+1)^3}{3(1+\vartheta_{-1/2,-1}(-\frac{1}{2}+1))^3} = \frac{1}{24(1+\frac{\vartheta}{2})^3}\,.$$

(d) Abschätzung des Approximationsfehlers:

$$\left|T_2\left(f,-\tfrac{1}{2},-1\right) - f\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right| = \left|R_2\left(f,-\tfrac{1}{2},-1\right)\right| = \left|\frac{1}{24(1+\frac{\vartheta}{2})^3}\right| \leqq \frac{1}{24}\,,$$

da $\vartheta = \vartheta_{-\frac{1}{2},-1} \in [0,1)$ und deswegen $1 + \frac{\vartheta}{2} \geqq 1\,.$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale, wenn diese existieren.

(a) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^3-2x^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(x-1)\,\mathrm{d}\,x$

(a) Die reelle Faktorisierung von x^3-2x^2 ist $x^2(x-2)$.

Somit ist der Ansatz zur Partialbruchzerlegung von $\frac{3x-4}{x^3-2x^2}$:

$$\frac{3x-4}{x^3-2x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Multiplikation mit dem Nenner liefert

$$3x-4 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$$

und der Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= A + C, \\ 3 &= -2A + B, \\ -4 &= -2B. \end{aligned}$$

Als Lösung dieses inhomogenen LGS ergibt sich

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 2, \quad C = \frac{1}{2}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-4}{x^3-2x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \int \left(-\frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2(x-2)}\right)\mathrm{d}\,x \\ &= \left[-\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-2|\right]. \end{aligned}$$

(b) Die Substitution $u = \ln(x+1)$, $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{x+1}$ liefert die Stammfunktion

$$\int \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u = [\ln|u|] = [\ln|\ln(x+1)|].$$

Für das uneigentliche Integral gilt damit

$$\int\limits_0^{\mathrm{e}} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,\mathrm{d}\,x = \ln|\ln(\mathrm{e}+1)| - \lim_{x\to 0+0} \ln|\ln(x+1)|.$$

Das Integral existiert nicht, denn

$$\lim_{x\to 0+0} \ln|\ln(x+1)| = -\infty.$$

(c) Partielle Integration mit $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ und $g(x) = x - 1$ liefert

$$\int \mathrm{e}^{-x}(x-1)\,\mathrm{d}\,x = \left[-\mathrm{e}^{-x}(x-1)\right] + \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right] .$$

Also ist

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(x-1)\,\mathrm{d}\,x = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}} ,$$

da $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

Aufgabe 6 (*5 Punkte*)
Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sqrt{6}\,x - \sqrt{3}\,y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Der Gradient der Funktion f ist $\operatorname{grad} f(x,y) = (\sqrt{6}, -\sqrt{3})^\intercal$ und der Gradient der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ ist $\operatorname{grad} g(x,y) = (2x, 2y)^\intercal$. Somit lautet die Lagrange-Bedingung

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0\,.$$

Offenbar erhält man keine Lösungen für $\lambda = 0$, wir können deswegen durch λ dividieren und erhalten $x = -\sqrt{6}/(2\lambda)$ und $y = \sqrt{3}/(2\lambda)$. In die Nebenbedingung eingesetzt ergibt sich

$$6 + 3 = 4\lambda^2 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm\frac{3}{2}\,.$$

Die Lösungen sind $p_1 = (-\sqrt{2/3}, \sqrt{1/3})$ und $p_2 = (\sqrt{2/3}, -\sqrt{1/3})$.

Da die stetige Funktion f auf dem Kreis, der eine kompakte Menge ist, ihr Minimum und Maximum annehmen muss, müssen die zwei gefundenen Stellen die Extremstellen sein.

Die Funktionswerte sind $f(p_1) = -3$ und $f(p_2) = 3$ und somit liegt bei p_1 das Minimum und bei p_2 das Maximum vor.

Alternative:

Parametrisiert man den Kreis mit $(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi)$ und setzt in f ein, ergibt sich

$$\tilde{f}(t) = \sqrt{6}\cos t - \sqrt{3}\sin t\,, \quad \tilde{f}'(t) = -\sqrt{6}\sin t - \sqrt{3}\cos t\,.$$

Die Nullstellen der Ableitungen erfüllen $\tan t = -1/\sqrt{2}$, sind also die Schnittpunkte des Kreises mit der Ursprungsgeraden mit Steigung $-1/\sqrt{2}$. Dies sind die Punkte $p_1 = (-\sqrt{2/3}, \sqrt{1/3})$ und $p_2 = (\sqrt{2/3}, -\sqrt{1/3})$ mit den Funktionswerten $f(p_1) = -3$ und $f(p_2) = 3$.

Da $\tilde{f}''(t) = -\tilde{f}(t)$ gilt liegt bei p_1 ein Minimum und bei p_2 ein Maximum vor.

Eine Randbetrachtung muss nicht vorgenommen werden, da die Wahl des Parameterbereichs willkürlich ist und z.B. um π verschoben werden kann.

Weitere Alternative:

Der Gradient $\operatorname{grad} f(x,y) = (\sqrt{6}, -\sqrt{3})^\intercal$ ist konstant und steht senkrecht auf den Niveaulinien von f. Daher sind diese Niveaulinien zueinander parallele Geraden.

Auf dem Kreis werden die Funktionswerte an den Stellen extremal, an denen der Kreis tangential an den Niveaugeraden liegt, der Gradient also parallel zur Normalen an den Kreis ist.

Da beim Einheitskreis die Normalenvektoren den Ortsvektoren der entsprechenden Punkte gleichen, können die Extremalstellen durch Normieren des Gradienten gefunden werden. Das ergibt

$$p_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{6}, -\sqrt{3}\right), \qquad p_2 = \frac{1}{3}\left(-\sqrt{6}, \sqrt{3}\right)$$

Da der Gradient die Richtung des steilsten Anstiegs angibt, ist bei p_1 das Maximum mit Funktionswert $f(p_1) = 3$ und bei p_2 das Minimum mit Funktionswert $f(p_2) = -3$.

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Durch $C\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \Big(t\cos(t),\, t\sin(t),\, t\Big)^\intercal$ sei ein idealisierter Draht parametrisiert.

Die Massendichte des Drahtes betrage $\rho(C(t)) = \sqrt{t\,/\,(2+t^2)}$.

Berechnen Sie die Gesamtmasse des Drahtes, die durch das Kurvenintegral $\displaystyle\int_C \rho(s)\,\mathrm{d}\,s$ gegeben ist.

Es gilt $C'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

und

$$\begin{aligned} |C'(t)| &= \sqrt{(\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2 + 1} \\ &= \sqrt{(1+t^2)((\cos(t))^2 + (\sin(t))^2) + 1} \\ &= \sqrt{2+t^2}. \end{aligned}$$

Die Masse des Drahtes ist also

$$\begin{aligned} \int\limits_C \rho(x)\,\mathrm{d}\,s &= \int\limits_0^{4\pi} \rho(C(t)) \cdot |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_0^{4\pi} \sqrt{\frac{t}{2+t^2}}\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_0^{4\pi} \sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[\frac{2t^{3/2}}{3}\right]_0^{4\pi} = \frac{16\pi^{3/2}}{3}. \end{aligned}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 8 (*3 Punkte*)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

$$\det(A) = \boxed{2}, \quad \det(B) = \boxed{-2}, \quad \det(\sqrt[4]{5}B) = \boxed{-10}.$$

Aufgabe 9 (*7 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_α. $\boxed{1,\ 1-\alpha,\ \alpha}$

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die wenigstens ein Eigenwert von A_α mindestens die algebraische Vielfachheit 2 besitzt. $\boxed{1,\ 0,\ \tfrac{1}{2}}$

(c) Bestimmen Sie die Eigenräume von $A_{\frac{1}{2}}$.

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \ \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(d) Bestimmen Sie die Eigenräume von A_1.

$$\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \ \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(e) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die A_α diagonalisierbar ist. $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\}}$

Aufgabe 10 (*10 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 2x_2)^2 + 4(2x_1 - x_2)^2 .$$

(a) Bestimmen Sie den Funktionswert $f(2,4) = \boxed{100}$

(b) Die Niveaumenge $E := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x_1, x_2) = f(2,4) \right\}$, die den Punkt $(2,4)$ enthält, ist eine Ellipse. Geben Sie die symmetrische Matrix A für die Matrixbeschreibung

$$x^\intercal A x + 2a^\intercal x - f(2,4) = 0$$

von E an: $A = \boxed{\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}}$

(c) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem E euklidische Normalform hat.

$$\mathbb{F} = \boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

(d) Geben Sie die Halbachsenlängen der Ellipse E an: $\boxed{2\sqrt{5}, \sqrt{5}}$

(e) Skizzieren Sie E sowie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$: