Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 8** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 9 – 12** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 8.4.2019 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **15.4.2019** bis **17.4.2019** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie für $j \in \{1, 2\}$ jeweils die Lösungsmenge $\mathcal{L}_j$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b_j$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Es sei A die reelle (3×3)–Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3\pi & 1 & \pi \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A sowie deren geometrische und algebraische Vielfachheit an. Ist A diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des dazugehörigen Eigenraums.

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Ebene

$$E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an E.

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E.

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dem φ beschrieben wird durch ${}_{\mathbb{F}}\varphi_{\mathbb{F}} \colon {}_{\mathbb{F}}x \mapsto A\,{}_{\mathbb{F}}x$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} z^n$$

konvergiert und bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die diese Potenzreihe divergiert.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Entwicklungspunkt der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + (-1)^n}{n} \right)^{(n^2)} (z - \mathrm{e} + \mathrm{i})^n.$$

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Sei $a \neq 0$ und $f(x) = x\mathrm{e}^{ax}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = (na^{n-1} + a^n x)\mathrm{e}^{ax}.$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $g_{\alpha,n}$ das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$g_{\alpha,n}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - \sin(\alpha)y^2 \\ x^n y \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie für alle $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ die Jacobi–Matrix und die Rotation von $g_{\alpha,n}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge L aller $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, für welche $g_{\alpha,n}$ ein Potential besitzt.

(c) Geben Sie für $(\alpha, n) = \left(-\frac{5}{6}\pi, 1\right)$ explizit ein Potential von $g_{\alpha,n}$ an.

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Die Kurve K sei parametrisiert durch $c\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie $K := c([0, \pi])$. Zeichnen Sie insbesondere die Punkte $c(0)$, $c\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $c\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $c\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ und $c(\pi)$ ein.

(b) Zeigen Sie, dass c eine reguläre Parametrisierung von K ist.

(c) Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld mit

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Es seien A_1, A_2 und A_3 die reellen (2×2)–Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A_1, A_2 und A_3 in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ linear unabhängig sind.

(b) Sie dürfen annehmen, dass durch die Abbildung

$$\mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}\colon (A, B) \mapsto \langle A \,|\, B \rangle := \mathrm{Spur}(A^\intercal B)$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert wird. Berechnen Sie die folgenden Werte:

$$\langle A_1 \,|\, A_1 \rangle,\ \langle A_1 \,|\, A_2 \rangle,\ \langle A_1 \,|\, A_3 \rangle \text{ und } \langle A_2 \,|\, A_3 \rangle.$$

(c) Bestimmen Sie Matrizen $B_1, B_2, B_3 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $\mathrm{L}(A_1) = \mathrm{L}(B_1)$, $\mathrm{L}(A_1, A_2) = \mathrm{L}(B_1, B_2)$ und $\mathrm{L}(A_1, A_2, A_3) = \mathrm{L}(B_1, B_2, B_3)$ gilt und dass B_1, B_2, B_3 ein Orthonormalsystem bezüglich dem in **(b)** definierten Skalarprodukt bilden.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 9 (5 *Punkte*) Es sei $z = \frac{3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+3\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-1+\mathrm{i}}$.

(a) Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z.

$$|z| = \boxed{}, \qquad \varphi = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie $(-1+\mathrm{i})^6 = \boxed{}$.

(c) Bestimmen Sie $\left(3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+3\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 = \boxed{}$.

(d) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z^6.

$$\mathrm{Re}(z^6) = \boxed{}, \qquad \mathrm{Im}(z^6) = \boxed{}.$$

Aufgabe 10 (5 *Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Das Taylorpolynom zweiter Stufe von f am Entwicklungspunkt $(2,1)$ sei

$$\mathrm{T}_2(f,(x,y),(2,1)) = 19 + 2(x-2) + 7(x-2)^2 - 4(x-2)(y-1).$$

(a) Geben Sie die Hessematrix von f im Punkt $(2,1)$ an. $\qquad \mathrm{H}f\,(2,1) = \boxed{}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_1(f,(x,y),(2,1)) = \boxed{}$.

(c) Geben Sie zwei verschiedene Funktionen $g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an mit

$$\mathrm{T}_1(g,(x,y),(2,1)) = \mathrm{T}_1(h,(x,y),(2,1)) = \mathrm{T}_1(f,(x,y),(2,1)).$$

$$g(x,y) = \boxed{},$$

$$h(x,y) = \boxed{}.$$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n-9} = \boxed{}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7x^2+2x\sin(x^5)}{(2x-5)^2} = \boxed{}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}+\frac{2^n}{n}} = \boxed{}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{7^k} = \boxed{}$

Aufgabe 12 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)^2$ und $g(x,y) = x^2+2xy+3y^2+3x+y$.

(a) Berechnen Sie ∇f und ∇g.

$$\nabla f(x,y) = \boxed{}, \qquad \nabla g(x,y) = \boxed{}.$$

(b) Geben Sie alle Punkte in $\mathbb{R}^2$ an, in denen ∇g verschwindet. $\boxed{}$

(c) Schreiben Sie die drei Gleichungen auf, die zur Bestimmung von kritischen Stellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ nach der Methode von Lagrange benötigt werden.

$$\boxed{}.$$

(d) An welchen Stellen nimmt die Funktion f ihren größten bzw. kleinsten Wert unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ an?

$$\boxed{}$$
