Aufgabe 1 (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{30^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right)$.

(a) Es ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n!} \right) - \frac{3^2}{0!} - \frac{3^3}{1!} = -36 + 9 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = -36 + 9\mathrm{e}^3.$$

(b) Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{30^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} - \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{6}{5} - \frac{10}{9} = \frac{54}{45} - \frac{50}{45} = \frac{4}{45}.$$

(c) Hier liegt eine Teleskopreihe der Form $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ vor. Damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) = \lim_{N\to\infty} (a_1 - a_{N+1}) = a_1 - \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{N+1}\right)^{N+1} = 2 - \mathrm{e}.$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n (z-2-\mathrm{i})^n .$$

(a) Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt und den Konvergenzradius der Reihe.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe und für welche divergiert sie?

(a) Wir setzen $a_n = (-3)^n$. Dann ist $\sqrt[n]{|a_n|} = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Trivialerweise gilt damit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3$, sodass der Konvergenzradius der Reihe gegeben ist durch $\rho = \frac{1}{3}$.

Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 2 + \mathrm{i}$.

(b) Aus Teil **(a)** folgern wir, dass die Potenzreihe absolut konvergiert für alle z mit $|z-2-\mathrm{i}| < \frac{1}{3}$ und divergiert für alle z mit $|z-2-\mathrm{i}| > \frac{1}{3}$.

Es bleibt noch der Rand des Konvergenzkreises zu betrachten. Im Folgenden gelte daher, dass $|z-2-\mathrm{i}| = \frac{1}{3}$. Dann ist

$$|(-3)^n (z-2-\mathrm{i})^n| = 1 \cdot 3^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere bilden die Reihenglieder keine Nullfolge, sodass die Potenzreihe auf dem Rand des Konvergenzkreises divergiert.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Gegeben sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2)^\intercal \mapsto (x_1 \mathrm{e}^{x_2}, x_2)^\intercal$. Weiter sei die Kurve K_1 parametrisiert durch $C_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (t, t^2)^\intercal$ und K_2 sei die Strecke von $(0,0)^\intercal$ nach $(1,1)^\intercal$.

(a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{K_1} g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

(c) Besitzt g ein Potential?

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\int_{K_1} g(x) \bullet \mathrm{d}\, x &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t^2} t \\ t^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t \\ &= \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{t^2} t + 2t^3 \right) \mathrm{d}\, t = \left[\frac{1}{2} \mathrm{e}^{t^2} + \frac{1}{2} t^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}\mathrm{e}.\end{aligned}$$

(b) Eine Parametrisierung von K_2 ist zum Beispiel $C_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon C_2(t) = \binom{t}{t}$.

Dies ist eine reguläre Parametrisierung, denn es gilt $C_2'(t) = \binom{1}{1} \neq \binom{0}{0}$.

Damit ist dann

$$\begin{aligned}\int_{K_2} g(x) \bullet \mathrm{d}\, x &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t t \\ t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t \\ &= \int_0^1 \left(\mathrm{e}^t t + t \right) \mathrm{d}\, t \\ &= \left[\mathrm{e}^t t \right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\, t + \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= \mathrm{e} - 0 - \left[\mathrm{e}^t \right]_0^1 + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(c) Die Funktion g kann kein Potential besitzen, da die beiden Kurven K_1 und K_2 dieselben Anfangs- und Endpunkte besitzen, aber das Kurvenintegral unterschiedlich ist.

Alternative 1: Die Jacobimatrix $\mathrm{J}f \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e}^{x_2} & x_1 \mathrm{e}^{x_2} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ ist (für $x_1 \neq 0$) nicht symmetrisch. Daher kann g kein Potential besitzen.

Alternative 2: Es ist $\operatorname{rot} g \binom{x_1}{x_2} = 0 - x_1 \mathrm{e}^{x_2} \neq 0$. Also kann g kein Potential besitzen.

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Bestimmen Sie diejenigen Stellen in der kompakten Menge

$$M = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4x^2 + y^2 = 4\},$$

an denen die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto (x+y)^2$ ihren kleinsten bzw. ihren größten Wert annimmt.

Lösung: Zunächst halten wir fest, dass Maximal- und Minimalstellen nach dem Satz vom Minimum und Maximum existieren müssen, da f stetig und M kompakt ist.

Sei $g\binom{x}{y} = 4x^2 + y^2 - 4$. Wir stellen fest, dass $\nabla g\binom{x}{y} = \binom{8x}{2y} \neq \binom{0}{0}$ für alle $\binom{x}{y} \in M$ gilt. Daher finden wir alle Kandidaten für Extrema durch die Methode von Lagrange.

Wir erhalten das folgende nichtlineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2(x+y) + 8\lambda x &\overset{!}{=} 0, \\ 2(x+y) + 2\lambda y &\overset{!}{=} 0, \\ 4x^2 + y^2 - 4 &\overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Ziehen wir die zweite Gleichung von der ersten ab, ergibt sich

$$2\lambda(4x - y) = 0 \quad \iff \quad y = 4x \text{ oder } \lambda = 0.$$

Fall 1: $\lambda = 0$. Dann folgt aus der ersten Gleichung, dass $x = -y$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt $5x^2 = 4$, sodass $x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ und schließlich $y = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Fall 2: $y = 4x$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt $20x^2 = 4$, also $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ und schließlich $y = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$.
(λ kann dann durch Einsetzen in die erste oder zweite Gleichung eindeutig bestimmt werden).

Wir erhalten also insgesamt die kritischen Stellen $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^\intercal, \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^\intercal, \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^\intercal, \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^\intercal$.
Es genügt zur Beantwortung der Frage, die gefundenen kritischen Stellen in f einzusetzen und die Funktionswerte zu vergleichen.
Es ist $f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \mp\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^\intercal = 0$ und $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^\intercal = 5$. Also nimmt f an den Stellen $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \mp\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^\intercal$ den kleinsten und an den Stellen $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^\intercal$ den größten Wert an.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Gegeben sei in Standardkoordinaten die Quadrik

$$\mathcal{Q} := \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,|\, 7x_1^2 - 17x_2^2 - 18x_1x_2 - 12x_1 + 4x_2 + 2 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie eine Matrixbeschreibung $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^\intercal Ax + 2b^\intercal x + c = 0\}$ mit einer symmetrischen Matrix A, einem Vektor b und einer Konstanten c an.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und bestimmen Sie für jeden Eigenraum eine Orthonormalbasis.

(c) Geben Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik $\mathcal{Q}$ an und stellen Sie ferner ein kartesisches Koordinatensystem auf, bezüglich welchem $\mathcal{Q}$ durch diese euklidische Normalform beschrieben wird.

(a) Wähle

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -9 & -17 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } c = 2.$$

(b) Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_2)$ berechnet sich zu

$$\chi_A(\lambda) = (7 - \lambda)(-17 - \lambda) - 81 = \lambda^2 + 10\lambda - 200.$$

Es gilt des Weiteren

$$\begin{aligned} 0 = \lambda^2 + 10\lambda - 200 &\Longleftrightarrow 225 = (\lambda + 5)^2 \\ &\Longleftrightarrow \lambda = -5 \pm 15, \end{aligned}$$

die Eigenwerte von A sind also 10 und -20, mit jeweils eindimensionalen Unterräumen.

Für den Eigenraum zum Eigenwert 10 betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -9 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{Z_2' = Z_2 - 3 \cdot Z_1} \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

woraus sich der Eigenvektor $(-3, 1)^\intercal$ ergibt. Ein Eigenvektor zum Eigenwert -20 muss dann durch $(1, 3)^\intercal$ gegeben sein, da A symmetrisch ist — Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten also senkrecht aufeinander stehen — und $(1, 3)^\intercal$ den (eindimensionalen) Orthogonalraum von $(-3, 1)^\intercal$ aufspannt. Alternativ betrachtet man das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 27 & -9 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{Z_1' = Z_1 + 3 \cdot Z_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

In jedem Fall sehen wir, dass

$$f_1 := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } f_2 := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten 10 respektive -20 ist.

(c) Betrachte das kartesische Koordinatensystem $\mathbb{F} := (0; f_1, f_2)$ und die Matrix $F := (f_1, f_2)$, deren Spalten die Vektoren f_1 und f_2 sind. Es sei außerdem

$$w := F^\intercal b = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sind dann $y := {}_{\mathbb{F}}x$ die Koordinaten eines Punktes $x \in \mathbb{R}^2$, so gilt

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{Q} &\iff x^\intercal A x + 2b^\intercal x + 2 = 0 \\ &\iff y F^\intercal A F y + 2w^\intercal y + 2 = 0 \\ &\iff 10y_1^2 - 20y_2^2 + \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot 20y_1 + 2 = 0 \\ &\iff 10\left(y_1^2 + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} y_1\right) - 20y_2^2 + 2 = 0 \\ &\iff 10\left(y_1 + \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 - 4 - 20y_2^2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Ist also P der Punkt mit $\mathbb{F}$-Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}P = (-2/\sqrt{10}, 0)^\intercal$, d. h.

$$P = F \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

so besitzt x in dem kartesischen Koordinatensystem $\mathbb{G} := (P; f_1, f_2)$ die Koordinaten $z := {}_{\mathbb{G}}x = y - {}_{\mathbb{F}}P$. Also gilt

$$x \in \mathcal{Q} \iff 10z_1^2 - 20z_2^2 - 2 = 0 \iff -5z_1^2 + 10z_2^2 + 1 = 0.$$

In dem Koordinatensystem $\mathbb{G} = \left(\frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right); \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\right)$ besitzt $\mathcal{Q}$ also euklidische Normalform. Außerdem sehen wir, dass es sich bei $\mathcal{Q}$ um eine Hyperbel handelt.

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Sei A eine Matrix mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor v. Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass v für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ein Eigenvektor von A^{2n} zum Eigenwert λ^{2n} ist.

IA Für $n = 1$ ist λ nach Voraussetzung Eigenwert von A mit Eigenvektor v, d.h. es gilt $Av = \lambda v$. Somit ist $A^{2\cdot 1}v = A \cdot Av = A \cdot \lambda v = \lambda A v = \lambda^{2\cdot 1} v$.

IV Für ein n gelte $A^{2n}v = \lambda^{2n}v$.

IS Zu zeigen: $A^{2n+2}v = \lambda^{2n+2}v$.

Alternative 1: $A^{2n+2}v = A^2 \cdot (A^{2n}v) \overset{\text{IV}}{=} A^2 \cdot \lambda^{2n}v = \lambda^{2n} \cdot A^2 v \overset{\text{IA}}{=} \lambda^{2n} \cdot \lambda^2 v = \lambda^{2n+2}v$.

Alternative 2: $A^{2n+2}v = A^{2n+1} \cdot (Av) \overset{Av = \lambda v}{=} A^{2n+1} \cdot \lambda v = \lambda \cdot A^{2n} \cdot (Av) \overset{Av = \lambda v}{=} \lambda^2 \cdot (A^{2n}v) \overset{\text{IV}}{=} \lambda^2 \cdot \lambda^{2n} v = \lambda^{2n+2}v$.

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Wir betrachten die Matrizen $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $N = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $\mathrm{Sp}(M+N)$, $\det(M)$ und $\mathrm{Rg}(N)$.

Die Spur ist die Summe der Diagonaleinträge, also gilt $\mathrm{Sp}(M+N) = \mathrm{Sp}(M) + \mathrm{Sp}(N) = 6 + 10 = 16$.

Mit der Regel von Sarrus erhalten wir $\det(M) = 4 + 12 - (-2) = 18$.

Es gilt $\mathrm{Rg}(N) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$, damit ist $\mathrm{Rg}(N) =$Zeilenrang$(N) = 3$.

Alternativ kann man zeigen, dass die drei Spalten (oder drei Zeilen) linear unabhängig sind.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studiengang:**	

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n - 3^n} = \boxed{4} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{(n/2)} = \boxed{e^{1/6}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n^{5/2} - n^3}{(2n-1)^3} = \boxed{-\frac{1}{8}}$$

Aufgabe 9 (*7 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x\sin(xy)$. Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse–Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f\left((x,y)^\intercal\right) = \boxed{\begin{pmatrix} \sin(xy) + xy\cos(xy) \\ x^2\cos(xy) \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{H}f\left((x,y)^\intercal\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 2y\cos(xy) - xy^2\sin(xy) & 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy) \\ 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy) & -x^3\sin(xy) \end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie $\operatorname{grad} f\left((1,\frac{\pi}{2})^\intercal\right)$ und $\mathrm{H}f\left((1,\frac{\pi}{2})^\intercal\right)$.

$$\operatorname{grad} f\left((1,\tfrac{\pi}{2})^\intercal\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \qquad \mathrm{H}f\left((1,\tfrac{\pi}{2})^\intercal\right) = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{\pi^2}{4} & -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & -1 \end{pmatrix}}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)^\intercal$.

$$\mathrm{T}_2\left(f,(x,y)^\intercal,\left(1,\tfrac{\pi}{2}\right)^\intercal\right) = \boxed{1 + (x-1) - \tfrac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \tfrac{\pi}{2}(x-1)\left(y-\tfrac{\pi}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(y-\tfrac{\pi}{2}\right)^2.}$$

Aufgabe 10 (*8 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie

das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) =$	$(2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)^2$
die Eigenwerte von A:	$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$
die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte:	$e_2 = 1 = e_1, \quad e_{-1} = 2$
die Eigenräume:	$V(2) = \mathrm{L}\left((1,6,0,2)^\intercal\right)$, $V(1) = \mathrm{L}\left((0,1,0,0)^\intercal\right)$, $V(-1) = \mathrm{L}\left((0,0,1,0)^\intercal\right)$
die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte:	$d_\lambda = 1$ für alle Eigenwerte

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Zeichnen Sie die Punkte der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 8(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})\}$ in dem nachfolgenden Koordinatensystem ein: