Aufgabe 1 (*4 Punkte*)

(a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = -4\sqrt{3}+4\mathrm{i}$. Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ und das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $w^3 = -4\sqrt{3}+4\mathrm{i}$. Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten an.

(a) Für den Betrag von z ergibt sich

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 4\sqrt{3+1} = 8\,.$$

Somit erhalten wir die Darstellung $z = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$. Mit Hilfe der Tabelle auf Seite 1 ermitteln wir damit das Argument $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.

(b) Auf der rechten Seite der Gleichung steht die Zahl z aus Aufgabenteil **(a)**. In Polarkoordinaten erhalten wir also die Gleichung

$$w^3 = 8\left(\cos\left(\tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)\right)\,,$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig ist. Auflösen der Gleichung nach w durch Ziehen der dritten komplexen Wurzel führt auf

$$w_k = 2\left(\cos\left(\tfrac{(5+12k)\pi}{18}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{(5+12k)\pi}{18}\right)\right)\,,$$

was die folgenden drei unterschiedlichen Lösungen der Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\left(\cos\left(\tfrac{5\pi}{18}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{5\pi}{18}\right)\right)\,,\\
w_1 &= 2\left(\cos\left(\tfrac{17\pi}{18}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{17\pi}{18}\right)\right)\,,\\
w_2 &= 2\left(\cos\left(\tfrac{29\pi}{18}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{29\pi}{18}\right)\right)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils den Wert der Reihe.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{3^{2n+1}}$

(b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n}\sqrt{n+1}}$

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{3^{2n+1}} &= \frac{7}{3}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n\right) = \frac{7}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n - 1 - \frac{7}{9}\right) \\ &= \frac{7}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{7}{9}} - \frac{16}{9}\right) = \frac{7}{3}\left(\frac{9}{2} - \frac{16}{9}\right) = \frac{7}{3}\cdot\frac{49}{18} = \frac{343}{54}\,.\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n}\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}}\,.$$

Hier liegt somit eine Teleskopreihe der Form $\sum_{n=3}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$ vor.
Weiterhin ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, sodass

$$\sum_{n=3}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=3}^{N}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{N\to\infty}(a_3 - a_{N+1}) = a_3 - \lim_{N\to\infty} a_{N+1} = a_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Wir betrachten für $z \in \mathbb{C}$ die Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} 3^{2n} z^{2n+1}\,,$$
$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} 3^{2n} z^{2n+3}$$

auf ihrem jeweiligen Konvergenzkreis.

(a) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $f(z)$.

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $g(z)$.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ von $g(z)$.

(a) Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (3z)^{2n+1} = \frac{1}{3} \sin(3z),$$

womit $f(z) = \frac{1}{3}\sin(3z)$ eine geschlossene Darstellung von $f(z)$ ist.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$g(z) = \frac{z^2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (3z)^{2n+1} = \frac{z^2}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (3z)^{2n+1} - 3z \right),$$

womit eine geschlossene Darstellung von $g(z)$ gegeben ist durch

$$g(z) = \frac{z^2}{3} (\sin(3z) - 3z) = \frac{z^2}{3} \sin(3z) - z^3\,.$$

(c) Da die Potenzreihe von $\sin(z)$ den Konvergenzradius $+\infty$ hat, besitzt auch diejenige von $\sin(3z)$ den Konvergenzradius $+\infty$. Aus der geschlossenen Darstellung in **(b)** folgt für den Konvergenzradius der Potenzreihe von $g(z)$ somit $\rho = +\infty$.

Alternative:

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z)$, wobei $a_n(z) := (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} 3^{2n} z^{2n+3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Für $z = 0$ gilt $a_n(0) = 0$, womit die Reihe $g(0) = 0$ konvergent ist. Zudem ist für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{2n+2}|z|^{2n+5}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{3^{2n}|z|^{2n+3}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3^2|z|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$$

und damit $g(z)$ konvergent nach dem Qutotienten-Kriterium. Damit haben wir gezeigt, dass die Potenzreihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert: Das bedeutet $\rho = +\infty$.

Aufgabe 4 (*3 Punkte*)

Bei der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ betrachten wir die Partialsummen $P_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P_N = 1 - \frac{1}{N+2}\,.$$

- Induktionsanfang IA Es ist

$$P_1 = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(0+1)(0+2)} + \frac{1}{(1+1)(1+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{1+2}\,.$$

  Damit ist die Behauptung für $N = 1$ wahr.

- Induktionsschluss IS $N \rightsquigarrow N+1$.

  Induktionshypothese IH Angenommen, die Behauptung sei wahr für N.

  Dann ist

$$\begin{aligned} P_{N+1} = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} \\ &\overset{\text{IH}}{=} 1 - \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} \\ &= 1 - \frac{N+3}{(N+2)(N+3)} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} \\ &= 1 - \frac{N+2}{(N+2)(N+3)} \\ &= 1 - \frac{1}{(N+1)+2}\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $N \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe 5 (*11 Punkte*) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei die Quadrik $\mathcal{Q}_t$ definiert durch

$$\mathcal{Q}_t := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 - 16x_2 + t = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von $\mathcal{Q}_t$ in Abhängigkeit von t.

Die Gleichung für $\mathcal{Q}_t$ ist gegeben durch $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \; a = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}, \; c = t.$$

Das charakteristische Polynom von A lautet $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (\lambda - 5)^2 - 9$. Aus $\chi_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0$ bekommt man die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 8$.

Den Eigenraum $V(\lambda_1)$ zu λ_1 erhält man durch Lösen des LGS $(A-\lambda_1 E_2)x = (A-2E_2)x = 0$, welches explizit gegeben ist durch $\left[\begin{array}{rr||r} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right]$. Ein Eigenvektor zu λ_1 ist damit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Einen Eigenvektor zu λ_2 kann man analog durch Lösen des LGS $(A - \lambda_2 E_2)x = (A - 8E_2)x = 0$ bestimmen. Man findet zum Beispiel den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Durch Normierung erhält man daraus eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun das neue Koordinatensystem $\mathbb{F} = (0; v_1, v_2) = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right); \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right)$ mit der zugehörigen Transformationsmatrix $F = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Bezüglich $\mathbb{F}$ ist die Quadrik gegeben durch die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= y^\intercal (F^\intercal AF)y + 2(F^\intercal a)^\intercal y + t \\ &= y^\intercal \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} y + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} \right)^\intercal y + t \\ &= 2y_1^2 + 8y_2^2 - 8\sqrt{2}\, y_1 + 8\sqrt{2}\, y_2 + t. \end{aligned}$$

Mit quadratischer Ergänzung führen wir nun eine Verschiebung durch, damit der lineare Anteil verschwindet:

$$\begin{aligned}2y_1^2 + 8y_2^2 - 8\sqrt{2}\,y_1 + 8\sqrt{2}\,y_2 + t &= 2\left(y_1^2 - 4\sqrt{2}\,y_1 + 8 - 8\right) + 8\left(y_2^2 + \sqrt{2}\,y_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + t \\ &= 2\left(y_1 - 2\sqrt{2}\right)^2 + 8\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + t - 20.\end{aligned}$$

Nach der Verschiebung $z_1 := y_1 - 2\sqrt{2}$ und $z_2 := y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ wird $\mathcal{Q}_t$ also durch die Gleichung

$$2z_1^2 + 8z_2^2 + t - 20 = 0$$

beschrieben. Im Fall $t = 20$ ist eine euklidische Normalform somit $2z_1^2 + 8z_2^2 = 0$.

Im Fall $t \neq 20$ ist nach Division durch $t - 20$ eine euklidische Normalform gegeben durch

$$\frac{2}{t-20}z_1^2 + \frac{8}{t-20}z_2^2 + 1 = 0.$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung von $\dfrac{5x^2+6x-2}{3x^3+6x}$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x-2}{3x^3+6x}\,\mathrm{d}\,x$.

(c) Gegeben sei $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \dfrac{\ln(x^3)}{\sqrt{x^3}}$. Berechnen Sie $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(a) Der Nenner zerlegt sich in $3x^3+6x = 3x(x^2+2)$. Für die Partialbruchzerlegung machen wir damit den folgenden Ansatz

$$\frac{5x^2+6x-2}{3x^3+6x} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{x^2+2}\,.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner führt auf den Koeffizientenvergleich

$$5x^2+6x-2 = 3A(x^2+2)+3x(B+Cx) = 3(A+C)x^2+3Bx+6A.$$

Daraus folgt sofort $B=2,\ A=-\frac{1}{3}$ und somit wegen $5=3(A+C)$ weiter $C=2$. Somit ist die reelle Partialbruchzerlegung gegeben durch

$$\frac{5x^2+6x-2}{3x^3+6x} = -\frac{1}{3x} + \frac{2+2x}{x^2+2}\,.$$

(b) Mit **(a)** folgt

$$\int \frac{5x^2+6x-2}{3x^3+6x}\,\mathrm{d}\,x = -\int \frac{1}{3x}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}\,x$$

Mittels der Substitution $s=\frac{x}{\sqrt{2}}$ mit $\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ für das zweite Integral, und $t=x^2$ mit $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}=2x$ für das dritte Integral, folgt weiter

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2+6x-2}{3x^3+6x}\,\mathrm{d}\,x &= -\int \frac{1}{3x}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{\sqrt{2}}{s^2+1}\,\mathrm{d}\,s + \int \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \left[-\frac{1}{3}\ln(|x|)\right] + \left[\sqrt{2}\arctan(s)\right] + \left[\ln|t+2|\right] \\ &= \left[-\frac{1}{3}\ln(|x|) + \sqrt{2}\arctan(\tfrac{x}{\sqrt{2}}) + \ln(x^2+2)\right],\end{aligned}$$

wobei im Logarithmus des dritten Summanden wegen $x^2+2>0$ der Betrag aufgelöst wurde.

(c) Wir erhalten mit partieller Integration

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\ln(x^3)}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}\,x &= \int \ln(x^3)\cdot x^{-3/2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[-2\ln(x^3)\cdot x^{-1/2}\right] + 6\int x^{-3/2}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left[-2\ln(x^3)\cdot x^{-1/2} - 12\cdot x^{-1/2}\right] \\
&= \left[-\frac{2\ln(x^3)}{\sqrt{x}} - \frac{12}{\sqrt{x}}\right] .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7 (*7 Punkte*)
Für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ wird durch

$$g_\gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{2x_1} - \gamma^2 x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} \\ (2\gamma - 3)x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + 6x_2 \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld $g_\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert.

(a) Für welche Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ besitzt g_γ ein Potential?
Geben Sie für jeden dieser Parameterwerte ein Potential an.

(b) Wir betrachten die Kurve K mit Parametrisierung $C\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^2\colon\ t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$,
sowie das Vektorfeld g_1 für $\gamma = 1$.
Berechnen Sie $\displaystyle\int_K g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

(a) Die Jacobimatrix der Funktion g_γ ist gegeben durch

$$\mathrm{J}g_\gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8\mathrm{e}^{2x_1} - \gamma^2 x_2^2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} & -\gamma^2(1 + x_1 x_2)\mathrm{e}^{x_1 x_2} \\ (2\gamma - 3)(1 + x_1 x_2)\mathrm{e}^{x_1 x_2} & (2\gamma - 3)x_1^2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + 6 \end{pmatrix}.$$

Da der Definitionsbereich des Vektorfeldes $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, existiert ein Potential genau dann, wenn die Jacobimatrix in jedem Punkt symmetrisch ist. (Alternativ: Wenn die Rotation von g_γ verschwindet, wobei $\operatorname{rot} g_\gamma\left(\binom{x_1}{x_2}\right) = (2\gamma - 3)(1 + x_1 x_2)\mathrm{e}^{x_1 x_2} + \gamma^2(1 + x_1 x_2)\mathrm{e}^{x_1 x_2}$.)
Symmetrie der Jacobimatrix liegt wiederum genau dann vor, wenn

$$\begin{aligned} & -\gamma^2(1 + x_1 x_2)\mathrm{e}^{x_1 x_2} = (2\gamma - 3)(1 + x_1 x_2)\mathrm{e}^{x_1 x_2} \\ \iff \quad & -\gamma^2(1 + x_1 x_2) = (2\gamma - 3)(1 + x_1 x_2) \end{aligned}$$

für alle $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt ist; insbesondere also für $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $1 + x_1 x_2 \neq 0$.
Somit muss $-\gamma^2 = 2\gamma - 3$ sein; also existiert ein Potential für $\gamma \in \{1, -3\}$.

Es sind Potentiale für g_1 und g_{-3} anzugeben. Ein Potential U_1 für

$$g_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{2x_1} - x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2} \\ -x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + 6x_2 \end{pmatrix}$$

muss $\operatorname{grad} U_1 = g_1$ erfüllen. Daher folgt

$$U_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \int 4\mathrm{e}^{2x_1} - x_2 \mathrm{e}^{x_1 x_2}\ \mathrm{d}\,x_1 = 2\mathrm{e}^{2x_1} - \mathrm{e}^{x_1 x_2} + c_1(x_2),$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial x_2} U_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = -x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} c_1(x_2) \overset{!}{=} -x_1 \mathrm{e}^{x_1 x_2} + 6x_2,$$

weshalb

$$\big[c_1(x_2)\big] = \int 6x_2 \,\mathrm{d}\,x_2 \ , \qquad \text{also} \qquad c_1(x_2) = 3x_2^2 + c_2.$$

Für $c_2 = 0$ erhalten wir das Potential

$$U_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2\mathrm{e}^{2x_1} - \mathrm{e}^{x_1 x_2} + 3x_2^2$$

für g_1; in der Tat passt die Probe: $\operatorname{grad} U_1 = g_1$.

Mit analogen Schritten sieht man, dass ein Potential für

$$g_{-3}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{2x_1} - 9x_2\mathrm{e}^{x_1x_2} \\ -9x_1\mathrm{e}^{x_1x_2} + 6x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$U_{-3}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2\mathrm{e}^{2x_1} - 9\mathrm{e}^{x_1x_2} + 3x_2^2\,;$$

in der Tat passt die Probe: $\operatorname{grad} U_{-3} = g_{-3}$.

Alle weiteren möglichen Potentiale unterscheiden sich von den angegebenen durch eine additive Konstante.

(b) Das Kurvenintegral lässt sich mit Hilfe des Potentials U_1 berechnen.

Die Endpunkte der Kurve K sind gegeben durch $C(0) = \binom{0}{0}$ und $C(1) = \binom{1}{2}$. Damit folgt

$$\int_K g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x = U_1(C(1)) - U_1(C(0)) = U_1\big(\tbinom{1}{2}\big) - U_1\big(\tbinom{0}{0}\big) = (\mathrm{e}^2 + 12) - 1 = \mathrm{e}^2 + 11\,.$$

Alternativ berechnet man das Kurvenintegral direkt. Mit $C'(t) = \binom{1}{2}$ erhält man

$$\int_K g_1(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \int_0^1 \Big\langle g_1(C(t)) \,\Big|\, C'(t) \Big\rangle \,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{2t} - 2t\mathrm{e}^{2t^2} \\ -t\mathrm{e}^{2t^2} + 12t \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\,t$$

$$= \int_0^1 4\mathrm{e}^{2t} - 4t\mathrm{e}^{2t^2} + 24t \,\mathrm{d}\,t = \Big[2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{2t^2} + 12t^2\Big]_0^1 = \mathrm{e}^2 + 11\,.$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)
Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto 4x^3 + 3y^2$
und die Menge $M = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = x^2, -2 \leqq x \leqq 1 \right\}$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f. $\quad \operatorname{grad} f\left(\binom{x}{y}\right) = \begin{pmatrix} 12x^2 \\ 6y \end{pmatrix}$

(b) Schreiben Sie die drei Gleichungen auf, die zur Bestimmung kritischer Stellen von f auf M nach der Methode von Lagrange benötigt werden.

$$\begin{aligned} 12x^2 - 2\lambda x &= 0\,, \\ 6y + \lambda &= 0\,, \\ -x^2 + y &= 0\,. \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f auf M.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Finden Sie die Stellen, an denen f auf M ihren größten bzw. kleinsten Wert annimmt.

größter Wert bei $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad$ kleinster Wert bei $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\; x \mapsto (1+x^2)^2 \arctan(x)$.

(a) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von f.

$f'(x) = \big(1 + x^2\big)\big(1 + 4x \arctan(x)\big)$

$f''(x) = 6x + 4(1 + 3x^2) \arctan(x)$

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt 0.

$T_2(f, x, 0) = x$

(c) Bestimmen Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $T_2(f, x, 0) = T_2(g, x, 0)$ und $g(1) = 2$.

z.B. $\; g(x) = x + x^3 \;$ oder $\; g(x) = x - x^3(x-1) + x^{30}\mathrm{e}^{x^7 - 1}$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)
Gegeben sei für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\alpha-1)^2 \\ 0 & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 3 & \alpha-2 \end{pmatrix}$, sowie $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $A_\alpha x = b$ für $\alpha = 0$.

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}}$$

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A_α in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\det(A_\alpha) = \boxed{(\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha-2)}$$

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ genau eine Lösung?

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}}$$

(d) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ keine Lösung?

$$\boxed{\alpha \in \{-1, 1\}}$$

Aufgabe 11 (*5 Punkte*)
Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $\varphi(v) := v + \left(v \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Bestimmen Sie ${}_E\big(\varphi(e_2)\big)$ und ${}_E\varphi_E$ bezüglich der Standardbasis $E: e_1, e_2, e_3$ von $\mathbb{R}^3$.

$${}_E\big(\varphi(e_2)\big) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad {}_E\varphi_E = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Wir betrachten die Orthonormalbasis B: $b_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_B\varphi_B$.

$${}_E\mathrm{id}_B = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\varphi_B = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$
