Aufgabe 1 (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+3^n}{7^n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9}{(2n+1)^2} \cdot \dbinom{n}{n-2}$, wobei mit dem zweiten Faktor ein Binomialkoeffizient gemeint ist

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2^n \cdot n!}$

(a) Es ist

$$\sqrt[n]{\frac{n^2+3^n}{7^n}} = \frac{3}{7}\sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}+1}.$$

Damit ist

$$\frac{3}{7} \xleftarrow{n\to\infty} \frac{3}{7}\sqrt[n]{1} \leqq \frac{3}{7}\sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}+1} \leqq \frac{3}{7}\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{7}.$$

Wir erhalten dann nach dem Sandwichsatz, dass die Folge gegen $\frac{3}{7}$ konvergiert.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{9}{(2n+1)^2} \cdot \binom{n}{n-2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{4n^2+4n+1} \cdot \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{4n^2+4n+1} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2-9n}{8n^2+8n+2} = \frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-1/2}.$$

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(2n+1) - \ln(n))$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n^6+4n} - \sqrt{n^6+1}\right)$

(a) Wir betrachten $a_n = \ln(2n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$.

Wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln(2) \neq 0$. Damit ist $(a_n)_{n\geqq 1}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent.

(b) Wir betrachten

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n^6+4n} - \sqrt{n^6+1} = \left(\sqrt{n^6+4n} - \sqrt{n^6+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^6+4n} + \sqrt{n^6+1}}{\sqrt{n^6+4n} + \sqrt{n^6+1}} \\ &= \frac{4n-1}{\sqrt{n^6+4n} + \sqrt{n^6+1}}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $0 \leqq b_n \leqq \dfrac{4n-1}{2\sqrt{n^6}} \leqq \dfrac{5n}{2n^3} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{n^2}$. Da die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ (absolut) nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & , \text{ für } x \leqq -1\ , \\ 2x\cos(\frac{\pi}{3}x) & , \text{ für } x > -1\ . \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie die Funktion f an der Stelle $x_0 = -1$ auf Stetigkeit.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von f für $x \in (-\infty, -1]$, sowie für $x \in (-1, \infty)$.

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ so, dass f in x stetig differenzierbar ist.

(a) Untersuche f an der Stelle $x_0 = -1$ auf Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1-0} f(x) &= \lim_{x\to -1-0} -\sqrt{-x} = -\sqrt{-(-1)} = -1 = f(-1) \text{ und} \\ \lim_{x\to -1+0} f(x) &= \lim_{x\to -1+0} 2x\cos(\tfrac{\pi}{3}x) = -2\cos(\tfrac{\pi}{3}(-1)) = -1\ . \end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = f(-1) = \lim\limits_{x\to -1+0} f(x)$ ist f stetig in -1.

(b) Wenn wir f auf das Intervall $(-\infty, -1]$ einschränken, erhalten wir

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}$$

(dabei ist an der Stelle -1 nur einseitige Differenzierbarkeit von links gegeben), wenn wir f auf das Intervall $(-1, +\infty)$ einschränken, erhalten wir

$$f'(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \frac{2\pi}{3}x\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right).$$

(c) Untersuche f an der Stelle $x_0 = -1$ auf stetige Differenzierbarkeit:

Wenn die (nicht eingeschränkte) Funktion f in -1 überhaupt differenzierbar wäre, dann wäre die Ableitung $f'(-1)$ gleich der (einseitigen) Ableitung der Einschränkung von f auf das halboffene Intervall $(-\infty, -1]$. Also gleich $\frac{1}{2}$, wie oben bestimmt.

Wenn also f in -1 stetig differenzierbar wäre, müssten insbesondere die rechts- und linksseitigen Grenzwerte der Ableitung übereinstimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1-0} f'(x) &= \lim_{x\to -1-0} \frac{1}{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2\sqrt{-(-1)}} = \frac{1}{2} = f'(-1) \quad \text{ und} \\ \lim_{x\to -1+0} f'(x) &= \lim_{x\to -1+0} 2\cos(\tfrac{\pi}{3}x) - \tfrac{2\pi}{3}x\sin(\tfrac{\pi}{3}x) = 2\cos(-\tfrac{\pi}{3}) + \tfrac{2\pi}{3}\sin(-\tfrac{\pi}{3}) \\ &= 2\frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ . \end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to -1-0} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to -1+0} f'(x)$ ist f' nicht stetig in -1 und f hier daher auch nicht stetig differenzierbar. Auf $\mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}$ ist f als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen stetig differenzierbar.

Alternativ:

Untersuche f an der Stelle $x_0 = -1$ auf Differenzierbarkeit:

Für die Differenzierbarkeit betrachten wir den Differenzenquotienten. Damit der Grenzwert existiert, müssen links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten existieren und gleich sein. Wir erhalten mit der Regel von l'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to -1-0} \frac{-\sqrt{-x}+1}{x+1} &\overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{x\to -1-0} \frac{1}{2\sqrt{-x}} &= \frac{1}{2}, \\
\lim_{x\to -1+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to -1+0} \frac{2x\cos(\frac{\pi}{3}x)+1}{x+1} &\overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{x\to -1+0} 2\cos(\tfrac{\pi}{3}x) - \tfrac{2\pi}{3}x\sin(\tfrac{\pi}{3}x) &= 1-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Daher ist f an der Stelle $x_0 = -1$ nicht differenzierbar (und schon gar nicht stetig differenzierbar).

Auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ist f als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen stetig differenzierbar.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

(a) Die Kurve K in $\mathbb{R}^2$ sei die einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie um den Ursprung mit Radius $\frac{5}{3}$. Berechnen Sie

$$\int_K 4\,\mathrm{d}\,s.$$

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1 \mathrm{e}^{x_2 - x_3}$. Weiter sei die Kurve $\widetilde{K}$ parametrisiert durch

$C\colon [-1,3] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 3-t \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

$$\int_{\widetilde{K}} \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x.$$

(a) Es ist $\int_K 4\,\mathrm{d}s = 4\int_K 1\,\mathrm{d}s = 4 \cdot L(K)$, wobei $L(K)$ die Länge der Kreislinie K ist. Damit ist $\int_K 4\,\mathrm{d}s = 4 \cdot 2\pi \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3}\pi$.

Alternative: Eine Parametrisierung der betrachteten Kurve ist zum Beispiel

$$C\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\cos(t) \\ \frac{5}{3}\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$\int_K 4\,\mathrm{d}\,s = \int_0^{2\pi} 4 \cdot |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} 4 \cdot \frac{5}{3}\,\mathrm{d}\,t = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{5}{3} - 0 = \frac{40}{3}\pi.$$

(b) Ein Potential von ∇f ist offensichtlich f. Daher ist

$$\int_{\widetilde{K}} \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = f(C(3)) - f(C(-1)) = f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 3\mathrm{e}^{-6} + \mathrm{e}^{-2}.$$

Alternative: Zunächst berechnen wir den Gradienten von f. Es ist

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x_2-x_3} \\ x_1\mathrm{e}^{x_2-x_3} \\ -x_1\mathrm{e}^{x_2-x_3} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\int_{\widetilde{K}} \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\, x &= \int_{-1}^{3} \nabla f(C(t)) \bullet C'(t) \,, \mathrm{d}\, x \\
&= \int_{-1}^{3} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t-3} \\ t\mathrm{e}^{-t-3} \\ -t\mathrm{e}^{-t-3} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\, t \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-t-3}\right]_{-1}^{3} + \left[t\mathrm{e}^{-t-3}\right]_{-1}^{3} - \int_{-1}^{3} \mathrm{e}^{-t-3}\, \mathrm{d}\, t \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-t-3}\right]_{-1}^{3} + \left[t\mathrm{e}^{-t-3}\right]_{-1}^{3} - \left[-\mathrm{e}^{-t-3}\right]_{-1}^{3} \\
&= 3\mathrm{e}^{-6} + \mathrm{e}^{-2}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem $F : f_1, f_2, f_3$ mit $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_1, b_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Bestimmen Sie $|p - b_4|^2$ für $p = \langle f_1 \,|\, b_4 \rangle f_1 + \langle f_2 \,|\, b_4 \rangle f_2$.

(a) Wir müssen das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren anwenden. Der erste Vektor ist dabei

$$f_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Der nächste Vektor ist gegeben durch $f_2 = \frac{f_2^*}{|f_2^*|}$ mit

$$\begin{aligned} f_2^* &= b_2 - \langle b_2 \,|\, f_1 \rangle f_1 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ also } f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Der letzte Vektor ist gegeben durch $f_3 = \frac{f_3^*}{|f_3^*|}$ mit

$$\begin{aligned} f_3^* &= b_3 - \langle b_3 \,|\, f_1 \rangle f_1 - \langle b_3 \,|\, f_2 \rangle f_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also $f_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(b) Da F eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bildet, ist $b_4 = \langle f_1 \,|\, b_4 \rangle f_1 + \langle f_2 \,|\, b_4 \rangle f_2 + \langle f_3 \,|\, b_4 \rangle f_3$. Daher folgt

$$|p - b_4|^2 = |\langle f_3 \,|\, b_4 \rangle f_3|^2 = \langle f_3 \,|\, b_4 \rangle^2 = \frac{1}{3} \left\langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle^2 = 3.$$

Alternative: Wir berechnen

$$\langle f_1 \,|\, b_4 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \langle f_2 \,|\, b_4 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

Damit erhalten wir

$$p = \langle\, f_1 \,|\, b_4 \rangle\, f_1 + \langle\, f_2 \,|\, b_4 \rangle\, f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt dann schließlich

$$|p - b_4|^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|^2 = 3.$$

Aufgabe 6 (*15 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto 21x_1^2 + 9x_2^2 - 16x_1x_2 - 5x_1 - 10x_2 \ .$$

Die Niveaumenge $\mathcal{Q}_0 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0 \right\}$, von f zum Niveau 0, enthält den Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und ist eine Ellipse.

(a) Bestimmen Sie eine euklidsche Normalform von $\mathcal{Q}_0$ und ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{G}$ in dem $\mathcal{Q}_0$ diese Normalform besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Halbachsenlängen von $\mathcal{Q}_0$.

(c) Skizzieren Sie bezüglich Standardkoordinaten die Quadrik $\mathcal{Q}_0$ und das Koordinatensystem $\mathbb{G}$.

(d) Bestimmen Sie bezüglich Standardkoordinaten die Tangente an $\mathcal{Q}_0$ im Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und zeichnen Sie diese in Ihre Skizze aus **(c)** ein.

(a) In Matrixschreibweise lautet die Gleichung der Quadrik $\mathcal{Q}_0$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 21 & -8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -5 \end{pmatrix}}_{a^\intercal} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (21-\lambda)(9-\lambda) - 64 = \lambda^2 - 30\lambda + 125 \ .$$

Wir erhalten $\lambda^2 - 30\lambda + 125 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{30 \pm \sqrt{900-500}}{2} = 15 \pm 10$. Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = 5$.

Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 25$ ist der Lösungsraum $V(\lambda_1)$ des LGS

$$\left[\begin{array}{cc||c} -4 & -8 & 0 \\ -8 & -16 & 0 \end{array}\right] .$$

Dieser Lösungsraum wird z.B. aufgespannt durch den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Einen Eigenvektor v_2 zu $\lambda_2 = 5$ bestimmt man analog, etwa $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(Alternativ kann man verwenden, dass A symmetrisch ist: Somit sind die Eigenräume zu λ_1 und λ_2 orthogonal.)

Eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren erhält man, indem man die Eigenvektoren normiert:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(Man beachte, dass auch $-v_1$ bzw. $-v_2$ normierte Eigenvektoren sind, aber bis auf das Vorzeichen und Reihenfolge sind diese Vektoren hier eindeutig bestimmt.)

Dies liefert die Transformationsmatrix $F := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = (0; v_1, v_2) = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right); \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right)$ hat unsere Quadrik die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= y^\intercal (F^\intercal A F) y + 2 (F^\intercal a)^\intercal y \\ &= y^\intercal \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} y + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -5 \end{pmatrix} \right)^\intercal y \\ &= 25 y_1^2 + 5 y_2^2 - 5\sqrt{5}\, y_2 . \end{aligned}$$

Durch quadratische Ergänzung verschieben wir den Ursprung und beseitigen damit den linearen Term:

$$5y_2^2 - 5\sqrt{5}\, y_2 = 5 \left(y_2^2 - \sqrt{5} y_2 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4} \right) = 5 \left(y_2 - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{25}{4}.$$

Dies liefert den neuen Ursprung P mit Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$, umgerechnet in Anfangskoordinaten $\mathbb{E}$:

$$P = {}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}P) = F\, {}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das neue Koordinatensystem $\mathbb{G} = (P; v_1, v_2) = \left(\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{smallmatrix}\right); \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right)$.

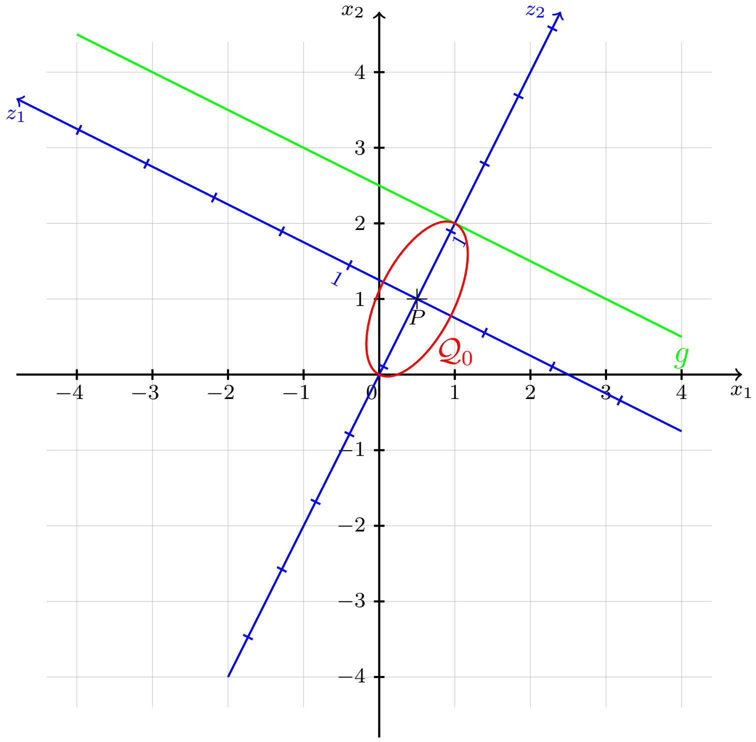
In den neuen Koordinaten $z_1 = y_1$ und $z_2 = y_2 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ wird die Quadrik beschrieben durch die Gleichung $25 z_1^2 + 5 z_2^2 - \frac{25}{4} = 0$.

Division durch $-\frac{25}{4}$ liefert die euklidische Normalform $-4z_1^2 - \frac{4}{5} z_2^2 + 1 = 0$.

(b) Es ergeben sich die Halbachsenlängen

$$h_1 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad h_2 = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

(c) Insgesamt ergibt sich die folgende Skizze:



(d) Es steht $\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ senkrecht auf der Tangente g durch $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$ an die Niveaumenge $\mathcal{Q}_0$.

Ein Richtungsvektor von g ergibt sich dadurch als z.B. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^\intercal$. Damit wird g beschrieben durch

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ , mit } t \in \mathbb{R}\,.$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Es sei $w = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

(a) Bestimmen Sie den Betrag und das Argument von w

$$|w| = \boxed{2}\ , \qquad \arg w = \boxed{\frac{\pi}{6}} \in [0, 2\pi)\ .$$

(b) Bestimmen Sie $\arg\left(w^{77}\right) = \boxed{\frac{5}{6}\pi}$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{i}^{25} = \boxed{\mathrm{i}}$.

(d) Geben Sie $\frac{w^{77}}{(8\mathrm{i})^{25}}$ in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\frac{w^{77}}{(8\mathrm{i})^{25}} = \boxed{2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Für den Untervektorraum $V := \left\{ M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, M = M^\intercal \right\}$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sind durch

$$B:\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$C:\ C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zwei Basen gegeben. Weiter sei die lineare Abbildung $\alpha\colon V \to V\colon X \mapsto A^\intercal X + XA$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Stellen Sie C_2 und $\alpha(B_2)$ als Linearkombination der Basisvektoren aus B dar.

$$C_2 = \boxed{1} \cdot B_1 + \boxed{2} \cdot B_2 + \boxed{0} \cdot B_3$$

$$\alpha(B_2) = \boxed{4} \cdot B_1 + \boxed{1} \cdot B_2 + \boxed{2} \cdot B_3$$

(b) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_B\mathrm{id}_C$, ${}_B\alpha_B$ und ${}_B\alpha_C$.

$${}_B\mathrm{id}_C = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\alpha_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \qquad {}_B\alpha_C = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (*2 Punkte*)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Das Taylorpolynom zweiter Stufe von f am Entwicklungspunkt $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ sei

$$T_2\left(f, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)\right) = 2021 + 1(x-1) + 2(x-1)^2 + 3(y-2) - 4(x-1)(y-2).$$

Geben Sie die Hessematrix von f im Punkt $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ an und bestimmen Sie $T_1\left(f, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)\right)$.

$$\mathrm{H}f\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right) = \boxed{\begin{pmatrix}4 & -4\\ -4 & 0\end{pmatrix}} \qquad T_1\left(f, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)\right) = \boxed{2021 + (x-1) + 3(y-2).}$$

Aufgabe 10 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8000$ und die Menge $M = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten, die Hessematrix und das Minimum von f.

$$\operatorname{grad} f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = \boxed{\begin{pmatrix}2x_1 - 4\\ 2x_2 - 4\end{pmatrix}} \qquad \mathrm{H}f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = \boxed{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}} \qquad \min\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^2\right\} = \boxed{7992}$$

(b) Schreiben Sie die drei Gleichungen auf, die zur Bestimmung kritischer Stellen von f auf M nach der Methode von Lagrange benötigt werden.

$$\begin{aligned}0 &= (1+\lambda)x_1 - 2\\ 0 &= (1+\lambda)x_2 - 2\\ 0 &= x_1^2 + x_2^2 - 1.\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f auf M.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$
