**Aufgabe 1** (*4 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

**(a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^n \sqrt{n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[10]{n!}}$

---

**(a)** Für $a_n = \left(\frac{3}{\pi}\right)^n \sqrt{n}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{3}{\pi}\right)^n \sqrt{n}\right|} = \frac{3}{\pi}\sqrt{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{3}{\pi} < 1.$$

Daher ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium konvergent.

**Alternative:** Für $a_n = \left(\frac{3}{\pi}\right)^n \sqrt{n}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\left(\frac{3}{\pi}\right)^{n+1} \sqrt{n+1}}{\left(\frac{3}{\pi}\right)^n \sqrt{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\pi} < 1.$$

Daher ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium konvergent.

**(b)** Für $b_n = \frac{1}{\sqrt[10]{n!}}$ gilt

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt[10]{(n+1)!}}}{\frac{1}{\sqrt[10]{n!}}}\right| = \frac{1}{\sqrt[10]{n+1}} \leqq \frac{1}{\sqrt[10]{2}} < 1.$$

Daher ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach dem Quotientenkriterium konvergent.

**Alternative:** Für $b_n = \frac{1}{\sqrt[10]{n!}}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{\sqrt[10]{n!}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[10]{\sqrt[n]{n!}}} \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[10]{\sqrt[n]{2^n}}} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} < 1.$$

Daher ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach dem Wurzelkriterium konvergent.

**Aufgabe 2** (*3 Punkte*) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(3^n - 1)z^n$ und stellen Sie $f$ innerhalb ihrer Konvergenzkreisscheibe als gebrochen-rationale Funktion in $z$ dar.

---

Wir setzen $a_n = 3^n - 1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-1}{3^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3^n}} = 3.$$

Daher ist der Konvergenzradius $\rho_f = \dfrac{1}{3}$.
Mit der geometrischen Reihenformel ist für $z \in U_{\rho_f}(0)$

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(3^n-1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}3^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \frac{1}{1-3z} - \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{1-z-1+3z}{(1-3z)(1-z)} = \frac{2z}{1-4z+3z^2}. \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen ist hier richtig, da alle drei Reihen für $z \in U_{\rho_f}(0)$ konvergent sind.

**Aufgabe 3** (*5 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$g : (-1,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{g(x)} + 7x.$$

**(a)** Ist $g$ in $x_0 = 0$ stetig?

**(b)** Bestimmen Sie $g'(x)$ für $x \neq 0$ sowie $\lim_{x\to 0} g'(x)$.

**(c)** Zeigen Sie, dass $f$ in $x_0 = 0$ differenzierbar ist, indem Sie den Differentialquotienten bestimmen.

---

**(a)** Wegen $|\cos(t)| \leqq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $-|x| \leqq x^3 \leqq |x|$ für $x \in (-1,1)$ gilt $-|x| \leqq x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqq |x|$, womit wir aus dem Sandwichsatz wegen $\lim_{x\to 0} -|x| = 0 = \lim_{x\to 0} |x|$

$$0 = \lim_{x\to 0} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} g(x)$$

erhalten. Folglich ist $g$ in $x_0 = 0$ stetig.

**(b)** Für $x \neq 0$ ergibt sich mit Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(-1 \cdot x^{-2}\right) \\ &= 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Für $\lim_{x\to 0} g'(x)$ nutzen wir $|\cos(t)| \leqq 1$ und $|\sin(t)| \leqq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da ferner $x^2 \leqq |x|$ für $x \in (-1,1)$ gilt, erhalten wir aus der Dreiecksungleichung die Abschätzung $-4|x| \leqq 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqq 4|x|$. Mit dem Sandwichsatz folgt nun aus $\lim_{x\to 0} -4|x| = 0 = \lim_{x\to 0} 4|x|$ für den zu bestimmenden Grenzwert:

$$0 = \lim_{x\to 0} 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} g'(x).$$

**(c)** Es gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)} + 7x - 1}{x}$$

Hier liegt ein Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$“ vor. Wegen (a) und Stetigkeit von $\mathrm{e}^t$ darf l'Hospital angewandt werden. Wir erhalten somit

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mathrm{e}^{x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)} + 7}{1} = 7,$$

wobei wir im letzten Schritt die Stetigkeit von $g$ und $g'$ in $x_0 = 0$ aus (a) und (b) verwenden.

**Aufgabe 4** (*9 Punkte*)

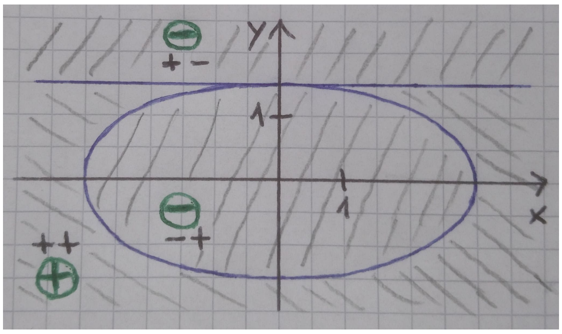
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto (x^2+4y^2-9)(3-2y)$ .

**(a)** Skizzieren Sie die Niveaumenge von $f$ zum Niveau $0$.
Markieren Sie in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen $f$ nur positive Werte annimmt, mit "$\oplus$" und die Bereiche, in denen $f$ nur negative Werte annimmt, mit "$\ominus$".

**(b)** Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f$.
Entscheiden Sie für jede kritische Stelle, welcher Typ (Sattelpunkt, lokales Maximum/Minimum) dort vorliegt.

---

**(a)** Gesucht ist die Niveaumenge von $f$ zum Niveau $0$, d.h. mit anderen Worten, gesucht ist die Nullstellenmenge von $f$. Für $f\binom{x}{y} = (x^2+4y^2-9)(3-2y)$ ist $f\binom{x}{y} = 0$ genau dann, wenn $3-2y=0$ oder $x^2+4y^2-9=0$ ist. Dies ist äquivalent zu $y=\frac{3}{2}$ bzw. $-\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{9}y^2+1=0$. Somit ist die Nullstellenmenge von $f$ die Vereinigung der Geraden $y=\frac{3}{2}$ und der Ellipse mit Halbachsenlängen $3$ (in $x$-Richtung) und $\frac{3}{2}$ (in $y$-Richtung). Damit erhalten wir eine Skizze der Nullstellenmenge:




Die Nullstellenmenge ist dabei blau skizziert. Die Vorzeichenverteilung erhält man durch Betrachten der Vorzeichen der Faktoren von $f\binom{x}{y} = (x^2+4y^2-9)(3-2y)$. Diese sind in der Skizze schwarz eingezeichnet als "$+-$", "$++$", "$-+$". Daraus resultieren die grün eingezeichneten Vorzeichen "$\ominus$" bzw. "$\oplus$" für die Bereiche, in denen $f$ nur negative bzw. positive Werte annimmt.

**(b)** Wir bestimmen zunächst die kritischen Stellen von $f$. Es ist

$$\nabla f\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 2x(3-2y) \\ 8y(3-2y)-2(x^2+4y^2-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(3-2y) \\ -2(x^2+12y^2-12y-9) \end{pmatrix}.$$

Die erste Komponente von $\nabla f\binom{x}{y}$ wird genau dann gleich Null, wenn $x=0$ oder $y=\frac{3}{2}$ ist.

- *1. Fall:* Falls $x=0$ ist, so wird die zweite Komponente genau dann gleich Null, wenn $12y^2-12y-9=0 \iff 4y^2-4y-3=0$ erfüllt ist. Wir erhalten $y_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16+48}}{8} = \frac{1}{2}\pm 1$, womit $y_1=\frac{3}{2}$ und $y_2=-\frac{1}{2}$ Lösungen sind. Damit ergeben sich die kritischen Stellen

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- *2. Fall:* Falls $y = \frac{3}{2}$ ist, so wird die zweite Komponente genau dann gleich Null, wenn $x^2 + 12\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{3}{2}\right) - 9 = 0$ gilt. Daraus folgt unmittelbar $x^2 = 0$, also $x = 0$. Dies ergibt die bereits gefundene kritische Stelle $P_1$.

Zur Klassifikation der kritischen Stellen betrachen wir die Hesse-Matrix von $f$:

$$\mathrm{H}f\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 2(3-2y) & -4x \\ -4x & 8(3-2y) - 32y \end{pmatrix}.$$

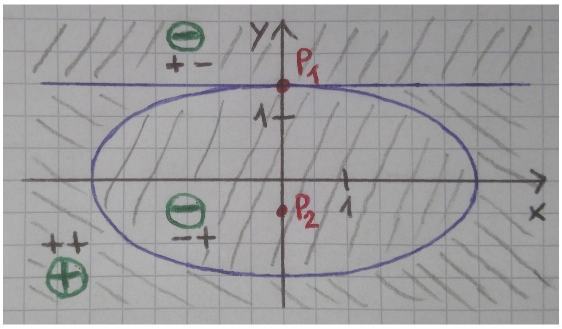
Es ist damit

$$\mathrm{H}f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{H}f(P_2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 48 \end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f(P_2)$ ist positiv definit. Also ist $P_2$ die Stelle eines lokalen Minimums.
Um $P_1$ treten in der Vorzeichenverteilung aus (a) sowohl negative als auch positive Funktionswerte auf. Somit liegt bei $P_1$ ein Sattelpunkt vor.
(Wegen $\det(\mathrm{H}f(P_1)) = 0$ erlaubt die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f(P_1)$ in diesem Fall keine Entscheidung über den Typ der kritischen Stelle $P_1$.)

**Alternative Argumentation für die Klassifikation der kritischen Stellen:**
Wir können den jeweiligen Typ der kritischen Stellen auch ohne Kenntnis der Hesse-Matrix bestimmen, indem wir die Vorzeichenverteilung aus (a) verwenden.
Um $P_1$ treten in der Vorzeichenverteilung aus (a) sowohl negative als auch positive Funktionswerte auf. Somit liegt bei $P_1$ ein Sattelpunkt vor.
In der Skizze aus (a) sei $M$ die abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die von der Ellipse eingeschlossen wird. Da $f$ stetig und $M$ kompakt ist, nimmt $f$ auf $M$ ein Minimum an. Da $f$ auf dem Rand von $M$ gleich Null ist und auf $M^\circ$ negativ, wird dieses Minimum in $M^\circ$ angenommen. Dort liegt also eine kritische Stelle von $f$ vor. Da $P_2$ die einzige kritische Stelle im Innern von $M$ ist, liegt damit bei $P_2$ ein lokales Minimum vor.

Zwar nicht verlangt, für diese alternative Argumentation aber nützlich ist es, die kritischen Stellen einzuzeichnen:



**Aufgabe 5** (*6 Punkte*) Gegeben seien die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\frac{\sqrt{2}}{1+x_1^2+x_2^2}$$

sowie die mittels

$$C:\left[0,\ln(\sqrt{3})\right]\to\mathbb{R}^2:t\mapsto \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}$$

parametrisierte Kurve $K$.

**(a)** Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}\,t$.

**(b)** Bestimmen Sie $C'(t)$.

**(c)** Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$.

---

**(a)** Mit Hilfe der Substitution $u(t):=\mathrm{e}^t$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}\,t&=\int\frac{\mathrm{e}^t}{1+\left(\mathrm{e}^t\right)^2}\,\mathrm{d}\,t\\&=\int\frac{u'(t)}{1+\left(u(t)\right)^2}\,\mathrm{d}\,t\\&=\int\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u\\&=\left[\arctan(u)\right]\\&=\left[\arctan(\mathrm{e}^t)\right].\end{aligned}$$

**(b)** Es gilt

$$C'(t)=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\cos(t)-\sin(t)\\\sin(t)+\cos(t)\end{pmatrix}.$$

**(c)** Es gilt

$$\begin{aligned}|C'(t)|&=\mathrm{e}^t\sqrt{\left(\cos(t)-\sin(t)\right)^2+\left(\cos(t)+\sin(t)\right)^2}\\&=\mathrm{e}^t\sqrt{\left(\cos(t)\right)^2-2\cos(t)\sin(t)+\left(\sin(t)\right)^2+\left(\cos(t)\right)^2+2\cos(t)\sin(t)+\left(\sin(t)\right)^2}\\&=\mathrm{e}^t\sqrt{2\cdot\left(\left(\cos(t)\right)^2+\left(\sin(t)\right)^2\right)}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s &= \int_0^{\ln(\sqrt{3})} f(C(t)) \cdot |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{\ln(\sqrt{3})} \left( \frac{\sqrt{2}}{1 + \left(\mathrm{e}^t \cos(t)\right)^2 + \left(\mathrm{e}^t \sin(t)\right)^2} \right) \cdot \sqrt{2}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\,t \\
&= 2 \int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{\mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}^{2t}\left((\cos(t))^2 + (\sin(t))^2\right)} \,\mathrm{d}\,t \\
&= 2 \int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{\mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}^{2t}} \,\mathrm{d}\,t \\
&\overset{\text{(a)}}{=} 2 \left[\arctan\left(\mathrm{e}^t\right)\right]_0^{\ln(\sqrt{3})} \\
&= 2 \left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1)\right) \\
&= 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt lesen wir aus der Tabelle $\sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ sowie $1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und damit $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ sowie $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ab.

**Aufgabe 6** (*5 Punkte*) Gegeben sei die reelle $3 \times 3$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $A$.

**(b)** Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $A$.

**(c)** Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von $A$ den zugehörigen Eigenraum.

---

**(a)** Aufgrund der Blockdreiecksstruktur (oder einfach durch Entwickeln nach der ersten Zeile) von $A$ erhalten wir

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = (2-\lambda)((1-\lambda)(1-\lambda)-25) = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-24) = (2-\lambda)(\lambda-6)(\lambda+4).$$

**(b)** Die Eigenwerte sind $2, 6, -4$.

**(c)** Um $V(2)$ zu bestimmen, lösen wir das lineare Gleichungssystem $(A - 2E_3)v = 0$ :

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Das Gaußverfahren liefert

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr||r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Somit folgt $V(2) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Um $V(6)$ zu bestimmen, lösen wir das lineare Gleichungssystem $(A - 6E_3)v = 0$ :

$$\left[\begin{array}{rrr||r} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Das Gaußverfahren liefert

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Somit folgt $V(6) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Um $V(-4)$ zu bestimmen, lösen wir das lineare Gleichungssystem $(A + 4E_3)v = 0$ :

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

Das Gaußverfahren liefert

$$\left[\begin{array}{rrr||r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Somit folgt $V(-4) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

**Aufgabe 7** (*8 Punkte*) Für eine reelle Zahl $t$ mit $t > 0$ sei die Quadrik $\mathcal{Q}_t$ definiert durch

$$\mathcal{Q}_t := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 2tx_1x_2 + x_2^2 + t = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t$ eine euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}_t$.
Geben Sie auch ein kartesisches Koordinatensystem an, in dem diese Normalform angenommen wird.

---

Die Gleichung für $\mathcal{Q}_t$ ist gegeben durch $x^\intercal A_t x + t = 0$ mit

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von $A_t$ lautet $\chi_{A_t}(\lambda) = \det(A_t - \lambda E_2) = \lambda^2 - 2\lambda - (t^2 - 1)$. Aus $\chi_{A_t}(\lambda) \stackrel{!}{=} 0$ bekommt man die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1 + t$ und $\lambda_2 = 1 - t$.

Den Eigenraum $V(\lambda_1)$ zu $\lambda_1$ erhält man durch Lösen des LGS $(A_t - \lambda_1 E_2)x = 0$, welches explizit gegeben ist durch $\left[\begin{array}{cc||c} -t & t & 0 \\ t & -t & 0 \end{array}\right]$. Ein Eigenvektor zu $\lambda_1$ ist damit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Einen Eigenvektor zu $\lambda_2$ kann man analog durch Lösen des LGS $(A_t - \lambda_2 E_2)x = 0$ bestimmen. Man findet zum Beispiel den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wir betrachten nun das neue Koordinatensystem $\mathbb{F} = (0; v_1, v_2) = \left( \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right); \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right)$.

Bezüglich $\mathbb{F}$ ist die Quadrik gegeben durch die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= y^\intercal \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} y + t \\ &= (1+t)y_1^2 + (1-t)y_2^2 + t. \end{aligned}$$

Division durch $t$ liefert die euklidische Normalform $\dfrac{1+t}{t} y_1^2 + \dfrac{1-t}{t} y_2^2 + 1 = 0$.
Um die Gestalt von $Q_t$ zu bestimmen, führen wir eine Fallunterscheidung durch.

Im Fall $t > 1$ ist ein Koeffizient in der Normalform positiv und der andere negativ. Demnach handelt es sich bei $Q_t$ um eine Hyperbel.

Im Fall $0 < t \leqq 1$ ist keiner der Koeffizienten negativ und $Q_t$ ist leer – kein Punkt in $\mathbb{R}^2$ erfüllt die Gleichung.

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studiengang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

**Aufgabe 8** (*4 Punkte*) Es sei $z = 2\mathrm{i} - 2$.

**(a)** Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von $z$.

$$|z| = \boxed{2\sqrt{2}} \qquad \varphi = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

**(b)** Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $w^3 = z$. Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten an.

$$w_0 = \sqrt{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{4})), \quad w_1 = \sqrt{2}(\cos(\tfrac{11\pi}{12}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{11\pi}{12})), \quad w_2 = \sqrt{2}(\cos(\tfrac{19\pi}{12}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{19\pi}{12}))$$

**Aufgabe 9** (*3 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

**(a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \det \begin{pmatrix} \sqrt[n]{5} & 5 \\ \sqrt[n]{5} & \sqrt[n]{5} \end{pmatrix} = \boxed{-4}$

**(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n^2+1} \left\| \begin{pmatrix} 3n \\ 2n^2 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \right\| = \boxed{\frac{2}{3}}$

**(c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Sp} \begin{pmatrix} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & (1+\ln(n))^n \\ (1+\mathrm{e}^{-n})^n & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\mathrm{e}}$

**Aufgabe 10** (*5 Punkte*)

**(a)** Berechnen Sie: $\displaystyle\int t\,\sin(\pi t)\,\mathrm{d}\,t = \boxed{\left[-\frac{t}{\pi}\cos(\pi t) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi t)\right]}$

**(b)** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \int_1^x t\,\sin(\pi t)\,\mathrm{d}\,t$. Bestimmen Sie für $f$ die erste und die zweite Ableitung, sowie das Taylorpolynom $T_2(f, x, 4)$ der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt $4$.

$$f'(x) = \boxed{x\sin(\pi x)}$$

$$f''(x) = \boxed{\sin(\pi x) + \pi x\cos(\pi x)}$$

$$T_2(f, x, 4) = \boxed{-\frac{5}{\pi} + 2\pi(x-4)^2}$$

**Aufgabe 11** (*4 Punkte*) Gegeben sei die reelle $4 \times 4$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & -8 \\ 1 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie den Rang von $A$.

$$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{2}$$

**(b)** Bestimmen Sie den Lösungsraum $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

$$\mathcal{L} = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

---

**Aufgabe 12** (*4 Punkte*) Gegeben seien drei Punkte $P = (1,0,0)^\intercal$, $Q = (0,1,0)^\intercal$ und $W = (0,0,2)^\intercal$ in $\mathbb{R}^3$. Sei $E$ die Ebene, die die Punkte $P, Q$ und $W$ enthält.

**(a)** Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von $E$.

$$\boxed{E\colon x = (1,0,0)^\intercal + \lambda(-1,1,0)^\intercal + \mu(-1,0,2)^\intercal\,;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

**(b)** Bestimmen Sie das Vektorprodukt $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PW}$.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PW} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

**(c)** Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene $E$.

$$\boxed{E\colon \left\langle \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)^\intercal \,\middle|\, x \right\rangle = \tfrac{2}{3}}$$

---