Klausur zur Höheren Mathematik 1

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 4** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 5 – 8** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 07.04.2025 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom 14.04.2025 bis 16.04.2025 einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 - 4 = 0 \right\} .$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem sowie ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{\intercal}$ der Koordinatenvektor des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right) .$$

(a) Bestimmen Sie den Standardkoordinatenvektor von P.

(b) Bestimmen Sie das Bild von $v \in \mathbb{R}^3$ unter der Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} ,$$

welche eine Spiegelung an der Ebene

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 \right\}$$

beschreibt, sowie die Ebene E, welche durch die Punkte $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $P_3 = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ verläuft.

(a) Bestimmen Sie eine Hesse-Normalform von E.

(b) Bestimmen Sie die Bildebene $E' := \varphi(E) = \{\varphi(x) \mid x \in E\}$.

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n!}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3-n}{n!}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter und

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Sei zunächst $\alpha = 3$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ von

$$A_3 v = 4v + b$$

mit $b = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$:

$$\mathcal{L} = \boxed{}$$

Im Folgenden sei $\alpha \in \mathbb{R}$ wieder beliebig.

(b) Bestimmen Sie die Determinante $\det(A_\alpha)$ in Abhängigkeit von α: $\det(A_\alpha) = \boxed{}$.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α nicht invertierbar? $\alpha \in \left\{ \boxed{} \right\}$

(d) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in faktorisierter Form:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \boxed{}$$

(e) Ein Eigenwert ist offenbar $\alpha + 1$. Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten ebendieses Eigenwertes in Abhängigkeit von α:

$$\boxed{}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Basen $B\colon\quad b_1\,,b_2\,,b_3$ von $\operatorname{Pol}_2\mathbb{C}$ und $C\colon\quad c_1\,,c_2\,,c_3\,,c_4\,,c_5$ von $\operatorname{Pol}_4\mathbb{C}$ mit

$$b_1(X)=1\quad,\quad b_2(X)=X\quad,\quad b_3(X)=X^2$$
$$c_1(X)=4\quad,\quad c_2(X)=3X\quad,\quad c_3(X)=2X^2\quad,\quad c_4(X)=-X^3\quad,\quad c_5(X)=X^4\,.$$

Wir definieren die lineare Abbildung $\varphi\colon\ \operatorname{Pol}_2\mathbb{C}\to\operatorname{Pol}_4\mathbb{C}\colon p\mapsto\varphi(p)$ mittels $\varphi(p)(X):=p(X^2-4)$.

(a) Bestimmen Sie $\varphi(b_3)$:

$\varphi(b_3)(X)=$

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_C\varphi_B$: ${}_C\varphi_B=$.

(c) Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von φ: $\dim(\operatorname{Bild}(\varphi))=$.

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sei $A\in\mathbb{R}^{2\times5}$ mit

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 1\\ -3 & 5 & -6 & 7 & 3\end{pmatrix}.$$

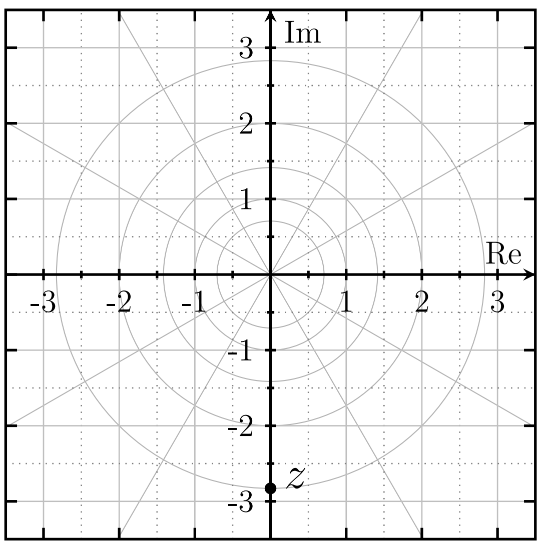
(a) Bestimmen Sie den Zeilenrang und den Spaltenrang von A.

Zeilenrang von A: Spaltenrang von A:

(b) Welche Dimension hat der Lösungsraum $\mathcal{L}\subsetneqq\mathbb{R}^5$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax=0$? $\dim\mathcal{L}=$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

In der komplexen Zahlenebene ist die komplexe Zahl z gegeben (siehe Skizze) als einer der Schnittpunkte der Imaginärachse und des Kreises durch $2+2\mathrm{i}$ mit Mittelpunkt 0.



(a) Bestimmen Sie $|z|$ und $\arg(z)$:

$|z|=$ $\arg(z)=$

(b) Ergänzen Sie die Skizze um die Lösungen w_1,w_2,w_3 der Gleichung $w^3=z$.
