Aufgabe 1 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 - 4 = 0 \right\} .$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

Wir schreiben die Quadrikgleichung zunächst in Matrixform und erhalten

$$x^\intercal \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} x + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}^\intercal x - 4 = 0.$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$.

Wir berechnen nun zugehörige Eigenvektoren

- $V(4)$:

$$\left[\begin{array}{rr||r} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr||r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Damit ist $V(4) = \mathrm{L}\left(\binom{1}{1}\right)$.

- $V(-2)$:

$$\left[\begin{array}{rr||r} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr||r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Damit ist $V(-2) = \mathrm{L}\left(\binom{1}{-1}\right)$.

In den neuen Koordinaten $y = \binom{y_1}{y_2}$, definiert durch $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) y \iff y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) x$ ergibt sich mit $\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)^\intercal \binom{2}{0} = \binom{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ die Gleichung

$$4y_1^2 - 2y_2^2 + 2\sqrt{2}y_1 + 2\sqrt{2}y_2 - 4 = 0.$$

Durch quadratisches Ergänzen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& 4\left(y_1^2 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}y_1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) - 2\left(y_2^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2\left(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2\left(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} = 0
\end{aligned}
$$

Mit $z_1 = y_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$ und $z_2 = y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ haben wir dann

$$4z_1^2 - 2z_2^2 - \frac{7}{2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{8}{7}z_1^2 + \frac{4}{7}z_2^2 + 1 = 0.$$

Aufgabe 2 (*11 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto -2y\mathrm{e}^{(x^2)}\,,$$
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto x^2 + y^2 - \frac{9}{2}\,.$$

sowie der Kreis

$$D := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0 \right\}\,.$$

Wir betrachten die Einschränkung $f|_D$ von f auf D. Bestimmen Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von $f|_D$.

Es gelten:

$$\nabla f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4xy\mathrm{e}^{(x^2)} \\ -2\mathrm{e}^{(x^2)} \end{pmatrix} \qquad \nabla g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Die einzige Stelle, an der ∇g null wird, ist im Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, welcher jedoch nicht in D enthalten ist. Wir finden also alle Kandidaten für Extrema mit Lagrange.

Bestimmen der kritischen Stellen

$$\begin{array}{crcl} \text{(I)} & -4xy\mathrm{e}^{(x^2)} + 2\lambda x & = & 0 \\ \text{(II)} & -2\mathrm{e}^{(x^2)} + 2\lambda y & = & 0 \\ \text{(III)} & x^2 + y^2 - \frac{9}{2} & = & 0 \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $\lambda = 2y\mathrm{e}^{(x^2)}$.

- $x = 0$: Aus (III) wird

  $$0 = y^2 - \frac{9}{2}$$

  Wir erhalten die kritischen Stellen

  $$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ und } S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\,.$$

  Der Wert von λ ist in diesem Falle gegeben durch $\lambda = \frac{1}{y} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ beziehungsweise $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
- $\lambda = 2y\mathrm{e}^{(x^2)}$: Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

  $$0 = -2\mathrm{e}^{(x^2)} + 4y^2\mathrm{e}^{(x^2)} = 2\left(2y^2 - 1\right)\mathrm{e}^{(x^2)}$$

und somit

$$y^2 = \frac{1}{2}$$

da $e^{(x^2)}$ nie Null wird.
Mit $x^2 = \frac{9}{2} - y^2 = 4$ erhalten wir die kritischen Stellen:

$$S_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad S_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$S_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad S_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

In diesem Falle ist $\lambda = -\sqrt{2}\,e^4$ (für S_3, S_5) beziehungsweise $\lambda = \sqrt{2}\,e^4$ (für S_4, S_6).

Bestimmung der Extrema:
Da f stetig und der Kreis D eine kompakte Menge ist, existieren Minimum und Maximum und wir müssen nur die Werte an den in Frage kommenden (kritischen) Stellen vergleichen.

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} f(S_1) &= 2e^0 \cdot \tfrac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \\ f(S_2) &= -3\sqrt{2} \\ f(S_3) &= -2e^{(-2)^2} \cdot \tfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}\,e^4 && = f(S_5) \\ f(S_4) &= -\sqrt{2}\,e^4 && = f(S_6) \end{aligned}$$

Wegen $e^4 > 2^4 = 16 > 3$ folgt

$$f(S_4) = f(S_6) < f(S_2) < f(S_1) < f(S_3) = f(S_5)$$

Die Maximalstellen sind also S_3 und S_5, die Minimalstellen S_4 und S_6.

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

(a) Führen Sie eine reelle Partialbruchzerlegung für den folgenden Ausdruck durch.

$$\frac{x}{(x-1)^2}$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$.

(c) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral konvergiert.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Mit dem Ansatz

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

ergibt sich die Bedingung $A(x-1)+B \overset{!}{=} x$, woraus durch Koeffizientenvergleich direkt $A=1$ und damit $B=A=1$ folgen, womit

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Alternativer Lösungsweg:

Durch eine geschickte Addition der Null gelangen wir unmittelbar zum Ergebnis:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x-1+1}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Mit der Substitution $u(x) = \frac{x+1}{2}$ (und entsprechend $u'(x) = \frac{1}{2}$) ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{1}{2}\arctan(u)\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

Das Polynom x^2+2x+5 hat reelle Koeffizienten, aber die Nullstellen

$$\mu_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 5}}{2} = -1\pm 2\mathrm{i}$$

sind nicht reell. Setzen wir $\beta := 2$, $\gamma := 5$, $\Delta := \gamma - \frac{\beta^2}{4} = 4$ und $u := \frac{x+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\Delta}}$, so ergibt sich gemäß der Formel aus der Vorlesung (Lemma 3.4.9):

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}\,x &= \left[\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\arctan(u)\right]\\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\arctan\left(\frac{x+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\Delta}}\right)\right]\\ &= \left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

(c) Da der Ausdruck $\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ in $x=0$ nicht definiert ist, muss auch das Verhalten für $x \to 0+0$ untersucht werden. Wir betrachten dazu $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Da $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)}{x^2} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x^2)\cdot 2x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos(x^2) = 1$, kann der Integrand stetig in $x_0 = 0$ fortgesetzt werden, sodass das Integral $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Alternative: Mit der Substitution $u = x^2$ können wir den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ auf den aus der Vorlesung bekannten Grenzwert $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin(u)}{u} = 1$ zurückführen, womit ebenfalls die stetige Fortsetzbarkeit und damit die Konvergenz des Integrals $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ gezeigt ist.

Alternative: Da auf $[0,1]$ die Ungleichung $\left|\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right| \leqq 1$ gilt, konvergiert $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium.

Nun betrachten wir $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Da $\left|\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right| \leqq \frac{1}{x^2}$ und $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergiert, konvergiert auch $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium.

Da beide Teilintegrale konvergieren, konvergiert damit auch

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{4+3n}}$$

Sei $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{4+3n}}$. Da die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist und die Reihe alterniert, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Leibnizkriterium.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{4+3n}} \geqq \frac{1}{\sqrt{7n}} \geqq \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{n}$.
Da die harmonische Reihe $\frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nach dem Minorantenkriterium und es liegt damit keine absolute Konvergenz vor.

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem sowie ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ der Koordinatenvektor des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right) .$$

(a) Bestimmen Sie den Standardkoordinatenvektor von P.

(b) Bestimmen Sie das Bild von $v \in \mathbb{R}^3$ unter der Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Die benötigten Koordinatentransformationen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(u) &= Fu + Q \\ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= F^{-1}(u - Q) \end{aligned}$$

mit

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Wir setzen die ${}_{\mathbb{F}}P$ in die entsprechende Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ ein:

$${}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) Wir berechnen F^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{r} 1/2 Z_1 : \\ -Z_2 - Z_1 : \\ Z_3 + 2Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_2: \\ Z_2 - Z_3: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix},$$

welche eine Spiegelung an der Ebene

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 \right\}$$

beschreibt, sowie die Ebene E, welche durch die Punkte $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $P_3 = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ verläuft.

(a) Bestimmen Sie eine Hesse-Normalform von E.

(b) Bestimmen Sie die Bildebene $E' := \varphi(E) = \{\varphi(x) \mid x \in E\}$.

(a) Da P_1 der Ursprung ist, können wir einen Normalenvektor n direkt über das normierte Kreuzprodukt der Ortsvektoren von P_2 und P_3 berechnen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 30 \\ -30 \end{pmatrix} = 15 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

womit wir

$$n = \frac{1}{15\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}}\begin{pmatrix} -15 \\ 30 \\ -30 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

erhalten. Da E den Ursprung erhält, erhalten wir als eine Hesse-Normalform folglich:

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \right\}$$

(b) Die Bildebene ist eindeutig durch die durch

$$\begin{aligned}
\varphi(P_1) &= \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \\
\varphi(P_2) &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -42-12+36 \\ -24+24-72 \\ 24+3+72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} \\
\varphi(P_3) &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 56+20-4+36 \\ 32+5+8-72 \\ -32+40+1+72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

gegebenen Punkte bestimmt.
Ein Stützvektor ist somit gegeben durch

$$u = \varphi(P_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

zwei Richtungsvektoren v, w erhalten wir mittels

$$\begin{aligned}
v = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) &= \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
w = \varphi(P_3) - \varphi(P_1) &= \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir erhalten hieraus:

$$\varphi(E) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Alternativer Lösungsweg:

Sei η ein Normalenvektor von E sowie $A := \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ der lineare Anteil von φ. Da φ als Isometrie Winkel erhält, gilt für beliebige Punkte $P, Q \in E$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q - P \,|\, \eta \rangle = \langle Q - P \,|\, (P + \eta) - P \rangle \\ &= \langle \varphi(Q) - \varphi(P) \,|\, \varphi(P + \eta) - \varphi(P) \rangle \\ &= \langle \varphi(Q) - \varphi(P) \,|\, A\eta \rangle \end{aligned}$$

Insbesondere ist infolge der Längentreue von $x \mapsto Ax$

$$\begin{aligned} n := A\eta &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -7 + 8 + 8 \\ -4 + 2 - 16 \\ 4 + 16 - 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Normalenvektor von $\varphi(E)$, da zu jedem Punkt P' in $\varphi(E)$ ein Punkt P in E mit $P' = \varphi(P)$ existiert.

Den Abstand zum Ursprung erhalten wir aus

$$0 = \langle \varphi(Q) - \varphi(P) \,|\, A\eta \rangle \qquad \text{bzw.} \qquad \langle \varphi(P) \,|\, A\eta \rangle = \langle \varphi(Q) \,|\, A\eta \rangle \,,$$

indem wir für P einen festen Punkt, z. B. P_1, einsetzen:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(P_1) \,|\, n \rangle &= \left\langle \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal\right) \middle|\, n \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \middle|\, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 12, \end{aligned}$$

Die Hesse-Normalform lautet also

$$\varphi(E) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 12 \right\}.$$

Alternativer Lösungsweg:

Die Ebene E ist offensichtlich parallel zur Spiegelebene S: Die Normalenvektoren stimmen (bis auf das Vorzeichen) überein. Somit haben diese beiden Ebenen keine Schnittgerade, sondern einen festen Abstand $\tilde{d}$, welcher – da E durch den Ursprungverläuft – dem Abstand der Ebene S zum Ursprung entspricht: $\tilde{d} = 6$.

Als Isometrie erhält φ Abstände und Winkel, somit liegt $\varphi(E)$ ebenfalls im Abstand 6 parallel zu S. Vom Ursprung aus gesehen liegt die Bildebene nur auf der anderen Seite von S, was, da ersterer in E enthalten ist, uns zwei Dinge folgern lässt:

- Der für die Normalform relevante Normalenvektor von $\varphi(E)$ entspricht dem von E bzw. S (in ersterem Falle bis auf das Vorzeichen)
- $\varphi(E)$ hat zum Ursprung Abstand 12

Wir erhalten die Darstellung

$$E' = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 12 \right\}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\sin(x^3)}{x}$.

(b) Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte.

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{7}{9}\right)^{n+1}$ (ii) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3}{n!}$ (iii) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3-n}{n!}$

(a) Mit der Regel von l'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin(x^3)}{x} \overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{3x^2\cos(x^3)}{1} = 0.$$

(b) (i) Mit der geometrischen Reihenformel ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} = \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^{n} \overset{[\frac{7}{9}<1]}{=} \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{7}{9}} = \frac{7}{2}.$$

(ii) Wir können die vorliegende Reihe auf die Exponentialreihe zurückführen durch

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n!} = 3\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} = 3\cdot\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right) - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) = 3\left(\mathrm{e} - \frac{5}{2}\right)$$

(iii) Mit Hilfe von Teil **(b) (ii)** erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3-n}{n!} &= \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{n!} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{n!} \overset{\textbf{(ii)}}{=} 3\mathrm{e} - \frac{15}{2} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\\ &= 3\mathrm{e} - \frac{15}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!} = 3\mathrm{e} - \frac{15}{2} - (\mathrm{e}-1-1) = 2\mathrm{e} - \frac{11}{2}.\end{aligned}$$

Name, Vorname:		Matrikel-Nummer:		Studiengang:	

Aufgabe 8 (*10 Punkte*) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter und

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Sei zunächst $\alpha = 3$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ von

$$A_3 v = 4v + b$$

mit $b = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$:

$$\mathcal{L} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

Im Folgenden sei $\alpha \in \mathbb{R}$ wieder beliebig.

(b) Bestimmen Sie die Determinante $\det(A_\alpha)$ in Abhängigkeit von α: $\det(A_\alpha) = \boxed{32(1+\alpha)}$.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α nicht invertierbar? $\alpha \in \left\{\boxed{-1}\right\}$

(d) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in faktorisierter Form:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \boxed{(4-\lambda)^2\,(2-\lambda)\,(1+\alpha-\lambda)}$$

(e) Ein Eigenwert ist offenbar $\alpha + 1$. Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten ebendieses Eigenwertes in Abhängigkeit von α:

α	$e_{\alpha+1}$	$d_{\alpha+1}$
$\alpha = 1$	2	2
$\alpha = 3$	3	2
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$	1	1

Aufgabe 9 (*2 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \alpha & x = 0 \\ \cos\left(\frac{x}{\pi}\right) \cdot (2 - x^2) & x \in (0,\pi) \\ \beta & x = \pi \end{cases}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie α, β so, dass f stetig ist:

$$\alpha = \boxed{2} \qquad \beta = \boxed{\cos(1)(2-\pi^2)}\,.$$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*) Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = x^3 \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

(a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f.

$$f'(x) = \boxed{(3x^2 - x)\exp\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$f''(x) = \boxed{\left(6x - 4 + \frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)}$$

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Stufe zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{2}$.

$$T_2\left(f, x, \tfrac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{8}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*)

(a) Für $z \in \mathbb{C}$ sei die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n}{n^3(1+\mathrm{i})^n}(z+\mathrm{i})^n$ gegeben. Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 und den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe.

$$z_0 = \boxed{-\mathrm{i}} \qquad \rho = \boxed{\sqrt{2}}$$

(b) Eine reelle Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergiere genau für $x \in [-4,1)$. Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt x_0 und den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe.

$$x_0 = \boxed{-\frac{3}{2}} \qquad \rho = \boxed{\frac{5}{2}}$$
