Aufgabe 1 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 - 4 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q.

Wir schreiben die Quadrikgleichung zunächst in Matrixform und erhalten

$$x^\intercal \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} x + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}^\intercal x - 4 = 0.$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -2$.

Wir berechnen nun zugehörige Eigenvektoren

- $V(4)$:

$$\left[\begin{array}{rr||r} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr||r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Damit ist $V(4) = \mathrm{L}\left(\binom{1}{1}\right)$.

- $V(-2)$:

$$\left[\begin{array}{rr||r} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr||r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Damit ist $V(-2) = \mathrm{L}\left(\binom{1}{-1}\right)$.

In den neuen Koordinaten $y = \binom{y_1}{y_2}$, definiert durch $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) y \iff y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) x$ ergibt sich mit $\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)^\intercal \binom{2}{0} = \binom{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ die Gleichung

$$4y_1^2 - 2y_2^2 + 2\sqrt{2}y_1 + 2\sqrt{2}y_2 - 4 = 0.$$

Durch quadratisches Ergänzen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& 4\left(y_1^2 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}y_1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) - 2\left(y_2^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2\left(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2\left(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} = 0
\end{aligned}
$$

Mit $z_1 = y_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$ und $z_2 = y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ haben wir dann

$$4z_1^2 - 2z_2^2 - \frac{7}{2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{8}{7}z_1^2 + \frac{4}{7}z_2^2 + 1 = 0.$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem sowie ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}^\intercal$ der Koordinatenvektor des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right) .$$

(a) Bestimmen Sie den Standardkoordinatenvektor von P.

(b) Bestimmen Sie das Bild von $v \in \mathbb{R}^3$ unter der Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Die benötigten Koordinatentransformationen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(u) &= Fu + Q \\ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) &= F^{-1}(u - Q) \end{aligned}$$

mit

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad , \qquad Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Wir setzen die ${}_{\mathbb{F}}P$ in die entsprechende Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ ein:

$${}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) Wir berechnen F^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{r} 1/2 Z_1 : \\ -Z_2 - Z_1 : \\ Z_3 + 2Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_2: \\ Z_2 - Z_3: \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(v - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix},$$

welche eine Spiegelung an der Ebene

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 \right\}$$

beschreibt, sowie die Ebene E, welche durch die Punkte $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $P_3 = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ verläuft.

(a) Bestimmen Sie eine Hesse-Normalform von E.

(b) Bestimmen Sie die Bildebene $E' := \varphi(E) = \{\varphi(x) \mid x \in E\}$.

(a) Da P_1 der Ursprung ist, können wir einen Normalenvektor n direkt über das normierte Kreuzprodukt der Ortsvektoren von P_2 und P_3 berechnen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 30 \\ -30 \end{pmatrix} = 15 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

womit wir

$$n = \frac{1}{15\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}}\begin{pmatrix} -15 \\ 30 \\ -30 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

erhalten. Da E den Ursprung erhält, erhalten wir als eine Hesse-Normalform folglich:

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \right\}$$

(b) Die Bildebene ist eindeutig durch die durch

$$\begin{aligned}
\varphi(P_1) &= \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \\
\varphi(P_2) &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -42-12+36 \\ -24+24-72 \\ 24+3+72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} \\
\varphi(P_3) &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 56+20-4+36 \\ 32+5+8-72 \\ -32+40+1+72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

gegebenen Punkte bestimmt.

Ein Stützvektor ist somit gegeben durch

$$u = \varphi(P_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

zwei Richtungsvektoren v, w erhalten wir mittels

$$\begin{aligned}
v = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) &= \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\
w = \varphi(P_3) - \varphi(P_1) &= \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir erhalten hieraus:

$$\varphi(E) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Alternativer Lösungsweg:

Sei η ein Normalenvektor von E sowie $A := \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ der lineare Anteil von φ. Da φ als Isometrie Winkel erhält, gilt für beliebige Punkte $P, Q \in E$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q - P \,|\, \eta \rangle = \langle Q - P \,|\, (P+\eta) - P \rangle \\ &= \langle \varphi(Q) - \varphi(P) \,|\, \varphi(P+\eta) - \varphi(P) \rangle \\ &= \langle \varphi(Q) - \varphi(P) \,|\, A\eta \rangle \end{aligned}$$

Insbesondere ist infolge der Längentreue von $x \mapsto Ax$

$$\begin{aligned} n := A\eta &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -7+8+8 \\ -4+2-16 \\ 4+16-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Normalenvektor von $\varphi(E)$, da zu jedem Punkt P' in $\varphi(E)$ ein Punkt P in E mit $P' = \varphi(P)$ existiert.

Den Abstand zum Ursprung erhalten wir aus

$$0 = \langle \varphi(Q) - \varphi(P) \,|\, A\eta \rangle \qquad \text{bzw.} \qquad \langle \varphi(P) \,|\, A\eta \rangle = \langle \varphi(Q) \,|\, A\eta \rangle\,,$$

indem wir für P einen festen Punkt, z. B. P_1, einsetzen:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(P_1) \,|\, n \rangle &= \left\langle \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal\right) \middle|\, n \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 12, \end{aligned}$$

Die Hesse-Normalform lautet also

$$\varphi(E) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 12 \right\}.$$

Alternativer Lösungsweg:

Die Ebene E ist offensichtlich parallel zur Spiegelebene S: Die Normalenvektoren stimmen (bis auf das Vorzeichen) überein. Somit haben diese beiden Ebenen keine Schnittgerade, sondern einen festen Abstand $\tilde{d}$, welcher – da E durch den Ursprungverläuft – dem Abstand der Ebene S zum Ursprung entspricht: $\tilde{d} = 6$.

Als Isometrie erhält φ Abstände und Winkel, somit liegt $\varphi(E)$ ebenfalls im Abstand 6 parallel zu S. Vom Ursprung aus gesehen liegt die Bildebene nur auf der anderen Seite von S, was, da ersterer in E enthalten ist, uns zwei Dinge folgern lässt:

- Der für die Normalform relevante Normalenvektor von $\varphi(E)$ entspricht dem von E bzw. S (in ersterem Falle bis auf das Vorzeichen)
- $\varphi(E)$ hat zum Ursprung Abstand 12

Wir erhalten die Darstellung

$$E' = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 12 \right\}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{n!}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3-n}{n!}$

(a) Mit der geometrischen Reihenformel ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} = \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{n} \overset{\left[\frac{7}{9}<1\right]}{=} \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{7}{9}} = \frac{7}{2}.$$

(b) Wir können die vorliegende Reihe auf die Exponentialreihe zurückführen durch

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{n!} = 3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!} = 3\cdot\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right) = 3\left(\mathrm{e}-\frac{5}{2}\right)$$

(c) Mit Hilfe von Teil **(b)** erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3-n}{n!} &= \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3}{n!}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{n!} \overset{\textbf{(b)}}{=} 3\mathrm{e}-\frac{15}{2}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\\ &= 3\mathrm{e}-\frac{15}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!} = 3\mathrm{e}-\frac{15}{2}-(\mathrm{e}-1-1) = 2\mathrm{e}-\frac{11}{2}.\end{aligned}$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter und

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Sei zunächst $\alpha = 3$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ von

$$A_3 v = 4v + b$$

mit $b = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$:

$$\mathcal{L} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

Im Folgenden sei $\alpha \in \mathbb{R}$ wieder beliebig.

(b) Bestimmen Sie die Determinante $\det(A_\alpha)$ in Abhängigkeit von α: $\det(A_\alpha) = \boxed{32(1+\alpha)}$.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α nicht invertierbar? $\alpha \in \left\{ \boxed{-1} \right\}$

(d) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in faktorisierter Form:

$$\chi_{A_\alpha}(\lambda) = \boxed{(4-\lambda)^2 (2-\lambda)(1+\alpha-\lambda)}$$

(e) Ein Eigenwert ist offenbar $\alpha + 1$. Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten ebendieses Eigenwertes in Abhängigkeit von α:

α	$e_{\alpha+1}$	$d_{\alpha+1}$
$\alpha = 1$	2	2
$\alpha = 3$	3	2
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$	1	1

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben seien die Basen $B\colon\ b_1, b_2, b_3$ von $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{C}$ und $C\colon\ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ von $\mathrm{Pol}_4\,\mathbb{C}$ mit

$$b_1(X) = 1 \quad , \quad b_2(X) = X \quad , \quad b_3(X) = X^2$$
$$c_1(X) = 4 \quad , \quad c_2(X) = 3X \quad , \quad c_3(X) = 2X^2 \quad , \quad c_4(X) = -X^3 \quad , \quad c_5(X) = X^4 .$$

Wir definieren die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{C} \to \mathrm{Pol}_4\,\mathbb{C}\colon p \mapsto \varphi(p)$ mittels $\varphi(p)(X) := p(X^2-4)$.

(a) Bestimmen Sie $\varphi(b_3)$:

$$\varphi(b_3)(X) = \boxed{X^4 - 8X^2 + 16}$$

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_C\varphi_B$:

$${}_C\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} .$$

(c) Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von φ: $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \boxed{3}$.

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 5}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & -6 & 7 & 3 \end{pmatrix} .$$

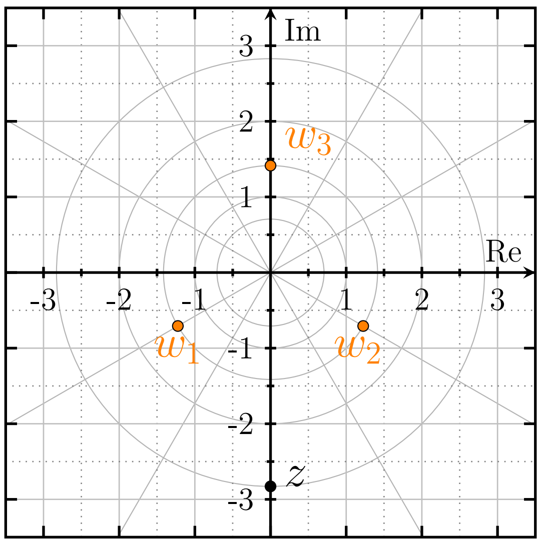
(a) Bestimmen Sie den Zeilenrang und den Spaltenrang von A.

Zeilenrang von A: $\boxed{2}$ Spaltenrang von A: $\boxed{2}$

(b) Welche Dimension hat der Lösungsraum $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^5$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$? $\dim \mathcal{L} = \boxed{3}$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

In der komplexen Zahlenebene ist die komplexe Zahl z gegeben (siehe Skizze) als einer der Schnittpunkte der Imaginärachse und des Kreises durch $2+2\mathrm{i}$ mit Mittelpunkt 0.



(a) Bestimmen Sie $|z|$ und $\arg(z)$:

$$|z| = \boxed{2\sqrt{2}} \qquad \arg(z) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

(b) Ergänzen Sie die Skizze um die Lösungen w_1, w_2, w_3 der Gleichung $w^3 = z$.