Aufgaben zum Themenkomplex „Folgen und Reihen“

Die folgenden Aufgaben stellen Beispiele für mögliche Fragen in einer ersten Scheinklausur zu Höhere Mathematik 1 für Ingenieurstudiengänge (im Dezember) dar.

Berücksichtigt ist nur der Themenbereich „Folgen und Reihen“, der bis zum Wintersemester 2022/23 nicht durch entsprechende Scheinklausuren abgedeckt war.

Die hier angebotenen Aufgaben (und die auf der Seite

http://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/scheinklausuren/

gesammelten Aufgaben aus alten Scheinklausuren) mögen bei der Vorbereitung auf Ihre eigene Scheinklausur oder Prüfung helfen. Beachten Sie aber stets:

- Maßgeblich für den Inhalt ist der in den Lehrveranstaltungen (Vorlesungen, Vortragsübungen, Gruppen- und Onlineübungen) behandelte Stoff.
- Bei jeder einzelnen Klausur wird zwangsläufig nur eine Auswahl der behandelten Themen angesprochen.
- Wir werden uns auch weiterhin bemühen, auf stets neue Art zu fragen ... geprüft wird der behandelte Stoff, nicht das mechanische Lösen (oder gar Auswendiglernen) alter Aufgaben.

Noch ein Hinweis zu Ihrer Selbsteinschätzung:
Eine Aufgabe, in der Sie n Punkte erreichen könnten, wurde von mir (in aller Ruhe, und nur mit auch Ihnen zur Verfügung stehenden Techniken und Hilfsmitteln) in n Minuten gelöst.
In einer Klausur würde Ihnen zur Bearbeitung die dreifache Zeit, also $3n$ Minuten zur Verfügung stehen (für eine 3-Punkte-Aufgabe also 9 Minuten). Wenn Sie bei Ihrer Vorbereitung wesentlich mehr Zeit zum Lösen der Aufgabe benötigen, sollten Sie analysieren, woher das Problem kommt – und das Problem möglichst beseitigen.

Wie auch sonst: Nutzen Sie unsere Sprechstunden, um alle mathematischen Probleme konstruktiv anzugehen! Wir helfen Ihnen gerne, auch bei der Identifikation der Gründe für Ihre Schwierigkeiten.

M. Stroppel, November 2023

Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (12 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 ☐11 ■12

Geben Sie jeweils die verlangten Folgenglieder und alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, bestimmen Sie $\overline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\underline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n$, und entscheiden Sie, ob die Folge konvergiert (tragen Sie dazu „konvergent“ bzw. „divergent“ ein).

(a) $a_n := \operatorname{Re}\left(\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n\right)$. $a_1 = \boxed{\frac{1}{2}}$ $a_2 = \boxed{0}$ $a_4 = \boxed{-\frac{1}{4}}$ $a_5 = \boxed{-\frac{1}{8}}$

Häufungspunkte: 0

$\overline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n = \boxed{0}$ $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \boxed{\frac{1}{2}}$ $\underline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n = \boxed{0}$

Konvergenzverhalten: konvergent

(b) $a_n := \operatorname{Im}(\mathrm{i}^{3n})$. $a_1 = \boxed{-1}$ $a_2 = \boxed{0}$ $a_3 = \boxed{1}$ $a_5 = \boxed{-1}$

Häufungspunkte: $-1,\ 0,\ 1$

$\overline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n = \boxed{1}$ $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \boxed{1}$ $\underline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n = \boxed{-1}$

Konvergenzverhalten: divergent

Aufgabe 2 (12 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 ☐11 ■12

Geben Sie jeweils die verlangten Folgenglieder und alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, bestimmen Sie $\overline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (falls die Folge nach oben beschränkt ist – tragen Sie sonst „nicht nach oben beschränkt“ ein), $\underline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n$, und entscheiden Sie, ob die Folge konvergiert (tragen Sie dazu „konvergent“ bzw. „divergent“ ein).

(a) $a_n := \operatorname{Re}\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^n\right)$. $a_1 = \boxed{\frac{1}{2}}$ $a_2 = \boxed{-\frac{1}{2}}$ $a_4 = \boxed{-\frac{1}{2}}$ $a_6 = \boxed{1}$

Häufungspunkte: $-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1$

$\overline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n = \boxed{1}$ $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \boxed{1}$ $\underline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n = \boxed{-1}$

Konvergenzverhalten: divergent

(b) $a_n := \operatorname{Re}((1+\mathrm{i})^n)$. $a_1 = \boxed{1}$ $a_2 = \boxed{0}$ $a_4 = \boxed{-4}$ $a_5 = \boxed{-4}$

Häufungspunkte: $-\infty,\ 0,\ +\infty$

$\overline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n = \boxed{+\infty}$ $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n =$ nicht nach oben beschränkt $\underline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}}\, a_n = \boxed{-\infty}$

Konvergenzverhalten: divergent

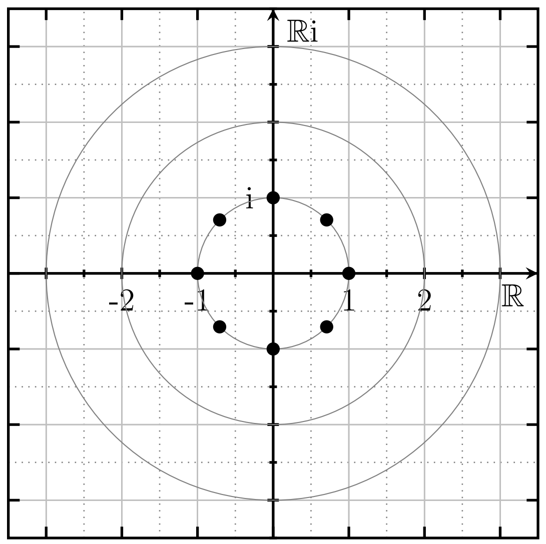
Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{(3n)^2}$	$\lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{1+m}{m}\right)^{-m}$	$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-4n}-n)$	$\lim\limits_{k\to\infty} (\frac{\sin(\pi k)}{17}-4)^2$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+7}{8-5n^2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+\cos(\pi n)}{n}$
0	$\frac{1}{e}$	-2	16	$-\frac{6}{5}$	3

Aufgabe 4 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch $a_n := (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n$. Skizzieren Sie die Menge $\{a_n \mid 1 \leqq n \leqq 100\}$ (es ist dabei nicht verlangt, die Punkte zu bezeichnen):



(b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch $b_n := \mathrm{Re}\left((\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n\right)$.

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Teilfolgen:

$\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} b_{8k} = \boxed{1}$ $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} b_{8k+1} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} b_{8k+2} = \boxed{0}$ $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}} b_{8k+5} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Geben Sie alle Häufungspunkte der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an: $\boxed{-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1}$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

(a) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird rekursiv definiert durch $f_1 := 7$, und $f_n := -2\,f_{n-1}$ für $n > 1$.

Bestimmen Sie $\overline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}} f_n = \boxed{+\infty}$.

(b) Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird rekursiv definiert durch $g_1 := 7$, und $g_n := g_{n-1} + \frac{1}{n^2}$ für $n > 1$.

Bestimmen Sie $\overline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}} g_n = \boxed{\frac{36+\pi^2}{6}}$.

(c) Die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird rekursiv definiert durch $h_1 := 7$, und $h_n := h_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n}$ für $n > 1$.

Bestimmen Sie $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} h_n = \boxed{\frac{15}{2}}$ und $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} h_n = \boxed{7}$.

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Bestimmen Sie jeweils den größten bzw. kleinsten Häufungspunkt (wie jeweils verlangt). Klären Sie die Monotonie-Eigenschaften der Folge (tragen Sie „monoton steigend“, „monoton fallend“ oder „nicht monoton“ ein).

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 5 + \frac{4}{n} - (\frac{1}{n^2} + 2)$:

$\overline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}} a_n = \boxed{3}$, Monotonie-Eigenschaft: monoton fallend

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \frac{n-1}{n+1}$:

$\overline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}} b_n = \boxed{1}$, Monotonie-Eigenschaft: monoton steigend

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \sqrt{n^2-n}$:

$\underline{\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}} c_n = \boxed{+\infty}$, Monotonie-Eigenschaft: monoton steigend

Aufgabe 7 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Geben Sie jeweils die Summe der Reihe an, wenn diese konvergiert, und tragen Sie sonst „divergent“ ein.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sqrt{2}^{\,k}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n}$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \cos(\frac{\pi}{3})^k$	$\sum\limits_{m=0}^{\infty} 5^{-m}$	$\sum\limits_{k=4}^{\infty} (\frac{8}{7})^{k+3}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^{2n+1}}$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{7}{8})^{k+2}$
divergent	$\frac{1}{6}$	2	$\frac{5}{4}$	divergent	18	$\frac{49}{8}$

Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Wir betrachten die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right).$$

(a) Bestimmen Sie die Partialsumme

$$S_N := \sum_{n=1}^{N}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right) = \boxed{2-\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^{N+1}}$$

für $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 2$.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right) = \boxed{2-\mathrm{e}}\,.$$

Aufgabe 9 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty}(q^{n+1}-q^n)$ konvergent?

Für $q \in \boxed{(-1,1]}\,.$

Aufgabe 10 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $R(q) := \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{q^n}$ konvergent?

Für $q \in \boxed{(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)}\,.$

Bestimmen Sie $R(9) = \boxed{\frac{1}{6}}\,.$

Aufgabe 11 (9 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ■9

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{k!} = \boxed{8\,\mathrm{e}} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{6}{n^2} = \boxed{\pi^2-6} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2}{k!\,j!} = \boxed{2\,\mathrm{e}^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-2}{k!} = \boxed{2-\mathrm{e}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+2)k} = \boxed{\frac{3}{2}} \qquad \sum_{k=3}^{\infty}\frac{2}{(k+2)k} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k-1}{k!} = \boxed{0} \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{k!} = \boxed{1} \qquad \sum_{k=0}^{5}\frac{k-1}{k!} = \boxed{-\frac{1}{120}}$$

Aufgabe 12 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

(a) Berechnen Sie die Partialsumme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) = \boxed{n^3+3n^2+3n}$$

Bestimmen Sie $\sum_{k=1}^{\infty}\left((k+1)^3-k^3\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} S_n = \boxed{+\infty}$

(b) Finden Sie reelle Zahlen A, B so, dass $\frac{1}{k^2+k} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$: $A = \boxed{1}$ $B = \boxed{-1}$

Bestimmen Sie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k} = \boxed{1}$

Aufgabe 13 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{5}(2k-1) = \boxed{25}$ und

$$(q^3-1)\sum_{k=1}^{6}q^k = \boxed{1}\cdot q^9 + \boxed{1}\cdot q^8 + \boxed{1}\cdot q^7 + \boxed{0}\cdot q^6 + \boxed{0}\cdot q^5$$
$$+ \boxed{0}\cdot q^4 + \boxed{(-1)}\cdot q^3 + \boxed{(-1)}\cdot q^2 + \boxed{(-1)}\cdot q^1 + \boxed{0}$$