Die mit * gekennzeichneten Quadriken sehen wieder mager aus, haben aber ebenfalls noch viele Punkte „im Komplexen“.

6.3.8 Beispiel. In $\mathbb{R}^3$ sei die folgende Quadrik gegeben:

$$9\,x_1^2 + 24\,x_1\,x_2 + 16\,x_2^2 + k\,x_3^2 + 10\,x_1 - 20\,x_2 + 20\,x_3 + 1 = 0\,.$$

In Matrixschreibweise: $x^\top A\,x + 2\,a^\top x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad c = 1\,.$$

Wir wollen zuerst entscheiden, welcher Quadriktyp hier vorliegt (das wird vom Wert des Parameters k abhängen), und dann die euklidische Normalform bestimmen.

Um den Typ der Quadrik zu bestimmen, berechnen wir

$$r = \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \\ 2 & \text{für } k \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r_{\text{erw}} = \operatorname{Rg}(A_{\text{erw}}) &= \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{r|rrr} 1 & 5 & -10 & 10 \\ \hline 5 & 9 & 12 & 0 \\ -10 & 12 & 16 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & k \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & -\frac{k}{2} \\ 0 & 12 & 16 & k \\ 10 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 3 & 4 & -\frac{1}{6}k \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3}k \\ 10 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ erhalten wir:

$$r_{\mathrm{erw}} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & -\frac{k}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} = 4\,;$$

für $k = 0$ dagegen

$$r_{\mathrm{erw}} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\,.$$

In beiden Fällen gilt also $r_{\mathrm{erw}} - r = 2$, und es liegen parabolische Quadriken vor: Ein (elliptisches oder hyperbolisches) Paraboloid für $k \neq 0$, und ein parabolischer Zylinder für $k = 0$.

Wir wollen für den Fall $k = 0$ auch noch die euklidische Normalform der Quadrik bestimmen.

Erster Schritt: Diagonalisierung.

Wir erhalten die Eigenwerte von A als Nullstellen von

$$\chi_a(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_3) = \det\begin{pmatrix} 9-\lambda & 12 & 0 \\ 12 & 16-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2\,(\lambda - 25)\,,$$

also als $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = 0 = \lambda_3$. (Wir haben den Eigenwert 0 schon nach hinten sortiert).

Durch Lösen der entsprechenden linearen Gleichungssysteme erhalten wir $V(25) = \mathrm{L}\,(f_1^*)$ und $V(0) = \mathrm{L}\,(f_2^*, f_3^*)$, wobei

$$f_1^* := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2^* := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3^* := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren f_2^* und f_3^* stehen (zufälligerweise) senkrecht aufeinander, dass f_1^* auf den beiden senkrecht steht, hat einen systematischen Grund (vgl. 5.4.5). Die Wahl des Vorzeichens bei f_3^* bewirkt, dass die neue Basis wieder richtig orientiert ist: Wir werden wieder ein Rechtssystem erhalten.

Wir müssen die f_j^* normieren:

$$f_1 := \frac{1}{|f_1^*|}\, f_1^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \qquad f_2 := \frac{1}{|f_2^*|}\, f_2^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}, \quad f_3 := f_3^* = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Transformationsmatrix

$$F := (f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\4 & -3 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}.$$

Probe: $\quad F^\top A\, F = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\4 & -3 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 12 & 0\\12 & 16 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\4 & -3 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystem $\mathbb{F} = (\vec{0}; f_1, f_2, f_3)$ hat unsere Quadrik die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= y^\top \left(F^\top A\, F\right) y + 2\left(F^\top a\right)^\top y + 1 \\ &= y^\top \begin{pmatrix}25 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} y + \left(\frac{2}{5}\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\4 & -3 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-10\\10\end{pmatrix}\right)^\top y + 1 \\ &= 25\, y_1^2 - 10\, y_1 + 20\, y_2 - 20\, y_3 + 1\,. \end{aligned}$$

Zweiter Schritt: Verschiebung.

Durch quadratische Ergänzung sehen wir, wie wir verschieben müssen, um den linearen Term in y_1 zu beseitigen:

$$25\, y_1^2 - 10\, y_1 = 25\left(y_1^2 - \frac{10}{25}\, y_1\right) = 25\left(y_1 - \frac{1}{5}\right)^2 - 1\,.$$

Wir verwenden als neuen Ursprung also den Punkt P mit ${}_{\mathbb{F}}P := \left(-\frac{1}{5}, 0, 0\right)^\top$ (für diesen gilt $P = {}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}P) = F\,{}_{\mathbb{F}}P = -\frac{1}{25}(3,4,0)^\top$), und erhalten bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G} = \left(P; f_1, f_2, f_3\right)$ die Gleichung

$$0 = 25\,z_1^2 + 20\,z_2 - 20\,z_3 - 1 + 1$$

bzw. [nach Division] $\quad 0 = 5\,z_1^2 + 4\,z_2 - 4\,z_3\,.$

Dritter Schritt: Vereinfachung des linearen Teils.
Wir ersetzen jetzt noch die Basisvektoren f_2 und f_3 durch h_2 und h_3, die wir gewinnen aus

$$\begin{aligned}
h_2^* &:= 4\,f_2 - 4\,f_3\,,\\
h_2 &:= \frac{1}{|h_2^*|}\,h_2^* = \frac{1}{4\,\sqrt{2}}\Big(4\,f_2 - 4\,f_3\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(f_2 - f_3\Big)\,,\\
h_3^* &:= f_3 - \Big\langle f_3 \,\Big|\, h_2\Big\rangle\,h_2 = f_3 + \frac{1}{2}\left(f_2 - f_3\right) = \frac{1}{2}\left(f_2 + f_3\right),\\
h_3 &:= \frac{1}{|h_3^*|}\,h_3^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(f_2 + f_3\Big)\,.
\end{aligned}$$

Explizit (d. h. in Standardkoordinaten):

$$h_1 := f_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \qquad h_2 = \frac{1}{5\,\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}, \qquad h_3 = \frac{1}{5\,\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-3\\-5\end{pmatrix}.$$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems

$$\mathbb{H} := \left(-\frac{1}{25}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix};\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{5\,\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix},\ \frac{1}{5\,\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-3\\-5\end{pmatrix}\right)$$

hat unsere Quadrik die Gleichung

$$5\,w_1^2 + 4\,\sqrt{2}\,w_2 = 0\,,$$

die euklidische Normalform erhält man, indem man diese Gleichung noch durch $2\,\sqrt{2}$ dividiert (bzw. mit $\frac{\sqrt{2}}{4}$ multipliziert):

$$\frac{5\,\sqrt{2}}{4}\,w_1^2 + 2\,w_2 = 0\,.$$

Dies ist ein parabolischer Zylinder, Darstellungen findet man in Abb. 6.4 – 6.6.

Die benötigten Koordinatentransformationen erhält man mit

$$F = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad P = -\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F^\top P = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H := F\,M = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 4 & 4 \\ 4\sqrt{2} & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

als

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} &: \ v \mapsto F\,v\,, & {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} &: \ v \mapsto F^\top v\,, \\
{}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} &: \ v \mapsto v - F^\top P\,, & {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} &: \ v \mapsto v + F^\top P\,, \\
{}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{H}} &: \ v \mapsto M\,v\,, & {}_{\mathbb{H}}\kappa_{\mathbb{G}} &: \ v \mapsto M^\top v\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}} &= {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} \circ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{H}} : \ v \mapsto F\left(M\,v - F^\top P\right) = H\,v - P\,, \\
{}_{\mathbb{H}}\kappa_{\mathbb{E}} &= {}_{\mathbb{H}}\kappa_{\mathbb{G}} \circ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \ v \mapsto M^\top F^\top (v + P) = H^\top (v + P)\,.
\end{aligned}$$

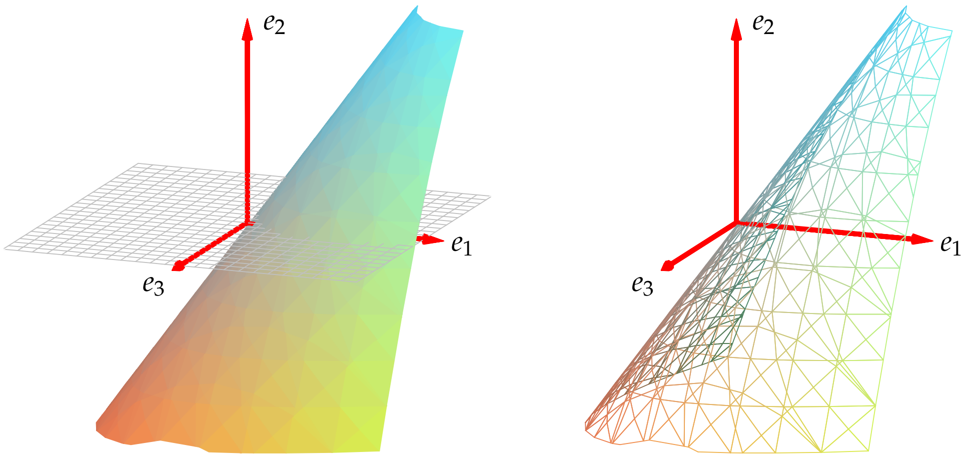

Abbildung 6.4: Die Quadrik (ein parabolischer Zylinder) mit der Gleichung $9\,x_1^2 + 24\,x_1\,x_2 + 16\,x_2^2 + 10\,x_1 - 20\,x_2 + 20\,x_3 + 1 = 0$.
Die Pfeile deuten das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ an.

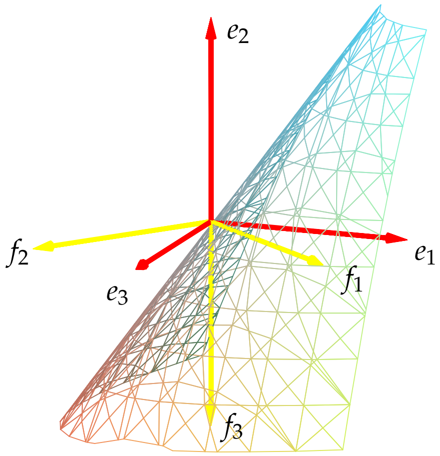

Abbildung 6.5: Die Quadrik mit den Systemen $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$, bzw. $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$.

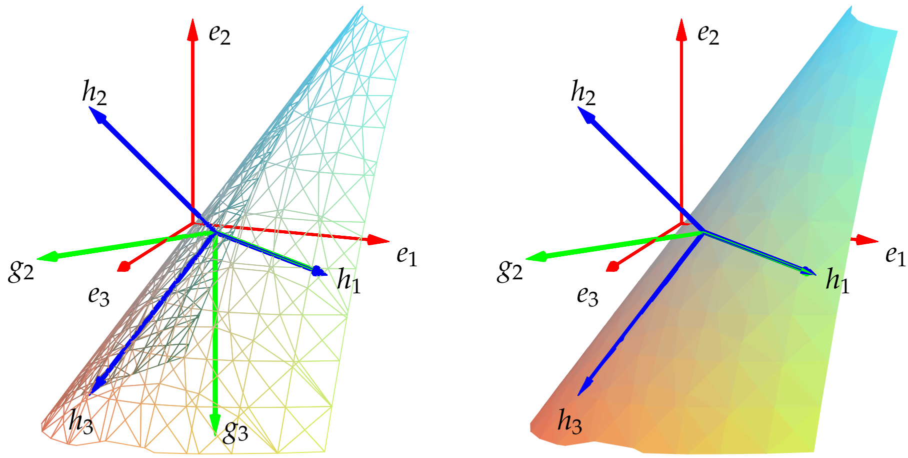

Abbildung 6.6: Die Quadrik mit den Systemen $\mathbb{E}$, $\mathbb{G}$ und $\mathbb{H}$.