Im Wintersemester 2016/17 wurde in der Vorlesung „Höhere Mathematik 1 für Ingenieurstudiengänge“ der folgende Algorithmus zur Hauptachsentransformation besprochen:

## 6.3 Hauptachsentransformation

Die Matrizen, die zur Beschreibung von quadratischen Formen und Quadriken benutzt werden, sind reelle symmetrische Matrizen und deswegen orthogonal diagonalisierbar (vgl. 5.4.2).

Wir werden dies benutzen, um für jede Quadrik ein kartesisches Koordinatensystem zu finden, in dem diese besonders übersichtlich dargestellt ist.

Im Folgenden sei

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x^\top A\, x + 2\, a^\top x + c = 0 \right\}$$

die Matrixbeschreibung einer Quadrik $Q$, gegeben bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E} = (\vec{0}; \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$, mit einer symmetrischen Matrix $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, linearem Teil $2\, a \in \mathbb{R}^n$ und konstantem Teil $c \in \mathbb{R}$.

**6.3.1 Erster Schritt: Diagonalisierung (gegen gemischte Terme).**

Da $A$ eine reelle symmetrische Matrix ist, gibt es eine orthogonale Matrix $F$ so, dass gilt:

$$F^\top A\, F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A$; die Spalten $f_1, \ldots, f_n$ von $F$ bilden eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $A$. Die Reihenfolge dieser Eigenvektoren ist so gewählt, dass $A f_j = \lambda_j f_j$ gilt.

Wie transformiert sich die Quadrikgleichung? Hat ein Punkt $X$ die Standardkoordinaten $x = {}_{\mathbb{E}}X$, so liefert ${}_{\mathbb{F}}X = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\big({}_{\mathbb{E}}X\big) = F^{-1}x = F^{\top}x$ das Koordinatentupel bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = (\vec{0}; f_1, \ldots, f_n)$, bei dem die Basisvektoren $f_j$ die Spalten der Matrix $F$ sind (vgl. 4.7.6).

Für $y := {}_{\mathbb{F}}X = F^{\top}x$ erhalten wir $x = F\,y$ und damit

$$\begin{aligned} x^{\top} A\, x &= (F\,y)^{\top} A\, F\, y = y^{\top} F^{\top} A\, F\, y = y^{\top} (F^{\top} A\, F)\, y \\ a^{\top} x &= a^{\top} F\, y = (F^{\top} a)^{\top}\, y\,. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Bezüglich des neuen Koordinatensystems $\mathbb{F}$ wird die Quadrik beschrieben durch die Gleichung

$$y^{\top} \tilde{A}\, y + 2\,\tilde{a}^{\top} y + c = 0$$

mit $\tilde{A} = F^{\top} A\, F$ und $\tilde{a} = F^{\top} a$.

Explizit sieht die durch den Koordinatenwechsel erreichte Gleichung so aus:

$$\lambda_1\, y_1^2 + \cdots + \lambda_n\, y_n^2 + 2\,\tilde{a}_1\, y_1 + \cdots + 2\,\tilde{a}_n\, y_n + c = 0$$

— also schon deutlich einfacher als im allgemeinen Fall!

Wir wollen den linearen Teil so einfach wie möglich machen. Falls $0$ unter den Eigenwerten von $A$ vorkommt, ist das ein bisschen aufwendiger, wir kümmern uns dann zuerst um eine passende Basis für den Eigenraum $V(0)$. Die Dimension dieses Untervektorraums ist die geometrische Vielfachheit $d_0$.

Wir wählen die zur Diagonalisierung gesuchte Orthonormalbasis jetzt so, dass die letzten Basisvektoren in $V(0)$ liegen, sortieren also die Eigenwerte so, dass (bei $m := n - d_0$) gilt:

$$\forall\, j \leqq m\colon\ \lambda_j \neq 0\,, \qquad \forall\, j > m\colon\ \lambda_j = 0\,.$$

Im Fall $d_0 > 1$ achten wir außerdem gleich darauf, dass wenigstens gilt:

$$\forall\, j > m + 1\colon \quad a^{\top} f_j = 0\,.$$

— das geht, weil der Schnitt von $V(0)$ mit dem Orthogonalraum zu $a$ durch Lösen einer einzigen linearen Gleichung bestimmt wird.

Konkret bestimmt man eine Basis $v_{m+1}, \ldots, v_n$ für den Eigenraum $V(0)$ (etwa mit dem Gauß-Algorithmus), und löst dann die homogene lineare Gleichung

$$\langle\, t_{m+1} v_{m+1} + \cdots + t_n v_n \,|\, a \rangle = 0 \tag{$*$}$$

mit Variablen $t_{m+1}, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.

Eine Basis für den Lösungsraum dieser Gleichung $(*)$ verwendet man dann, um eine Basis für den Schnitt (von $V(0)$ mit dem Orthogonalraum zu $a$) zu konstruieren.

Wenn $V(0)$ nicht ganz im Orthogonalraum zu $a$ liegt, gilt $\langle v_k \mid a \rangle \neq 0$ für wenigstens ein $k$, und man kann die eben ermittelte Basis für den Schnitt durch $v_k$ zu einer Basis für $V(0)$ ergänzen. Aus dieser Basis für $V(0)$ erhält man schließlich mit Hilfe des Orthonormierungsverfahrens (siehe 4.5.10) die gesuchte Basis.

(*Keine Angst:* Bei konkreten Rechnungen in $\mathbb{R}^3$ wird auf jeden Fall $d_0 \leqq 2$ sein — die Gleichung $(*)$ hat dann maximal zwei Variablen! In $\mathbb{R}^2$ ist gar nichts zu tun.)

Wir nehmen ab jetzt an, dass ein Koordinatensystem $\mathbb{F} = (\vec{0}; f_1, \ldots, f_n)$ so gewählt ist, dass der quadratische Teil der Quadrikgleichung keine gemischten Terme enthält und dass gilt:

$$\begin{array}{ll} \forall\, j \leqq m: & \lambda_j \neq 0\,, \\ \forall\, j > m: & \lambda_j = 0\,, \\ \forall\, j > m+1: & a^{\intercal} f_j = 0\,. \end{array}$$

Es ergibt sich dann

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \tilde{a} = \left(\begin{array}{c} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \\ \hline \tilde{a}_{m+1} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right).$$

Als Nächstes wollen wir den linearen Teil so weit wie möglich zum Verschwinden bringen. Dazu verschieben wir den Ursprung des Koordinatensystems.

**6.3.2 Zweiter Schritt: Verschiebung (gegen lineare Terme).**

Falls $\lambda_j \neq 0$ gilt (nach unserer Wahl der neuen Basisvektoren also für $j \leqq m$), erhalten wir durch quadratische Ergänzung:

$$\lambda_j y_j^2 + 2\,\tilde{a}_j\, y_j = \lambda_j \left( y_j^2 + 2\,\frac{\tilde{a}_j}{\lambda_j}\, y_j \right) = \lambda_j \left( \left( y_j + \frac{\tilde{a}_j}{\lambda_j} \right)^2 - \frac{\tilde{a}_j^2}{\lambda_j^2} \right).$$

Mit dem neuen Ursprung $P$ mit Koordinaten (bezüglich $\mathbb{F}$)

$$ {}_{\mathbb{F}}P := \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{a}_1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ -\frac{\tilde{a}_m}{\lambda_m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{also } P = {}_{\mathbb{E}}P = F\,{}_{\mathbb{F}}P) $$

definieren wir das Koordinatensystem $\mathbb{G} := (P; f_1, \ldots, f_n)$.

Die neuen Koordinaten ergeben sich aus

$$ {}_{\mathbb{G}}X = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}\big({}_{\mathbb{F}}X\big) = {}_{\mathbb{F}}X - {}_{\mathbb{F}}P\,, \qquad {}_{\mathbb{F}}X = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}\big({}_{\mathbb{G}}X\big) = {}_{\mathbb{G}}X + {}_{\mathbb{F}}P\,. $$

Nun gilt für $z := y - {}_{\mathbb{F}}P$ und alle $j \leqq m$:

$$ \lambda_j z_j^2 = \lambda_j \left( y_j + \frac{\tilde{a}_j}{\lambda_j} \right)^2 = \lambda_j y_j^2 + 2\,\tilde{a}_j\, y_j + \frac{\tilde{a}_j^2}{\lambda_j}\,, $$

und wir erhalten

$$ y^{\mathsf{T}} \tilde{A}\, y + 2\,\tilde{a}^{\mathsf{T}} y + c = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2 + \sum_{j=1}^{n} 2\,\tilde{a}_j\, y_j + c = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j z_j^2 + 2\,\tilde{a}_{m+1}\, z_{m+1} + \tilde{c}\,, $$

wobei $\tilde{c} := c - \sum_{j=1}^{m} \frac{\tilde{a}_j^2}{\lambda_j}$.

Mit anderen Worten: In Koordinaten bezüglich $\mathbb{G}$ wird die Quadrik beschrieben durch die Gleichung

$$ z^{\mathsf{T}} \tilde{\tilde{A}}\, z + 2\,\tilde{\tilde{a}}^{\mathsf{T}} z + \tilde{c} = 0\,, $$

wobei

$$\tilde{\tilde{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right), \quad \tilde{\tilde{a}} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \tilde{a}_{m+1} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \tilde{c} := c - \sum_{j=1}^{m} \frac{\tilde{a}_j^2}{\lambda_j}\,.$$

Wenn wir $\tilde{\tilde{a}} = 0$ erreicht haben[1], ist unsere Suche nach dem optimalen Koordinatensystem hiermit beendet.

Im Fall $\tilde{\tilde{a}} \neq 0$ (das ist genau der Fall einer *parabolischen* Quadrik) schließt sich noch ein weiterer Schritt an:

### 6.3.3 Dritter Schritt: Verschiebung (gegen die Konstante).

Wenn nach dem zweiten Schritt (also der quadratischen Ergänzung zur Beseitigung möglichst vieler Variablen im linearen Term) immer noch die Variable $z_{m+1}$ im linearen Teil übrig bleibt (also $\tilde{a}_{m+1} \neq 0$), können wir dies wenigstens verwenden, um die Konstante $\tilde{c}$ zu Null zu machen:

Wir setzen $z_{m+1} := w_{m+1} - \frac{\tilde{c}}{2\tilde{a}_{m+1}}$ und lassen $z_j := w_j$ für alle $j \neq m+1$, also $z = w - \frac{\tilde{c}}{2\tilde{a}_{m+1}}\,\mathrm{e}_{m+1}$. Damit bietet sich als neuer Ursprung der Punkt $Q$ mit ${}_{\mathbb{G}}Q = -\frac{\tilde{c}}{2\tilde{a}_{m+1}}\,\mathrm{e}_{m+1}$ an.

Die Standard-Koordinaten von $Q$ erhalten wir als

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}Q &= {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}({}_{\mathbb{G}}Q) = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}\left(-\tfrac{\tilde{c}}{2\tilde{a}_{m+1}}\,\mathrm{e}_{m+1}\right) \\ &= F\,{}_{\mathbb{F}}Q = F({}_{\mathbb{G}}Q + {}_{\mathbb{F}}P) = F\,{}_{\mathbb{G}}Q + {}_{\mathbb{E}}P \\ &= {}_{\mathbb{E}}P - \tfrac{\tilde{c}}{2\tilde{a}_{m+1}}\,F\,\mathrm{e}_{m+1} = {}_{\mathbb{E}}P - \tfrac{\tilde{c}}{2\tilde{a}_{m+1}}\,f_{m+1}\,. \end{aligned}$$

Bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{H} := (Q; f_1, \ldots, f_n)$ erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & & w^{\mathsf{T}}\tilde{\tilde{A}}\,w &+ 2\,\tilde{a}_{m+1}\,w_{m+1} &= 0 \\ &\text{also} & \lambda_1 w_1^2 + \cdots + \lambda_m w_m^2 &+ 2\,\tilde{a}_{m+1}\,w_{m+1} &= 0\,. \end{aligned}$$

[1] Das passiert, wenn $V(0)$ komplett im Orthogonalraum zu $a$ liegt — oder der Eigenwert 0 gleich gar nicht vorkommt.

Wir haben das Problem, unsere Quadrik möglichst übersichtlich zu beschreiben, damit reduziert auf die folgenden drei Fälle (die Einteilung (I)–(III) entspricht der Grobeinteilung nach Typen, vgl. 6.2.6):

**(I)** Es treten keine linearen Terme mehr auf (d. h. $\tilde{a}_{m+1} = \cdots = \tilde{a}_n = 0$ oder sowieso $m = n$), und es gilt $\tilde{c} = 0$. In diesem Fall hat die Quadrik bezüglich $\mathbb{G}$ die Gleichung

$$\lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_m z_m^2 = 0 .$$

**(II)** Es treten keine linearen Terme mehr auf (d. h. immer noch $\tilde{a}_{m+1} = \cdots = \tilde{a}_n = 0$ oder sowieso $m = n$), aber es gilt $\tilde{c} \neq 0$. In diesem Fall hat die Quadrik bezüglich $\mathbb{G}$ die Gleichung $\lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_m z_m^2 + \tilde{c} = 0$, also

$$\tfrac{\lambda_1}{\tilde{c}} z_1^2 + \cdots + \tfrac{\lambda_m}{\tilde{c}} z_m^2 + 1 = 0 .$$

**(III)** Es bleibt noch ein linearer Term. Durch eine weitere Koordinatentransformation (auf das System $\mathbb{H}$) kann man dann erreichen, dass die Quadrik beschrieben wird durch $\lambda_1 w_1^2 + \cdots + \lambda_m w_m^2 + 2\,\tilde{a}_{m+1} w_{m+1} = 0$ mit $\tilde{a}_{m+1} \neq 0$, also

$$\frac{\lambda_1}{\tilde{a}_{m+1}} w_1^2 + \cdots + \frac{\lambda_m}{\tilde{a}_{m+1}} w_m^2 + 2\,w_{m+1} = 0 .$$

Damit haben wir gezeigt, dass (und wie) man für jede Quadrik ein Koordinatensystem finden kann, bezüglich dessen die Quadrik durch eine sehr übersichtliche Gleichung beschrieben wird.

An Hand dieser Beschreibung kann man auch schnell entscheiden, von welcher geometrischen Gestalt die Quadrik ist. Wir werden die Aufzählung der Möglichkeiten nur für kleine Dimensionen vornehmen.

**6.3.4 Euklidische Normalform für Quadriken.**

*Bezüglich eines geeigneten kartesischen Koordinatensystems lässt sich jede Quadrik in $\mathbb{R}^n$ beschreiben durch eine Gleichung der Form*

**(I)** $\mu_1 z_1^2 + \cdots + \mu_m z_m^2 = 0$ (kegelige Quadrik)

**(II)** $\mu_1 z_1^2 + \cdots + \mu_m z_m^2 + 1 = 0$ (Mittelpunktsquadrik)

**(III)** $\mu_1 w_1^2 + \cdots + \mu_m w_m^2 + 2\,w_{m+1} = 0$ (parabolische Quadrik)

*Die Koeffizienten $\mu_j$ ergeben sich aus den Eigenwerten $\lambda_j$, gegebenenfalls nach Division durch einen einheitlichen Skalar (um die Konstante auf 1 bzw. den Koeffizienten im linearen Term auf 2 zu bringen).*

Explizit durchgeführte Beispiele für die Koordinatentransformationen, mit der man die euklidische Normalform einer Quadrik erreicht, werden wir später in 6.3.9, in 6.3.10 und in 6.3.11 geben.

**6.3.5 Bemerkung.** Oft schreibt man $\mu_j = \frac{1}{h_j^2}$ bzw. $\mu_j = -\frac{1}{h_j^2}$ (je nach dem Vorzeichen des Eigenwerts), mit $h_j > 0$. In diesem Fall nennt man die $h_j$ *Hauptachsenlängen* der Quadrik: Bei einer Ellipse mit Gleichung

$$-\frac{x_1^2}{h_1^2} - \frac{x_2^2}{h_2^2} + 1 = 0$$

haben die Halbachsen tatsächlich die Längen $h_1$ bzw. $h_2$.

**6.3.6 Affine Normalform für Quadriken.**

Man kann statt kartesischer Koordinatensysteme auch beliebige affine Koordinatensysteme zulassen. Dann wird das Transformieren einfacher, man erhält aber nur noch qualitative (und keine metrische) Information über das Aussehen der Quadrik:

In den Fällen **(I)**, **(II)** und **(III)** kann man durch Skalieren der Koordinatenachsen noch erreichen, dass alle von Null verschiedenen Koeffizienten den Betrag 1 haben. Man kann dann zwar noch zwischen Ellipsen und Hyperbeln, aber nicht mehr zwischen Ellipsen und echten Kreisen unterscheiden.

**6.3.7 Affine Klassifikation der Quadriken im Raum.**

Wir nehmen hier an, dass jede der drei Variablen in der Gleichung vorkommt. Dann hat die affine Normalform eine der folgenden Gestalten:

| | | |
|---|---|---|
| **(I)** | $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ | ein Punkt * |
| | $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ | Doppelkegel |
| **(II)** | $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ | kein Punkt * |
| | $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ | zweischaliges Hyperboloid |
| | $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ | einschaliges Hyperboloid |
| | $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ | Ellipsoid |
| **(III)** | $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$ | elliptisches Paraboloid |
| | $x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0$ | hyperbolisches Paraboloid |

Die mit * gekennzeichneten Quadriken sehen recht mager aus. Es gibt hier aber noch sehr viele Punkte „im Komplexen“: also Lösungen der Gleichung in $\mathbb{C}^3$. Die interessanten Quadriken aus 6.3.7 zeigt Abbildung 6.1 auf Seite 172.

**6.3.8 Affine Klassifikation der ebenen / zylindrischen Quadriken.**
Jetzt nehmen wir an, dass weniger als drei Variablen in der Gleichung vorkommen. Das kann man dann entweder als eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ oder als eine Quadrik in $\mathbb{R}^3$ interpretieren (bei der dann die nicht involvierte Koordinate frei gewählt werden kann).

Dann hat die affine Normalform eine der folgenden Gestalten:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(I)** | $x_1^2 + x_2^2$ | $= 0$ | ein Punkt / eine Gerade * |
| | $x_1^2 - x_2^2$ | $= 0$ | schneidendes Geraden- / Ebenenpaar |
| | $x_1^2$ | $= 0$ | Doppelgerade / Doppelebene |
| **(II)** | $x_1^2 + x_2^2 + 1$ | $= 0$ | kein Punkt / kein Punkt * |
| | $x_1^2 - x_2^2 + 1$ | $= 0$ | Hyperbel / hyperbolischer Zylinder |
| | $-x_1^2 - x_2^2 + 1$ | $= 0$ | Ellipse / elliptischer Zylinder |
| | $x_1^2 + 1$ | $= 0$ | kein Punkt / kein Punkt * |
| | $-x_1^2 + 1$ | $= 0$ | paralleles Geraden- / Ebenenpaar |
| **(III)** | $x_1^2 + 2\,x_2$ | $= 0$ | Parabel / parabolischer Zylinder |

Die mit * gekennzeichneten Quadriken sehen wieder mager aus, haben aber ebenfalls noch viele Punkte „im Komplexen“. Die interessanten Quadriken aus 6.3.7 zeigt Abbildung 6.2 auf Seite 172.

**6.3.9 Beispiel.** Die Quadrik

$$Q := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + x_2^2 + 30\,x_2 - 20 = 0\right\}$$

hat die Matrixbeschreibung $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\top A\,x + 2\,a^\top x + c = 0\right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad c = -20\,.$$

*Erster Schritt: Diagonalisierung (gegen gemischte Terme).*

Die Eigenwerte von $A$ ergeben sich aus

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\,\lambda = \lambda(\lambda - 5)$$

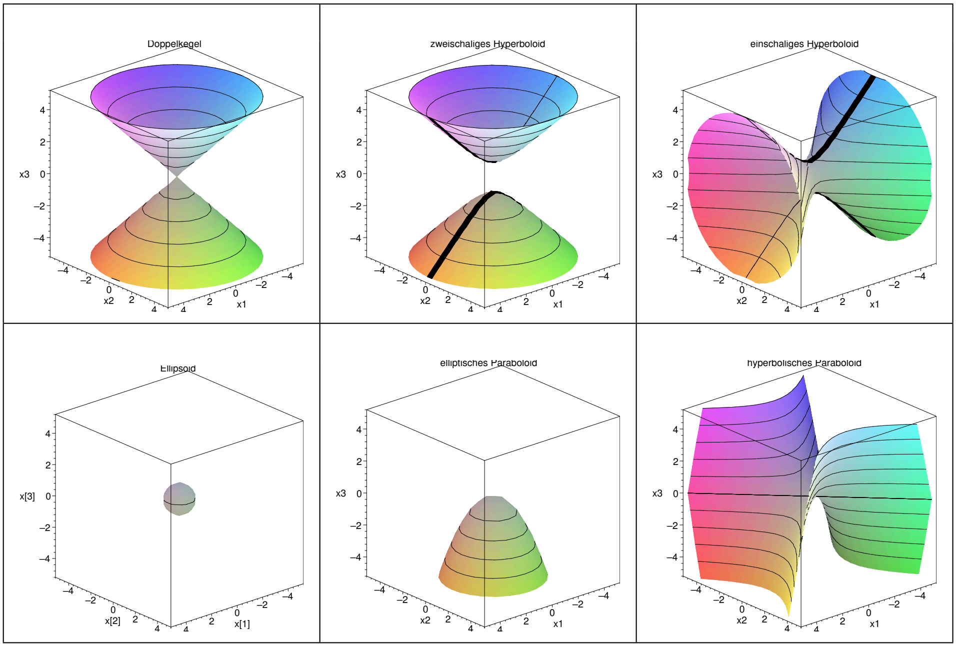


Abbildung 6.1: Quadriken im Raum, deren Gleichungen alle Variablen benutzen

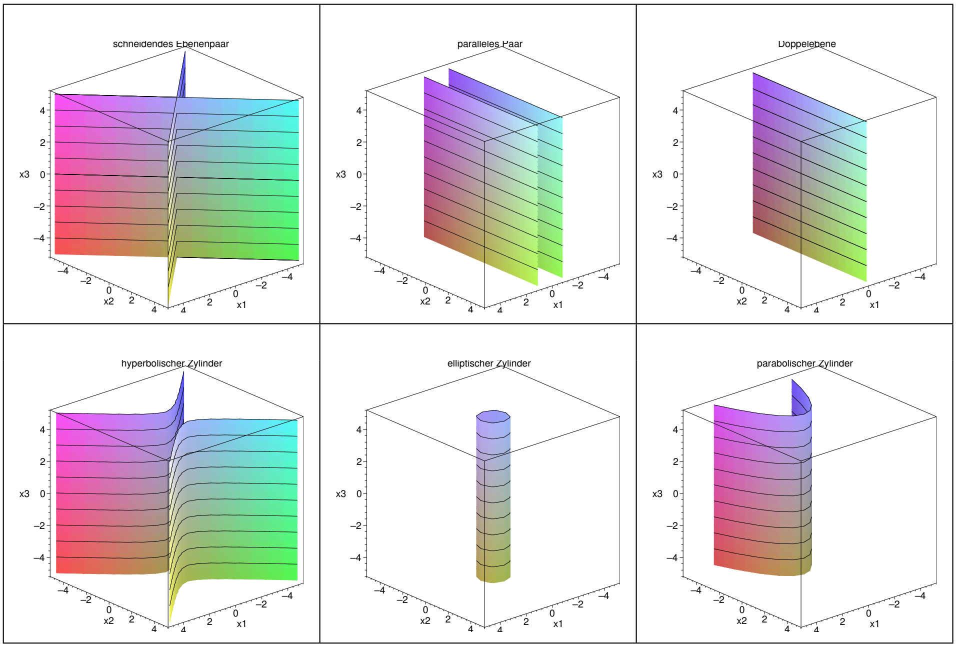


Abbildung 6.2: Quadriken, deren Gleichungen nicht alle Variablen benutzen

als $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 0$. Eigenvektoren dazu sind z. B.

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V(5)\,, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in V(0)\,.$$

Die Vektoren $v_1$ und $v_2$ stehen aufeinander senkrecht, wir müssen aber noch normieren. Wir kehren außerdem die Richtung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$ um, damit wir ein Rechtssystem erhalten:

$$f_1 := -\tfrac{1}{\sqrt{5}}\, v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_2 := \tfrac{1}{\sqrt{5}}\, v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Basis $f_1, f_2$ ist dargestellt in Abbildung 6.3 auf Seite 173; dort sieht man auch die Koordinatensysteme $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ und $\mathbb{H}$, die wir im Folgenden entwickeln.

Die Skizze in Abbildung 6.3 veranschaulicht die benutzten Koordinatensysteme, nämlich das Standard-Koordinatensystem $\mathbb{E} = (O; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$, das gedrehte System $\mathbb{F} = (O; f_1, f_2)$ mit $f_1 := \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1)^{\mathsf{T}}$, $f_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)^{\mathsf{T}}$ und die verschobenen Systeme $\mathbb{G} = (P; f_1, f_2)$ und $\mathbb{H} = (R; f_1, f_2)$ mit $P := \frac{3}{5}(-2,-1)^{\mathsf{T}}$ und $R := \frac{1}{60}(-101, 22)^{\mathsf{T}}$.

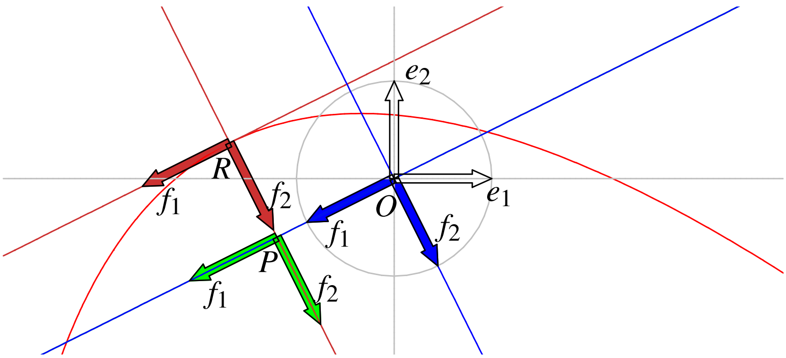


Abbildung 6.3: Koordinatensysteme für die Quadrik $Q$ aus 6.3.9

Mit $F := \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ergibt sich jetzt

$$F^{\mathsf{T}} A\, F = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F^{\mathsf{T}} a = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -15 \\ -30 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Im Koordinatensystem $\mathbb{F} = (O, f_1, f_2)$ hat $Q$ also die Gleichung

$$5\,y_1^2 - 6\,\sqrt{5}\,y_1 - 12\,\sqrt{5}\,y_2 - 20 = 0\,.$$

[Man erhält diese Gleichung, indem man $y := {}_{\mathbb{F}}X$ ansetzt und dann ${}_{\mathbb{E}}X = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}X) = F\,y$ in die alte Gleichung (also die für $x = {}_{\mathbb{E}}X$) einsetzt.]

*Zweiter Schritt: Verschiebung (gegen lineare Terme).*

Durch quadratische Ergänzung finden wir eine Verschiebung derart, dass die zweite Achse im verschobenen Koordinatensystem eine Symmetrieachse der Quadrik ist: Aus

$$5\,y_1^2 - 6\,\sqrt{5}\,y_1 = 5\left(y_1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = 5\left(y_1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 9$$

sehen wir, dass wir $z_1 := y_1 - \frac{3}{\sqrt{5}}$ (und $z_2 := y_2$) setzen sollten, also

$$5\,z_1^2 - 12\,\sqrt{5}\,z_2 - 29 = 0 \quad \text{mit} \quad y = z + \frac{3}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Dies ist die Gleichung der Quadrik in Koordinaten bezüglich $\mathbb{G} = (P; f_1, f_2)$, passend zu $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{\sqrt{5}} f_1$ gilt zuerst ${}_{\mathbb{F}}P = \frac{3}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und damit

$${}_{\mathbb{E}}P = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}.$$

*Dritter Schritt: Verschiebung parallel zur Symmetrieachse (gegen die Konstante).*

Wir verschieben unser Koordinatensystem noch ein letztes Mal, um den Ursprung auf den Scheitel der Parabel zu legen. Die passende Verschiebung ergibt sich aus dem Ansatz $-12\,\sqrt{5}\,z_2 - 29 = -12\,\sqrt{5}\,w_2$ (und $z_1 = w_1$): Dies liefert $z_2 = w_2 - \frac{29}{12\,\sqrt{5}}$, der Ursprung $R$ im neuen Koordinatensystem $\mathbb{H} = (R; f_1, f_2)$ hat demnach die Koordinaten ${}_{\mathbb{G}}R = \left(0, -\frac{29}{12\,\sqrt{5}}\right)^{\mathsf{T}}$ und

$${}_{\mathbb{E}}R = {}_{\mathbb{E}}P - \frac{29}{12\,\sqrt{5}}\,f_2 = \frac{1}{60}\begin{pmatrix}-101\\22\end{pmatrix}.$$

Bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{H} = \left(\frac{1}{60}\binom{-101}{22}; \frac{1}{\sqrt{5}}\binom{-2}{-1}, \frac{1}{\sqrt{5}}\binom{1}{-2}\right)$ wird die Quadrik $Q$ also dargestellt durch die Gleichung $5\,w_1^2 - 12\,\sqrt{5}\,w_2 = 0$.
Die euklidische Normalform lautet $-\frac{\sqrt{5}}{6}\,w_1^2 + 2\,w_2 = 0$.

**6.3.10 Beispiel.** In $\mathbb{R}^3$ sei eine Quadrik gegeben durch die folgende Gleichung:

$$2\,x_1^2 + \sqrt{5}\,x_1\,x_2 - x_3^2 - 2\,x_1 + 2\,\sqrt{5}\,x_2 + 2\,x_3 = 2\,.$$

In Matrixschreibweise: $x^\mathsf{T} A\,x + 2\,a^\mathsf{T} x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = -2\,.$$

Wir wollen zuerst entscheiden, welcher Quadriktyp hier vorliegt und dann die euklidische Normalform bestimmen.

*Grobeinteilung:* Um den Typ der Quadrik zu bestimmen, berechnen wir

$$r = \operatorname{Rg} A \quad = \quad \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad = \quad 3,$$

$$\begin{aligned} r_{\text{erw}} = \operatorname{Rg}(A_{\text{erw}}) \;&=\; \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{r|rrr} -2 & -1 & \sqrt{5} & 1 \\ \hline -1 & 2 & \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \;=\; \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 & 0 \\ -2 & -1 & \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \\ &=\; \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2}\sqrt{5} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & -1 & \sqrt{5} & -1 \end{pmatrix} \;=\; \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}\sqrt{5} & -3 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 0 & -1 & \sqrt{5} & -1 \end{pmatrix} = 4\,. \end{aligned}$$

Es liegt also eine Mittelpunktsquadrik vor (ein- oder zweischaliges Hyperboloid, vgl. 6.2.6).

*Erster Schritt: Diagonalisierung.*
Wir erhalten die Eigenwerte von $A$ als Nullstellen von

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{E}_3) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\,(\lambda^2 - 2\lambda - \tfrac{5}{4})\,(\lambda+1)\,,$$

also als $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, und $\lambda_3 = -1$.

Durch Lösen der entsprechenden linearen Gleichungssysteme erhalten wir $V(\frac{5}{2}) = \mathrm{L}\,(f_1^*)$, $V(-\frac{1}{2}) = \mathrm{L}\,(f_2^*)$ und $V(-1) = \mathrm{L}\,(f_3^*)$, wobei

$$f_1^* := \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2^* := \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_3^* := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren stehen schon senkrecht aufeinander (das hat einen systematischen Grund, vgl. 5.4.5). Der Eigenwert $0$ kommt nicht vor, bei der Reihenfolge braucht also nichts Besonderes berücksichtigt zu werden.
Wir müssen die $f_j^*$ normieren:

$$f_1 := \frac{1}{|f_1^*|}\,f_1^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 := \frac{1}{|f_2^*|}\,f_2^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 := f_3^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Transformationsmatrix

$$F := (f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Probe:

$$F^\mathsf{T} A\, F = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $F^\mathsf{T} a = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystem $\mathbb{F} = (\vec{0}; f_1, f_2, f_3)$ hat unsere Quadrik also die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= y^\top \left(F^\top A\, F\right) y + 2\left(F^\top a\right)^\top y - 2 \\ &= y^\top \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}^\top y - 2 \\ &= \tfrac{5}{2}\, y_1^2 - \tfrac{1}{2}\, y_2^2 - \; y_3^2 + 2\sqrt{6}\, y_2 + 2\, y_3 - 2\,. \end{aligned}$$

*Zweiter (und letzter) Schritt: Verschiebung.*
Durch quadratische Ergänzung sehen wir, wie wir verschieben müssen, um den linearen Term in $y_2$ zu beseitigen:

$$-\frac{1}{2}\, y_2^2 + 2\sqrt{6}\, y_2 = -\frac{1}{2}\left(y_2^2 - 2(2\sqrt{6}\, y_2)\right) = -\frac{1}{2}\left(y_2 - 2\sqrt{6}\right)^2 + 12\,.$$

Analog beseitigen wir den linearen Term in $y_3$:

$$-y_3^2 + 2\, y_3 = -\left(y_3^2 - 2\, y_3\right) = -\left(y_3 - 1\right)^2 + 1\,.$$

Wir nehmen als neuen Ursprung also den Punkt $P$ mit ${}_{\mathbb{F}}P := \left(0, 2\sqrt{6}, 1\right)^\top$ (für diesen gilt $P = {}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}P) = F\,{}_{\mathbb{F}}P = (-2, 2\sqrt{5}, 1)^\top$ ), und erhalten bezüglich des kartesischen Koordinatensystems

$$\mathbb{G} := \left(P; f_1, f_2, f_3\right) = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

die Gleichung

$$0 = \tfrac{5}{2}\, z_1^2 - \tfrac{1}{2}\, z_2^2 - \; z_3^2 + 11\,.$$

Die euklidische Normalform erhält man, indem man diese Gleichung noch durch 11 dividiert:

$$\frac{5}{22}\, z_1^2 - \frac{1}{22}\, z_2^2 - \frac{1}{11}\, z_3^2 + 1 = 0\,.$$

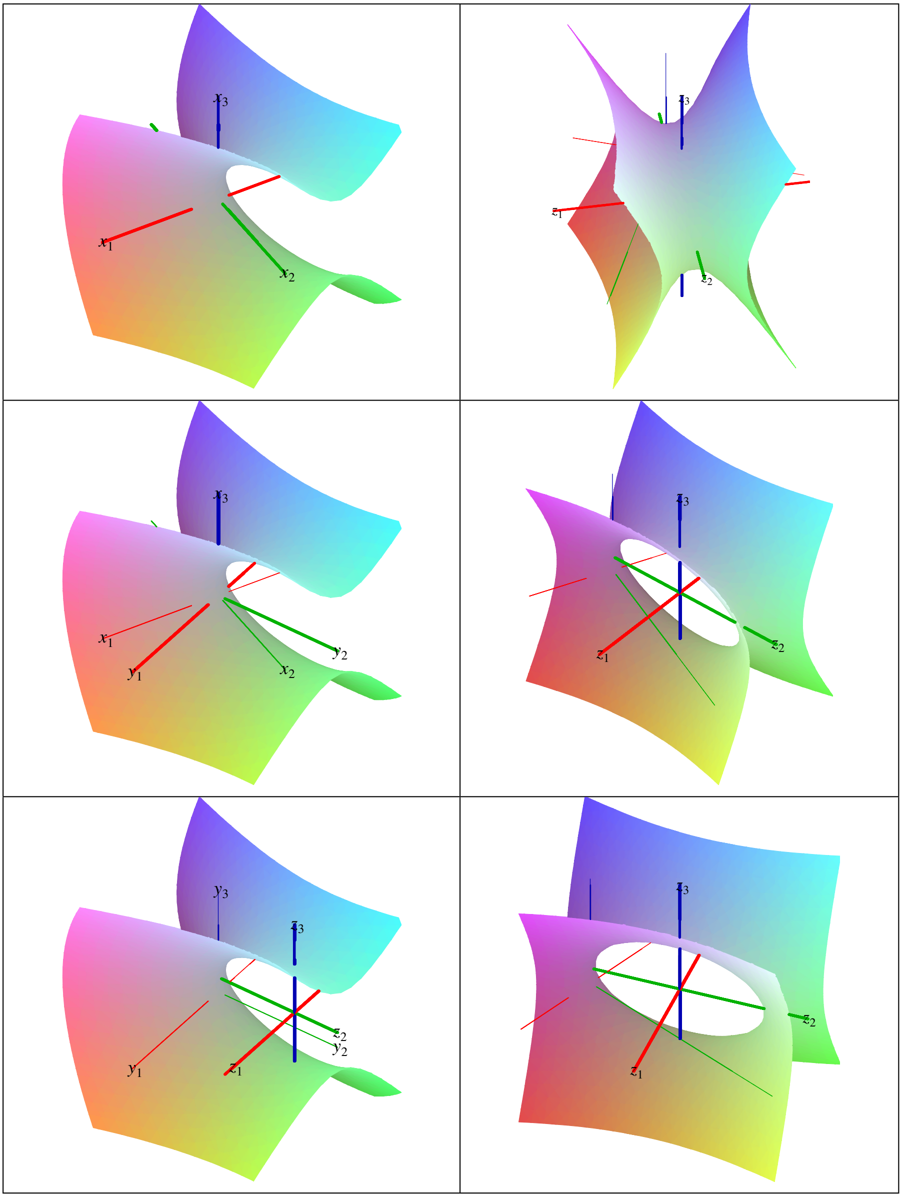


Abbildung 6.4: Die durch $2\,x_1^2 + \sqrt{5}\,x_1\,x_2 - x_3^2 - 2\,x_1 + 2\,\sqrt{5}\,x_2 + 2\,x_3 = 2$ gegebene Quadrik: ein einschaliges Hyperboloid.
Die Geraden deuten die Achsen in den Koordinatensystemen $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ bzw. $\mathbb{G}$ an.
Auf der rechten Seite wurden verschiedene neue Blickwinkel gewählt, um einen besseren Eindruck zu vermitteln.

Die Quadrik ist ein einschaliges Hyperboloid, in Abb. 38 findet man verschiedene grafische Darstellungen dazu.
Die benötigten Koordinatentransformationen erhält man mit

$$F = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F^\top P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

als

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ & y \mapsto F y, & {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\ & x \mapsto F^\top x, \\ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}\colon\ & z \mapsto z + F^\top P, & {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ & y \mapsto y - F^\top P, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}\colon\ & z \mapsto F(z + F^\top P) &=& \ F z + P, \\ {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\ & x \mapsto F^\top (x - P) &=& \ F^\top x - F^\top P. \end{aligned}$$

**6.3.11 Beispiel.** In $\mathbb{R}^3$ sei die folgende Quadrik gegeben:

$$9\,x_1^2 + 24\,x_1\,x_2 + 16\,x_2^2 + k\,x_3^2 + 10\,x_1 - 20\,x_2 + 20\,x_3 + 1 = 0\,.$$

In Matrixschreibweise: $x^{\mathsf{T}} A\,x + 2\,a^{\mathsf{T}} x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad c = 1\,.$$

Wir wollen zuerst entscheiden, welcher Quadriktyp hier vorliegt (das wird vom Wert des Parameters $k$ abhängen), und dann die euklidische Normalform bestimmen.

Um den Typ der Quadrik zu bestimmen, berechnen wir

$$r = \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \\ 2 & \text{für } k \neq 0. \end{cases}$$

$$r_{\text{erw}} = \operatorname{Rg}(A_{\text{erw}}) \;=\; \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{r|rrr} 1 & 5 & -10 & 10 \\ \hline 5 & 9 & 12 & 0 \\ -10 & 12 & 16 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & k \end{array}\right) \;=\; \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & -\frac{k}{2} \\ 0 & 12 & 16 & k \\ 10 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\;=\; \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 3 & 4 & -\frac{1}{6}\,k \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3}\,k \\ 10 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Für $k \neq 0$ erhalten wir:

$$r_{\text{erw}} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & -\frac{k}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} = 4\,;$$

für $k = 0$ dagegen

$$r_{\text{erw}} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\,.$$

In beiden Fällen gilt also $r_{\mathrm{erw}} - r = 2$, und es liegen Quadriken vom parabolischen Typ vor: Ein (elliptisches oder hyperbolisches) Paraboloid für $k \neq 0$, und ein parabolischer Zylinder für $k = 0$.

Wir wollen für den Fall $k = 0$ auch noch die euklidische Normalform der Quadrik bestimmen.

*Erster Schritt: Diagonalisierung.*

Wir erhalten die Eigenwerte von $A$ als Nullstellen von

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{E}_3) = \det\begin{pmatrix} 9-\lambda & 12 & 0 \\ 12 & 16-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2\,(\lambda - 25)\,,$$

also als $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = 0 = \lambda_3$. Wir haben den Eigenwert 0 schon nach hinten sortiert, müssen bei der Wahl der Basis für den Eigenraum $V(0)$ aber noch aufpassen (weil die Quadrik vom *parabolischen* Typ ist).

Durch Lösen der entsprechenden linearen Gleichungssysteme erhalten wir $V(25) = \mathrm{L}\,(v_1^*)$ und $V(0) = \mathrm{L}\,(v_2^*, v_3^*)$, wobei

$$v_1^* := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2^* := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3^* := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen eine Orthonormalbasis für $V(0)$, bei der möglichst viele Basisvektoren orthogonal sind zu dem Vektor $a$, der den linearen Term beschreibt. Wir setzen deswegen die folgende Gleichung an (siehe $(*)$ auf Seite 165):

$$0 = \left\langle t_2 v_2^* + t_3 v_3^* \,\middle|\, a \right\rangle = t_2 \left\langle v_2^* \,\middle|\, a \right\rangle + t_3 \left\langle v_3^* \,\middle|\, a \right\rangle .$$

Dies führt auf $0 = 50\,t_2 - 10\,t_3$, also $t_3 = 5\,t_2$. Deswegen setzen wir $f_3^* := v_2^* + 5\,v_3^*$, und erhalten nach Normierung

$$f_3 := \frac{1}{5\,\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Um jetzt eine Orthonormalbasis für $V(0) = \mathrm{L}\left(v_2^*, v_3^*\right) = \mathrm{L}\left(f_3, v_2^*\right)$ zu gewinnen, verwenden wir das Schmidtsche Verfahren (siehe 4.5.10):

$$f_2^* := v_2^* - \left\langle v_2^* \,\middle|\, f_3 \right\rangle f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{50} \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Nach Normierung haben wir jetzt also die gewünschte Orthonormalbasis für den Eigenraum $V(0)$:

$$f_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}, \qquad f_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-3\\-5\end{pmatrix}.$$

Der bereits gefundene Eigenvektor $v_1^*$ zum Eigenwert 25 steht senkrecht auf $f_2$ und $f_3$ (das hat einen systematischen Grund, vgl. 5.4.5). Die Wahl des Vorzeichens bei $f_3^*$ bewirkt, dass die neue Basis wieder richtig orientiert ist: Wir werden wieder ein Rechtssystem erhalten.

Es bleibt also nur noch die Normierung:

$$f_1 := \frac{1}{|v_1^*|}\,v_1^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Transformationsmatrix

$$F := (f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 4 & 4\\ 4\sqrt{2} & -3 & -3\\ 0 & 5 & -5\end{pmatrix}.$$

Probe:

$$F^{\mathsf{T}} A\, F = \frac{1}{50}\begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 0\\ 4 & -3 & 5\\ 4 & -3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 12 & 0\\ 12 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 4 & 4\\ 4\sqrt{2} & -3 & -3\\ 0 & 5 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\mathbb{F} = (\vec{0}; f_1, f_2, f_3)$ hat unsere Quadrik die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= y^{\mathsf{T}}\left(F^{\mathsf{T}} A\, F\right) y + 2\left(F^{\mathsf{T}} a\right)^{\mathsf{T}} y + 1\\
&= y^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} y + \left(\frac{2}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 0\\ 4 & -3 & 5\\ 4 & -3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-10\\10\end{pmatrix}\right)^{\mathsf{T}} y + 1\\
&= 25\,y_1^2 - 10\,y_1 + 20\sqrt{2}\,y_2 + 1\,.
\end{aligned}$$

(Dass $y_3$ im linearen Term nicht vorkommt, liegt an unserer vorausschauenden Wahl der Basis für $V(0)$.)

*Zweiter Schritt: Verschiebung.*
Durch quadratische Ergänzung sehen wir, wie wir verschieben müssen, um den linearen Term in $y_1$ zu beseitigen:

$$25\,y_1^2 - 10\,y_1 = 25\left(y_1^2 - \frac{10}{25}\,y_1\right) = 25\left(y_1 - \frac{1}{5}\right)^2 - 1\,.$$

Wir verwenden als neuen Ursprung also den Punkt $P$ mit ${}_{\mathbb{F}}P := \left(\frac{1}{5}, 0, 0\right)^{\mathsf{T}}$ (für diesen gilt $P = {}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}P) = F\,{}_{\mathbb{F}}P = \frac{1}{25}(3,4,0)^{\mathsf{T}}$ ), und erhalten bezüglich des Koordinatensystems $\mathbb{G} = \big(P; f_1, f_2, f_3\big)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= 25\,z_1^2 + 20\sqrt{2}\,z_2 - 1 + 1 \\ \text{bzw. [nach Division]}\quad 0 &= \tfrac{5\sqrt{2}}{4}\,z_1^2 + 2\,z_2\,. \end{aligned}$$

Damit ist die euklidische Normalform erreicht.

Die benötigten Koordinatentransformationen erhält man mit

$$F = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 4 & 4 \\ 4\sqrt{2} & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mathsf{T}}P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ & v \mapsto F\,v\,, & {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\ & v \mapsto F^{\mathsf{T}}v\,, \\ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}\colon\ & v \mapsto v + F^{\mathsf{T}}P\,, & {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ & v \mapsto v - F^{\mathsf{T}}P\,. \end{aligned}$$

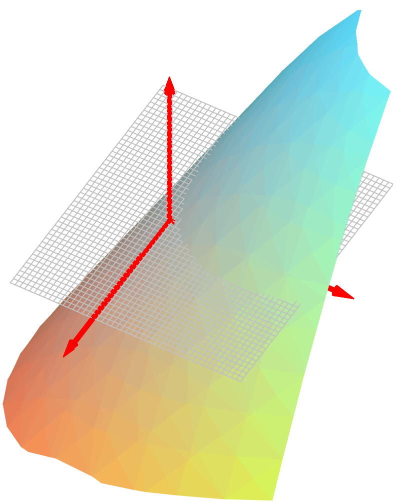

Abbildung 6.5: Die Quadrik (ein parabolischer Zylinder) mit der Gleichung
$9\,x_1^2 + 24\,x_1\,x_2 + 16\,x_2^2 + 10\,x_1 - 20\,x_2 + 20\,x_3 + 1 = 0\,.$
Die Pfeile deuten das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ und das System $\mathbb{F}$ an.

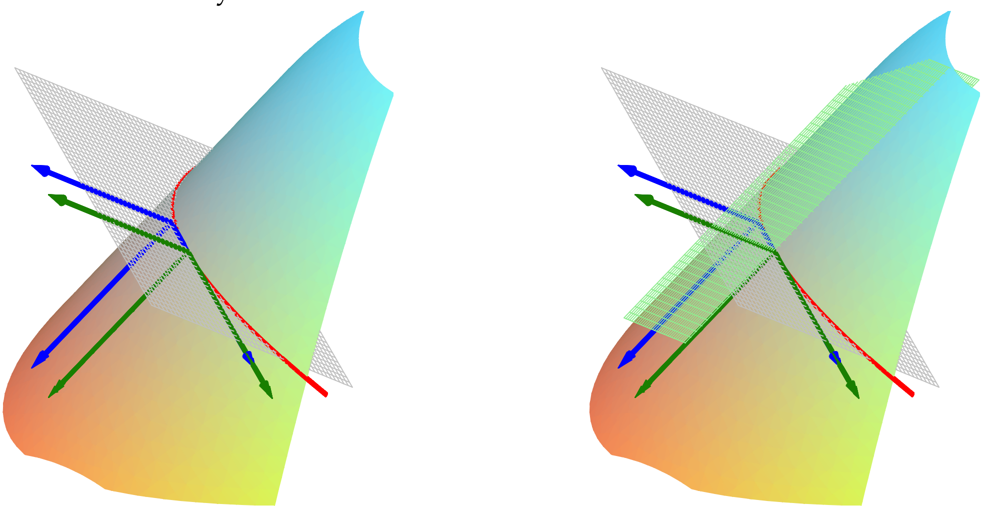

Abbildung 6.6: Die Quadrik mit den Systemen $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$. Die von $f_1$ und $f_2$ aufgespannte Ebene schneidet die Quadrik in einer Parabel (links), die von $f_2$ und $f_3$ aufgespannte Ebene durch den neuen Ursprung $P$ ist eine Symmetrieebene der Quadrik.