Im Wintersemester 2012/13 wurde in der Vorlesung „Höhere Mathematik 1 für Ingenieurstudiengänge“ das folgende Beispiel einer Hauptachsentransformation besprochen:

6.3.11 Beispiel. In $\mathbb{R}^3$ sei eine Quadrik gegeben durch die folgende Gleichung:

$$2\,x_1^2 + \sqrt{5}\,x_1\,x_2 - x_3^2 - 2\,x_1 + 2\,\sqrt{5}\,x_2 + 2\,x_3 = 2\,.$$

In Matrixschreibweise: $x^{\mathsf{T}} A\, x + 2\, a^{\mathsf{T}} x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac12\sqrt{5} & 0 \\ \frac12\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = -2\,.$$

Wir wollen zuerst entscheiden, welcher Quadriktyp hier vorliegt und dann die euklidische Normalform bestimmen.

Grobeinteilung: Um den Typ der Quadrik zu bestimmen, berechnen wir

$$r = \operatorname{Rg} A \quad = \quad \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 2 & \frac12\sqrt{5} & 0 \\ \frac12\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad = \; 3\,,$$

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{erw}} = \operatorname{Rg}(A_{\mathrm{erw}}) \;&=\; \operatorname{Rg}\left(\begin{array}{c|ccc} -2 & -1 & \sqrt{5} & 1 \\ \hline -1 & 2 & \frac12\sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & \frac12\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \frac12\sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & \frac12\sqrt{5} & 0 & 0 \\ -2 & -1 & \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \\ &=\; \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \frac12\sqrt{5} & -1 \\ 0 & \frac12\sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & -1 & \sqrt{5} & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac52\sqrt{5} & -3 \\ 0 & 0 & \frac52 & \frac12\sqrt{5} \\ 0 & -1 & \sqrt{5} & -1 \end{pmatrix} = 4\,. \end{aligned}$$

Es liegt also eine Mittelpunktsquadrik vor (vgl. 6.2.6).

Erster Schritt: Diagonalisierung.
Wir erhalten die Eigenwerte von A als Nullstellen von

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{E}_3) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & \frac12\sqrt{5} & 0 \\ \frac12\sqrt{5} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\,(\lambda^2 - 2\lambda - \tfrac54)\,(\lambda+1)\,,$$

also als $\lambda_1 = \frac52$, $\lambda_2 = -\frac12$, und $\lambda_3 = -1$.

Durch Lösen der entsprechenden linearen Gleichungssysteme erhalten wir $V(\frac{5}{2}) = \mathrm{L}\,(f_1^*)$, $V(-\frac{1}{2}) = \mathrm{L}\,(f_2^*)$ und $V(-1) = \mathrm{L}\,(f_3^*)$, wobei

$$f_1^* := \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2^* := \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_3^* := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren stehen schon senkrecht aufeinander (das hat einen systematischen Grund, vgl. 5.4.5).

Wir müssen die f_j^* normieren:

$$f_1 := \frac{1}{|f_1^*|}\,f_1^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 := \frac{1}{|f_2^*|}\,f_2^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 := f_3^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Transformationsmatrix

$$F := (f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Probe:

$$F^{\mathsf{T}} A\, F = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $F^{\mathsf{T}} a = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$

Bezüglich des kartesischen Koordinatensystem $\mathbb{F} = (\vec{0}; f_1, f_2, f_3)$ hat unsere Quadrik also die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= y^{\mathsf{T}}\left(F^{\mathsf{T}} A\, F\right) y + 2\left(F^{\mathsf{T}} a\right)^{\mathsf{T}} y - 2 \\ &= y^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} y - 2 \\ &= \tfrac{5}{2}\, y_1^2 - \tfrac{1}{2}\, y_2^2 - y_3^2 + 2\sqrt{6}\, y_2 + 2\, y_3 - 2\,. \end{aligned}$$

Zweiter (und letzter) Schritt: Verschiebung.
Durch quadratische Ergänzung sehen wir, wie wir verschieben müssen, um den linearen Term in y_2 zu beseitigen:

$$-\frac{1}{2}\,y_2^2 + 2\sqrt{6}\,y_2 = -\frac{1}{2}\,\left(y_2^2 - 2(2\sqrt{6}\,y_2)\right) = -\frac{1}{2}\,\left(y_2 - 2\sqrt{6}\right)^2 + 12\,.$$

Analog beseitigen wir den linearen Term in y_3:

$$-y_3^2 + 2\,y_3 = -\left(y_3^2 - 2\,y_3\right) = -\left(y_3 - 1\right)^2 + 1\,.$$

Wir nehmen als neuen Ursprung also den Punkt P mit ${}_{\mathbb{F}}P := \left(0, 2\sqrt{6}, 1\right)^{\mathsf{T}}$ (für diesen gilt $P = {}_{\mathbb{E}}P = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}P) = F\,{}_{\mathbb{F}}P = (-2, 2\sqrt{5}, 1)^{\mathsf{T}}$), und erhalten bezüglich des kartesischen Koordinatensystems

$$\mathbb{G} := \left(P; f_1, f_2, f_3\right) = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

die Gleichung

$$0 \;=\; \tfrac{5}{2}\,z_1^2 - \tfrac{1}{2}\,z_2^2 - z_3^2 + 11\,.$$

Die euklidische Normalform erhält man, indem man diese Gleichung noch durch 11 dividiert:

$$\frac{5}{22}\,z_1^2 - \frac{1}{22}\,z_2^2 - \frac{1}{11}\,z_3^2 + 1 = 0\,.$$

Die Quadrik ist ein einschaliges Hyperboloid, in Abb. 6.1 findet man verschiedene grafische Darstellungen dazu.
Die benötigten Koordinatentransformationen erhält man mit

$$F = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix},\quad F^{\mathsf{T}}P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

als

$$\begin{aligned}
&{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ y \mapsto F\,y\,, && {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\ x \mapsto F^{\mathsf{T}}x\,,\\
&{}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}\colon\ z \mapsto z + F^{\mathsf{T}}P\,, && {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ y \mapsto y - F^{\mathsf{T}}P\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} = {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}\colon\quad & z \mapsto F\,(z + F^{\mathsf{T}}P) &&= F\,z + P\,,\\
{}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}} = {}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}} \circ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\quad & x \mapsto F^{\mathsf{T}}(x - P) &&= F^{\mathsf{T}}x - F^{\mathsf{T}}P\,.
\end{aligned}$$

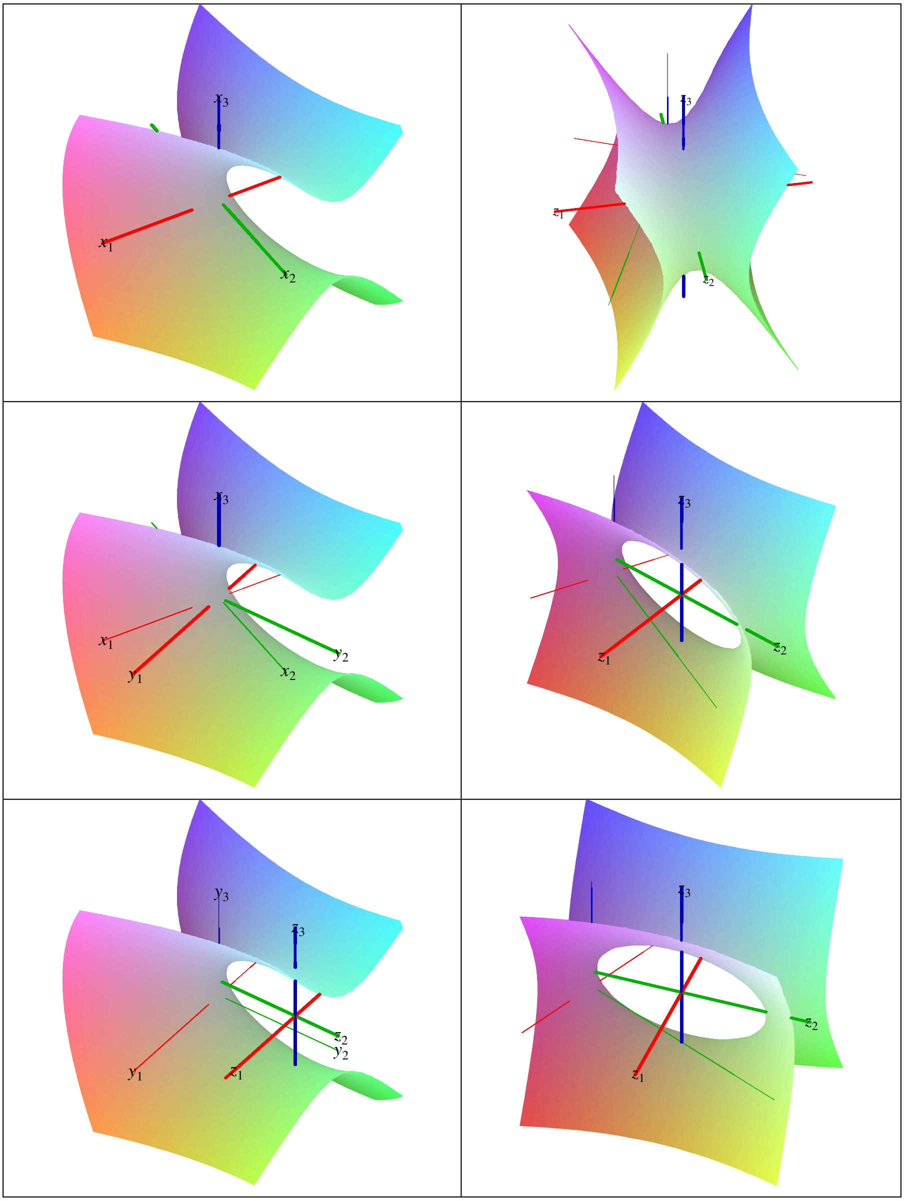

Abbildung 6.1: Die durch $2\,x_1^2 + \sqrt{5}\,x_1\,x_2 - x_3^2 - 2\,x_1 + 2\,\sqrt{5}\,x_2 + 2\,x_3 = 2$ gegebene Quadrik. Die Geraden deuten die Achsen in den Koordinatensystemen $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ bzw. $\mathbb{G}$ an.
Auf der rechten Seite wurden verschiedene neue Blickwinkel gewählt, um einen besseren Eindruck zu vermitteln.