Im Sommersemester 2014 wurde in der Vorlesung „Höhere Mathematik 2 für Ingenieurstudiengänge“ das folgende Material zur Potentialtheorie ergänzt:

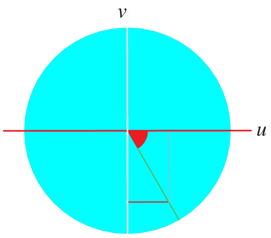
Wir wollen den Verlauf der Potentialfunktion

$$U\colon \left\{ \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u \neq 0 \right\} \to \mathbb{R}\colon \binom{u}{v} \mapsto \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

zum Vektorfeld

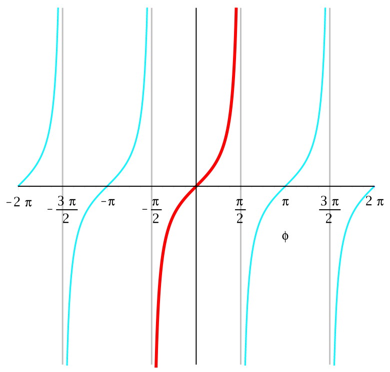
$$g\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \to \mathbb{R}^2\colon \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{-v}{u^2+v^2} \\ \dfrac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

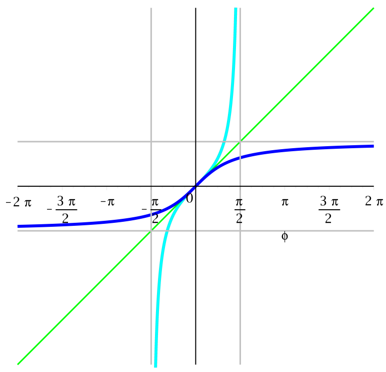
verdeutlichen. Statt des vollen (unbeschränkten) Definitionsbereichs zeichnen wir in den folgenden Bildern nur den Teil, der im Innern eines Kreises um den Ursprung liegt.



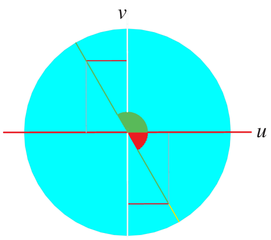
Es gilt $\frac{v}{u} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi$ für den markierten Winkel φ.
Wenn wir die Umkehrfunktion arctan zu tan *geeignet* wählen, erhalten wir $U(u,v) = \varphi$ für alle $\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $u > 0$.
In diesem Bereich läuft dann φ von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$.

Was heißt „*geeignet*“ für die Umkehrfunktion?
Die Einschränkung $f\colon (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \to \mathbb{R}\colon \varphi \mapsto \tan\varphi$ ist bijektiv und hat eine Umkehrfunktion: $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)\colon x \mapsto \arctan(x)$.





Wenn wir den Winkel φ über $\frac{1}{2}\pi$ hinaus bis $\frac{3}{2}\pi$ laufen lassen, durchlaufen wir die linke Hälfte des Definitionsgebietes. Dabei wiederholen sich die Werte für $\frac{v}{u} = \frac{-v}{-u} = \tan\varphi = \tan(\varphi + \pi)$.



Die durch $U(u,v) = \arctan(\frac{v}{u})$ gegebene Potentialfunktion U ist also auf jeder Geraden durch den Ursprung *konstant*:
Die Schnitte dieser Geraden mit dem Definitionsbereich sind Niveaulinien von U (*Äquipotentiallinien*).

Beim Übergang über die Definitionslücke ($u = 0$) „springt" der Wert des Potentials zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ [weil tan die Periode π hat].

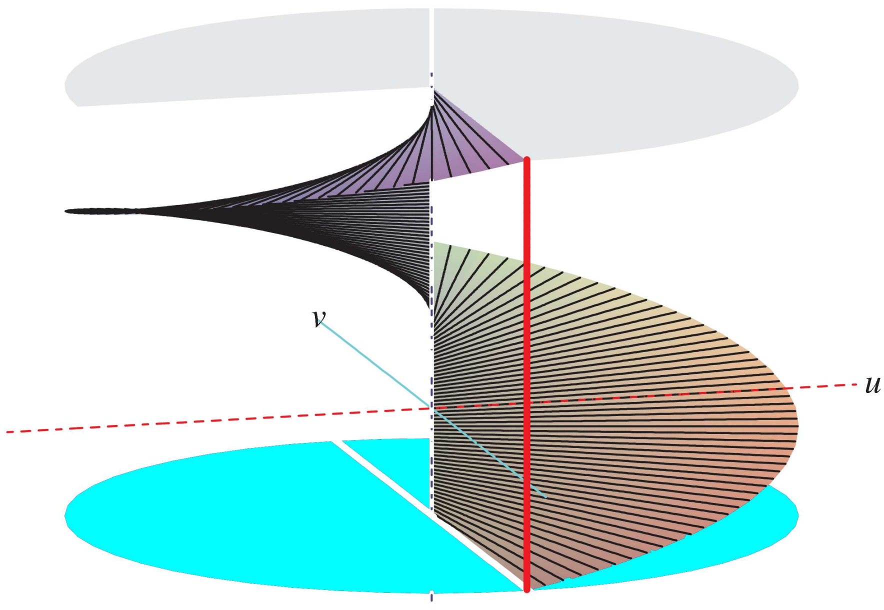
Wenn wir auf der linken Hälfte unser Potential um π nach oben verschieben, schließt sich dieser Teil auf der *positiven* Hälfte der v-Achse gut an die rechte Hälfte an. Explizit setzen wir

$$\tilde{U}(u,v) := \begin{cases} \arctan(\frac{u}{v}) & , \quad \text{falls } u > 0, \\ \frac{1}{2}\pi & , \quad \text{falls } u = 0 \text{ und } v > 0, \\ \pi + \arctan(\frac{u}{v}) & , \quad \text{falls } u < 0. \end{cases}$$

Damit erhalten wir eine Potentialfunktion $\tilde{U}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \binom{0}{v} \,\middle|\, v \leqq 0 \right\} \to \mathbb{R}$.

Diese Funktion $\tilde{U}$ ist stetig (sogar differenzierbar), es gibt aber keine stetige Fortsetzung auf einen größeren Teil der Ebene.

Wir verschieben die Andeutung des Definitionsbereichs um $\frac{1}{2}\pi$ nach unten (aus dem Weg), und bauen dann den Graphen des neuen Potentials $\tilde{U}$ auf—*am Ende bleibt immer noch ein Sprung:*



Man könnte die Wendelfläche jetzt noch weiter schrauben — aber das ist dann nicht mehr der Graph einer *Funktion* ...