Name: ______ **Matrikelnr.:** ______ **Fach:** ______

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ______ **Gruppennr.:** ______

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (3,5),\ _{\mathbb{E}}P_1 = (1,4),\ _{\mathbb{E}}P_2 = (0,2).$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F} = (U; f_1, f_2)$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0),\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0),\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1).$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right) \qquad _{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei v ein Eigenvektor von A. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind (Achtung, falsche Antworten geben Punktabzug):

Wenn A orthogonal ist, dann gilt $\mathrm{Rg}(A) = n$	wahr ◯	falsch ◯
v ist Eigenvektor von $A^4 + A^3 + E_n$	wahr ◯	falsch ◯
$A + A^T$ ist diagonalisierbar	wahr ◯	falsch ◯
Wenn A lauter verschiedene Eigenwerte hat, dann ist A diagonalisierbar	wahr ◯	falsch ◯
A ist regulär genau dann, wenn 0 Eigenwert von A ist	wahr ◯	falsch ◯
Wenn A diagonalisierbar ist, dann hat A lauter verschiedene Eigenwerte	wahr ◯	falsch ◯

Aufgabe 4 (*13 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Verifizieren Sie, dass $x_1 = (1, -1, 0)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor von A ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ_1? $\lambda_1 = \boxed{}$
2. Der zu λ_1 gehörige Eigenraum $V(\lambda_1)$ ist zweidimensional. Geben Sie eine orthogonale Basis von $V(\lambda_1)$ an:
$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ x_2 = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}.$$
3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:
$$\begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}.$$
4. Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an:
$$\boxed{}, \quad \boxed{}, \quad \boxed{}.$$
5. Geben Sie eine orthogonale Matrix T an , so dass $T^{-1}AT = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lautet D?
$$T = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Entwickeln Sie $\det(A - \lambda E_3)$ nach der 2. Spalte:

$$\det(A-\lambda E_3) = \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right)$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_A von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Gegeben sind die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und die reguläre Matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & -13 & 10 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2).$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A:

   $$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}.$$

   Berechnen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor:

   $$x_1 = \left(\boxed{}\right), \; x_2 = \left(\boxed{}\right), \; x_3 = \left(\boxed{}\right).$$

2. Geben Sie die Eigenwerte der Matrix $C = B^{-1}AB$ an:

   $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $\lambda_3 = \boxed{}$.

3. Berechnen Sie: $\det B = \boxed{}$, $\det A = \boxed{}$, $\det(B^{-1}A) = \boxed{}$, $\operatorname{Sp} C = \boxed{}$

   .

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den zweiten Spaltenvektor der Matrix A so an, dass A orthogonal ist mit $\det A = 1$:

$(a, b, c) =$ | |
|---|

Aufgabe 8 (*11 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $Q = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0 \right\}$.

1. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 0$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:

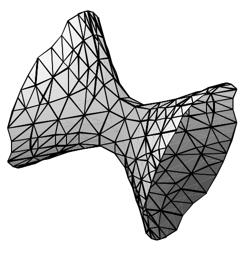
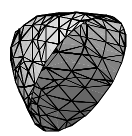
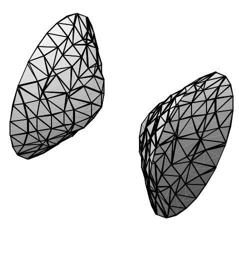
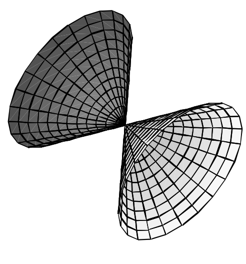
2. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_1 = 2$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:

3. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_1 = 0$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:

4. Kreuzen Sie an, welches Bild die Quadrik Q darstellt:

			
○	○	○	○

Name: [ ] **Matrikelnr.:** [ ] **Fach:** [ ]

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: [ ] **Gruppennr.:** [ ]

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (-1, 3),\ _{\mathbb{E}}P_1 = (2, 7),\ _{\mathbb{E}}P_2 = (-4, 3).$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F} = (U; f_1, f_2)$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0),\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0),\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1).$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right) \qquad _{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und sei v ein Eigenvektor von A. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind (Achtung, falsche Antworten geben Abzug):

Wenn A diagonalisierbar ist, dann hat A lauter verschiedene Eigenwerte	wahr ◯	falsch ◯
v ist Eigenvektor von $A^4 + A^3 + E_n$	wahr ◯	falsch ◯
$A + A^T$ ist diagonalisierbar	wahr ◯	falsch ◯
Wenn A orthogonal ist, dann gilt $\mathrm{Rg}(A) = n$	wahr ◯	falsch ◯
Wenn A lauter verschiedene Eigenwerte hat, dann ist A diagonalisierbar	wahr ◯	falsch ◯
A ist regulär genau dann, wenn 0 Eigenwert von A ist	wahr ◯	falsch ◯

Aufgabe 4 (*13 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

1. Verifizieren Sie, dass $x_1 = (0, 1, -1)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor von A ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ_1? $\lambda_1 = \boxed{}$
2. Der zu λ_1 gehörige Eigenraum $V(\lambda_1)$ ist zweidimensional. Geben Sie eine orthogonale Basis von $V(\lambda_1)$ an:
$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \; x_2 = \left(\boxed{\phantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}}\right) .$$
3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:
$$\left(\boxed{\phantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}}\right), \quad \left(\boxed{\phantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}}\right), \quad \left(\boxed{\phantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}}\right) .$$
4. Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an:
$$\boxed{}, \quad \boxed{}, \quad \boxed{} .$$
5. Geben Sie eine orthogonale Matrix T an , so dass $T^{-1}AT = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lautet D?
$$T = \left(\boxed{\phantom{\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}}}\right); \; D = \left(\boxed{\phantom{\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}}}\right) .$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entwickeln Sie $\det(A - \lambda E_3)$ nach der 2. Spalte:

$$\det(A-\lambda E_3) = \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right)$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_A von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Gegeben sind die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -12 \\ 1 & -1 & 14 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und die reguläre Matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & -13 & 10 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 6).$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A:

   $$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}.$$

   Berechnen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor:

   $$x_1 = \left(\boxed{}\right), \; x_2 = \left(\boxed{}\right), \; x_3 = \left(\boxed{}\right).$$

2. Geben Sie die Eigenwerte der Matrix $C = B^{-1}AB$ an:

   $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $\lambda_3 = \boxed{}$.

3. Berechnen Sie: $\det B = \boxed{}$, $\det A = \boxed{}$, $\det(B^{-1}A) = \boxed{}$, $\operatorname{Sp} C = \boxed{}$

   .

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & c & 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den zweiten Spaltenvektor der Matrix A so an, dass A orthogonal ist mit $\det A = 1$:

$(a, b, c) =$

Aufgabe 8 (*11 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $Q = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 \right\}$.

1. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 0$.

   Gleichung für den Schnitt: Gestalt des Schnitts:

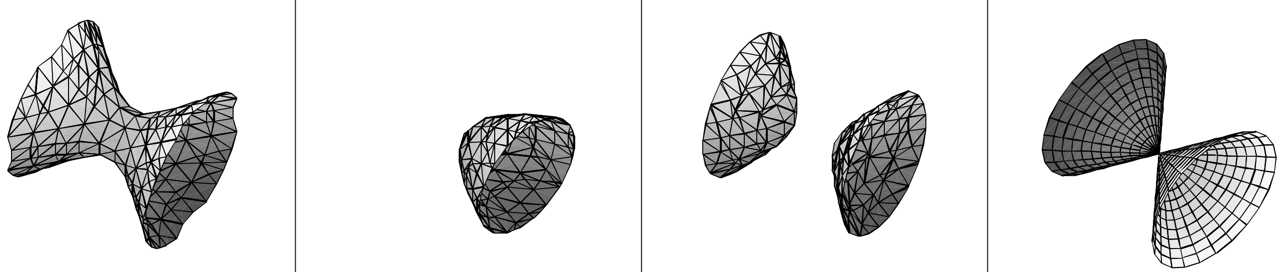
2. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_1 = -3$.

   Gleichung für den Schnitt: Gestalt des Schnitts:

3. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 1$.

   Gleichung für den Schnitt: Gestalt des Schnitts:

4. Kreuzen Sie an, welches Bild die Quadrik Q darstellt:



Name: **Matrikelnr.:**   **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (2, -1),\ _{\mathbb{E}}P_1 = (4, 3),\ _{\mathbb{E}}P_2 = (1, -2).$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F} = (U; f_1, f_2)$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0),\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0),\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1).$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right) \qquad {_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei v ein Eigenvektor von A. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind (Achtung, falsche Antworten geben Abzug):

Wenn A lauter verschiedene Eigenwerte hat, dann ist A diagonalisierbar	wahr ○	falsch ○
$A + A^T$ ist diagonalisierbar	wahr ○	falsch ○
A ist regulär genau dann, wenn 0 Eigenwert von A ist	wahr ○	falsch ○
Wenn A orthogonal ist, dann gilt $\mathrm{Rg}(A) = n$	wahr ○	falsch ○
Wenn A diagonalisierbar ist, dann hat A lauter verschiedene Eigenwerte	wahr ○	falsch ○
v ist Eigenvektor von $A^4 + A^3 + E_n$	wahr ○	falsch ○

Aufgabe 4 (*13 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Verifizieren Sie, dass $x_1 = (2,2,1)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor von A ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ_1? $\lambda_1 = \boxed{}$
2. Der zu λ_1 gehörige Eigenraum $V(\lambda_1)$ ist zweidimensional. Geben Sie eine orthogonale Basis von $V(\lambda_1)$ an:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \; x_2 = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$\begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}.$$

4. Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an:

$$\boxed{}, \quad \boxed{}, \quad \boxed{}.$$

5. Geben Sie eine orthogonale Matrix T an , so dass $T^{-1}AT = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lautet D?

$$T = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Entwickeln Sie $\det(A - \lambda E_3)$ nach der 2. Spalte:

$$\det(A-\lambda E_3) = \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right)$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_A von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Gegeben sind die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -18 \\ -2 & 1 & -4 \\ 7 & -3 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und die reguläre Matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & -13 & 10 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3).$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A:

   $$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}.$$

   Berechnen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor:

   $$x_1 = \left(\boxed{}\right), \quad x_2 = \left(\boxed{}\right), \quad x_3 = \left(\boxed{}\right).$$

2. Geben Sie die Eigenwerte der Matrix $C = B^{-1}AB$ an:

   $\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}.$

3. Berechnen Sie: $\det B = \boxed{}, \quad \det A = \boxed{}, \quad \det(B^{-1}A) = \boxed{}, \quad \operatorname{Sp} C = \boxed{}$

   .

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Geben Sie den zweiten Spaltenvektor der Matrix A so an, dass A orthogonal ist mit $\det A = 1$:

$(a, b, c) =$

Aufgabe 8 (*11 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $Q = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0 \right\}$.

1. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_3 = 0$.

   Gleichung für den Schnitt:

   Gestalt des Schnitts:

2. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 2$.

   Gleichung für den Schnitt:

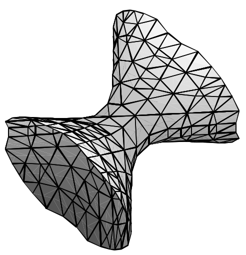
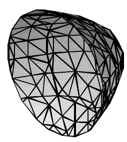
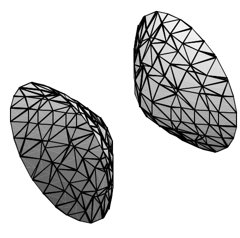
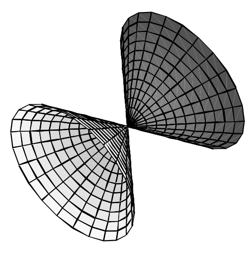
   Gestalt des Schnitts:

3. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 0$.

   Gleichung für den Schnitt:

   Gestalt des Schnitts:

4. Kreuzen Sie an, welches Bild die Quadrik Q darstellt:

			
○	○	○	○

Name: ____ **Matrikelnr.:** ____ **Fach:** ____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ____ **Gruppennr.:** ____

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (-2, -3),\ _{\mathbb{E}}P_1 = (6, 5),\ _{\mathbb{E}}P_2 = (4, 6).$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F} = (U; f_1, f_2)$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0),\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0),\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1).$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{} , \boxed{} \right) \qquad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{} \right) \cdot v + \left(\boxed{} \right).$$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei v ein Eigenvektor von A. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind (Achtung, falsche Antworten geben Abzug):

A ist regulär genau dann, wenn 0 Eigenwert von A ist	wahr ◯	falsch ◯
Wenn A orthogonal ist, dann gilt $\mathrm{Rg}(A) = n$	wahr ◯	falsch ◯
Wenn A lauter verschiedene Eigenwerte hat, dann ist A diagonalisierbar	wahr ◯	falsch ◯
v ist Eigenvektor von $2A^4 + A^2 + E_n$	wahr ◯	falsch ◯
Wenn A diagonalisierbar ist, dann hat A lauter verschiedene Eigenwerte	wahr ◯	falsch ◯
$A + A^T$ ist diagonalisierbar	wahr ◯	falsch ◯

Aufgabe 4 (*13 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

1. Verifizieren Sie, dass $x_1 = (-1, 1, 0)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor von A ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ_1? $\lambda_1 = \boxed{}$
2. Der zu λ_1 gehörige Eigenraum $V(\lambda_1)$ ist zweidimensional. Geben Sie eine orthogonale Basis von $V(\lambda_1)$ an:
$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; x_2 = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}.$$
3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:
$$\begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}.$$
4. Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an:
$$\boxed{}, \quad \boxed{}, \quad \boxed{}.$$
5. Geben Sie eine orthogonale Matrix T an , so dass $T^{-1}AT = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lautet D?
$$T = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Entwickeln Sie $\det(A - \lambda E_3)$ nach der 2. Spalte:

$$\det(A-\lambda E_3) = \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right)$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_A von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Gegeben sind die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 7 \\ 8 & -4 & -11 \\ -6 & 6 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{und die reguläre Matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & -13 & 10 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda - 4).$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A:

   $$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}.$$

   Berechnen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor:

   $$x_1 = \left(\boxed{}\right), \quad x_2 = \left(\boxed{}\right), \quad x_3 = \left(\boxed{}\right).$$

2. Geben Sie die Eigenwerte der Matrix $C = B^{-1}AB$ an:

   $$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}.$$

3. Berechnen Sie: $\det B = \boxed{}$, $\det A = \boxed{}$, $\det(B^{-1}A) = \boxed{}$, $\operatorname{Sp} C = \boxed{}$

   .

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & a & 0 \\ \frac{1}{2} & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & c & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Geben Sie den zweiten Spaltenvektor der Matrix A so an, dass A orthogonal ist mit $\det A = 1$:

$(a, b, c) =$

Aufgabe 8 (*11 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $Q = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 \right\}$.

1. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_1 = 0$.

   Gleichung für den Schnitt: Gestalt des Schnitts:

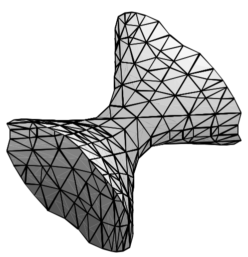
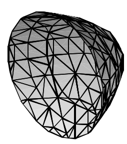
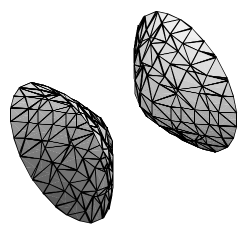
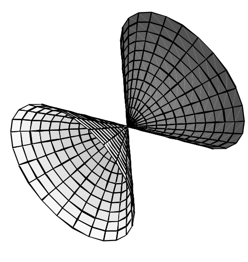
2. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 4$.

   Gleichung für den Schnitt: Gestalt des Schnitts:

3. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_1 = -1$.

   Gleichung für den Schnitt: Gestalt des Schnitts:

4. Kreuzen Sie an, welches Bild die Quadrik Q darstellt:

			
○	○	○	○