Name: ☐ **Matrikelnr.:** ☐ **Fach:** ☐

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (3,5),\ _{\mathbb{E}}P_1 = (1,4),\ _{\mathbb{E}}P_2 = (0,2).$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F} = (U; f_1, f_2)$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0),\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0),\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1).$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}} ; \boxed{\begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}} , \boxed{\begin{matrix} -3 \\ -3 \end{matrix}} \right) \qquad _{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{\begin{matrix} -2 & -3 \\ -1 & -3 \end{matrix}} \right) \cdot v + \left(\boxed{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte (statt 6)*) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei v ein Eigenvektor von A. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind (Achtung, falsche Antworten geben Punktabzug):

Wenn A orthogonal ist, dann gilt $\mathrm{Rg}(A) = n$	wahr ⊗	falsch ○	
v ist Eigenvektor von $A^4 + A^3 + E_n$	wahr ⊗	falsch ○	
$A + A^T$ ist diagonalisierbar	wahr ⊗	falsch ○	
Wenn A lauter verschiedene Eigenwerte hat, dann ist A diagonalisierbar	wahr ⊗	falsch ○	(n. gew.)
A ist regulär genau dann, wenn 0 Eigenwert von A ist	wahr ○	falsch ⊗	
Wenn A diagonalisierbar ist, dann hat A lauter verschiedene Eigenwerte	wahr ○	falsch ⊗	

Aufgabe 4 (*14 Punkte (statt 13)*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Verifizieren Sie, dass $x_1 = (1, -1, 0)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor von A ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ_1? $\quad \lambda_1 = \boxed{-3}$

2. Der zu λ_1 gehörige Eigenraum $V(\lambda_1)$ ist zweidimensional. Geben Sie eine orthogonale Basis von $V(\lambda_1)$ an:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ x_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{matrix}} \end{pmatrix},\quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

4. Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an:

$$\boxed{-3},\quad \boxed{-3},\quad \boxed{6}.$$

5. Geben Sie eine orthogonale Matrix T an , so dass $T^{-1}AT = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lautet D?

$$T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \end{matrix}} \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 6 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Entwickeln Sie $\det(A - \lambda E_3)$ nach der 2. Spalte:

$$\det(A-\lambda E_3) = \boxed{0} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{2-\lambda} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{matrix}}\right) + \boxed{-1} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}}\right)$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_A von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 10\lambda - 15}$$

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Gegeben sind die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und die reguläre Matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & -13 & 10 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2).$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A:

   $\lambda_1 = \boxed{1}$, $\lambda_2 = \boxed{2}$, $\lambda_3 = \boxed{-1}$.

   Berechnen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor:

   $$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Geben Sie die Eigenwerte der Matrix $C = B^{-1}AB$ an:

   $\lambda_1 = \boxed{1}$, $\lambda_2 = \boxed{2}$, $\lambda_3 = \boxed{-1}$.

3. Berechnen Sie: $\det B = \boxed{2}$, $\det A = \boxed{-2}$, $\det(B^{-1}A) = \boxed{-1}$, $\operatorname{Sp} C = \boxed{2}$

   .

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den zweiten Spaltenvektor der Matrix A so an, dass A orthogonal ist mit $\det A = 1$:

$$(a, b, c) = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)}$$

Aufgabe 8 (*11 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $Q = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\right\}$.

1. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 0$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:
$x_1^2 - x_3^2 = 1$	Hyperbel

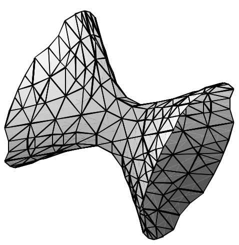
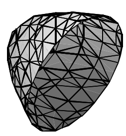
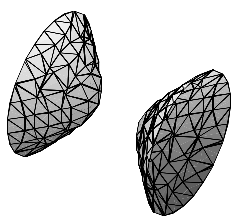
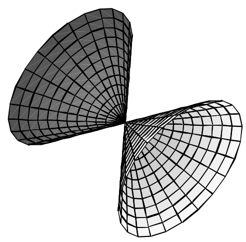
2. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_1 = 2$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:
$x_2^2 + x_3^2 = 3$	Kreis

3. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_1 = 0$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:
$x_2^2 + x_3^2 = -1$	leere Menge

4. Kreuzen Sie an, welches Bild die Quadrik Q darstellt:

			
○	○	⊗	○

Name: ______ **Matrikelnr.:** ______ **Fach:** ______

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ______ **Gruppennr.:** ______

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (-1, 3),\ _{\mathbb{E}}P_1 = (2, 7),\ _{\mathbb{E}}P_2 = (-4, 3).$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F} = (U; f_1, f_2)$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0),\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0),\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1).$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}} ; \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}} , \boxed{\begin{matrix} -3 \\ 0 \end{matrix}} \right) \qquad _{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{\begin{matrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{matrix}} \right) \cdot v + \left(\boxed{\begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte (statt 6)*) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei v ein Eigenvektor von A. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind (Achtung, falsche Antworten geben Abzug):

Wenn A diagonalisierbar ist, dann hat A lauter verschiedene Eigenwerte	wahr $\bigcirc$	falsch $\otimes$	
v ist Eigenvektor von $A^4 + A^3 + E_n$	wahr $\otimes$	falsch $\bigcirc$	
$A + A^T$ ist diagonalisierbar	wahr $\otimes$	falsch $\bigcirc$	
Wenn A orthogonal ist, dann gilt $\operatorname{Rg}(A) = n$	wahr $\otimes$	falsch $\bigcirc$	
Wenn A lauter verschiedene Eigenwerte hat, dann ist A diagonalisierbar	wahr $\otimes$	falsch $\bigcirc$	(n.gew.)
A ist regulär genau dann, wenn 0 Eigenwert von A ist	wahr $\bigcirc$	falsch $\otimes$	

Aufgabe 4 (*13 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Verifizieren Sie, dass $x_1 = (0, 1, -1)^{\mathsf{T}}$ ein Eigenvektor von A ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ_1? $\quad \lambda_1 = \boxed{3}$
2. Der zu λ_1 gehörige Eigenraum $V(\lambda_1)$ ist zweidimensional. Geben Sie eine orthogonale Basis von $V(\lambda_1)$ an:
$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \; x_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$
3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$
4. Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an:
$$\boxed{3}, \qquad \boxed{3}, \qquad \boxed{-3}.$$
5. Geben Sie eine orthogonale Matrix T an , so dass $T^{-1}AT = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lautet D?
$$T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{matrix}} \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entwickeln Sie $\det(A - \lambda E_3)$ nach der 2. Spalte:

$$\det(A-\lambda E_3) = \boxed{-3} \cdot\det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & -1-\lambda \end{matrix}} \end{pmatrix} + \boxed{1-\lambda} \cdot\det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{matrix}} \end{pmatrix} + \boxed{0} \cdot\det \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_A von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 - 2\lambda^2 + 10\lambda + 41}$$

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Gegeben sind die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -12 \\ 1 & -1 & 14 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und die reguläre Matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & -13 & 10 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 6).$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A:
   $$\lambda_1 = \boxed{2}, \quad \lambda_2 = \boxed{-2}, \quad \lambda_3 = \boxed{3}.$$
   Berechnen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor:
   $$x_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \; x_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$
2. Geben Sie die Eigenwerte der Matrix $C = B^{-1}AB$ an:
   $$\lambda_1 = \boxed{2}, \quad \lambda_2 = \boxed{-2}, \quad \lambda_3 = \boxed{3}.$$
3. Berechnen Sie: $\det B = \boxed{2}$, $\det A = \boxed{-12}$, $\det(B^{-1}A) = \boxed{-6}$, $\operatorname{Sp} C = \boxed{3}$
   .

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & c & 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den zweiten Spaltenvektor der Matrix A so an, dass A orthogonal ist mit $\det A = 1$:

$$(a, b, c) = \boxed{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Aufgabe 8 (*11 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $Q = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\right\}$.

1. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 0$.

   Gleichung für den Schnitt: $x_1^2 - x_3^2 = -1$

   Gestalt des Schnitts: Hyperbel

2. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_1 = -3$.

   Gleichung für den Schnitt: $x_2^2 + x_3^2 = 10$

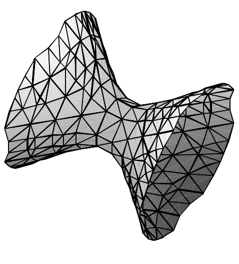
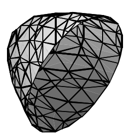
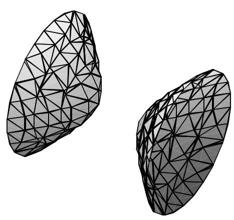
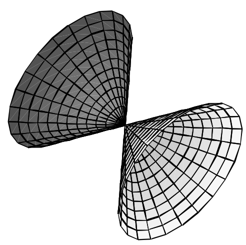
   Gestalt des Schnitts: Kreis

3. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 1$.

   Gleichung für den Schnitt: $x_1^2 - x_3^2 = 0$

   Gestalt des Schnitts: Paar schneidender Geraden

4. Kreuzen Sie an, welches Bild die Quadrik Q darstellt:

			
⊗	○	○	○

Name: $\boxed{}$ **Matrikelnr.:** $\boxed{}$ **Fach:** $\boxed{}$

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (2,-1),\ _{\mathbb{E}}P_1 = (4,3),\ _{\mathbb{E}}P_2 = (1,-2).$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F} = (U; f_1, f_2)$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0),\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0),\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1).$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}} ; \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} , \boxed{\begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}} \right) \qquad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{\begin{matrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{matrix}} \right) \cdot v + \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte (statt 6)*) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei v ein Eigenvektor von A. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind (Achtung, falsche Antworten geben Abzug):

Wenn A lauter verschiedene Eigenwerte hat, dann ist A diagonalisierbar	wahr $\otimes$	falsch $\bigcirc$	(n.gew.)
$A + A^T$ ist diagonalisierbar	wahr $\otimes$	falsch $\bigcirc$	
A ist regulär genau dann, wenn 0 Eigenwert von A ist	wahr $\bigcirc$	falsch $\otimes$	
Wenn A orthogonal ist, dann gilt $\mathrm{Rg}(A) = n$	wahr $\otimes$	falsch $\bigcirc$	
Wenn A diagonalisierbar ist, dann hat A lauter verschiedene Eigenwerte	wahr $\bigcirc$	falsch $\otimes$	
v ist Eigenvektor von $A^4 + A^3 + E_n$	wahr $\otimes$	falsch $\bigcirc$	

Aufgabe 4 (*14 Punkte (statt 13)*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Verifizieren Sie, dass $x_1 = (2,2,1)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor von A ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ_1? $\lambda_1 = \boxed{-3}$
2. Der zu λ_1 gehörige Eigenraum $V(\lambda_1)$ ist zweidimensional. Geben Sie eine orthogonale Basis von $V(\lambda_1)$ an:
$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ x_2 = \left(\boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}}\right).$$
3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:
$$\frac{1}{3}\left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}}\right),\quad \frac{1}{3}\left(\boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}}\right),\quad \frac{1}{3}\left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{matrix}}\right).$$
4. Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an:
$$\boxed{-3},\quad \boxed{-3},\quad \boxed{6}.$$
5. Geben Sie eine orthogonale Matrix T an , so dass $T^{-1}AT = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lautet D?
$$T = \left(\boxed{\begin{matrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix}}\right);\ D = \left(\boxed{\begin{matrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 6 \end{matrix}}\right).$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Entwickeln Sie $\det(A - \lambda E_3)$ nach der 2. Spalte:

$$\det(A - \lambda E_3) = \boxed{0} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{-2-\lambda} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{matrix}}\right) + \boxed{-3} \cdot \det\left(\boxed{\begin{matrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 1 \end{matrix}}\right)$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_A von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda - 18}$$

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Gegeben sind die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -18 \\ -2 & 1 & -4 \\ 7 & -3 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{und die reguläre Matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & -13 & 10 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3).$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A:

   $\lambda_1 = \boxed{1}$, $\lambda_2 = \boxed{3}$, $\lambda_3 = \boxed{-2}$.

   Berechnen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor:

   $$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; x_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Geben Sie die Eigenwerte der Matrix $C = B^{-1}AB$ an:

   $\lambda_1 = \boxed{1}$, $\lambda_2 = \boxed{3}$, $\lambda_3 = \boxed{-2}$.

3. Berechnen Sie: $\det B = \boxed{2}$, $\det A = \boxed{-6}$, $\det(B^{-1}A) = \boxed{-3}$, $\operatorname{Sp} C = \boxed{2}$

   .

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & c & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Geben Sie den zweiten Spaltenvektor der Matrix A so an, dass A orthogonal ist mit $\det A = 1$:

$$(a, b, c) = \boxed{\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)}$$

Aufgabe 8 (*11 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $Q = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\right\}$.

1. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_3 = 0$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:
$-x_1^2 + x_2^2 = 1$	Hyperbel

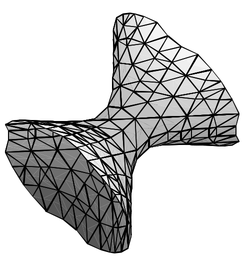
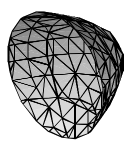
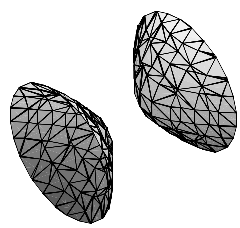
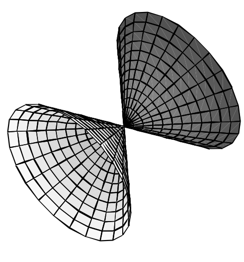
2. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 2$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:
$x_1^2 + x_3^2 = 3$	Kreis

3. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 0$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:
$x_1^2 + x_3^2 = -1$	Leere Menge

4. Kreuzen Sie an, welches Bild die Quadrik Q darstellt:

			
○	○	⊗	○

Name: $\boxed{}$ **Matrikelnr.:** $\boxed{}$ **Fach:** $\boxed{}$

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei handschriftlich beschriebene Seiten DIN A4 Papier.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Gruppennr.:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (\vec{0}; e_1, e_2)$. Darin sind die Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben durch:

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (-2, -3),\ _{\mathbb{E}}P_1 = (6, 5),\ _{\mathbb{E}}P_2 = (4, 6).$$

Gesucht ist nun ein zweites Koordinatensystem $\mathbb{F} = (U; f_1, f_2)$ mit

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0, 0),\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1, 0),\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0, 1).$$

Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ und die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ an:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{\begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix}} ; \boxed{\begin{matrix} 8 \\ 8 \end{matrix}} , \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 9 \end{matrix}} \right) \qquad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad v \mapsto \left(\boxed{\begin{matrix} 8 & 6 \\ 8 & 9 \end{matrix}} \right) \cdot v + \left(\boxed{\begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte (statt 6)*) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei v ein Eigenvektor von A. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind (Achtung, falsche Antworten geben Abzug):

A ist regulär genau dann, wenn 0 Eigenwert von A ist	wahr ○	falsch ⊗	
Wenn A orthogonal ist, dann gilt $\mathrm{Rg}(A) = n$	wahr ⊗	falsch ○	
Wenn A lauter verschiedene Eigenwerte hat, dann ist A diagonalisierbar	wahr ⊗	falsch ○	(n.gew.)
v ist Eigenvektor von $2A^4 + A^2 + E_n$	wahr ⊗	falsch ○	
Wenn A diagonalisierbar ist, dann hat A lauter verschiedene Eigenwerte	wahr ○	falsch ⊗	
$A + A^T$ ist diagonalisierbar	wahr ⊗	falsch ○	

Aufgabe 4 (*14 Punkte (statt 13)*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

1. Verifizieren Sie, dass $x_1 = (-1, 1, 0)^\mathsf{T}$ ein Eigenvektor von A ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert λ_1? $\lambda_1 = \boxed{9}$
2. Der zu λ_1 gehörige Eigenraum $V(\lambda_1)$ ist zweidimensional. Geben Sie eine orthogonale Basis von $V(\lambda_1)$ an:
$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ x_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$
3. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix},\quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$
4. Geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an:
$$\boxed{9},\quad \boxed{9},\quad \boxed{-9}.$$
5. Geben Sie eine orthogonale Matrix T an , so dass $T^{-1}AT = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lautet D?
$$T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{\sqrt{18}} \end{matrix}} \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 9 & & \\ & 9 & \\ & & -9 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Entwickeln Sie $\det(A - \lambda E_3)$ nach der 2. Spalte:

$$\det(A-\lambda E_3) = \boxed{-5} \cdot\det\left(\boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{matrix}}\right) + \boxed{-2-\lambda}\cdot\det\left(\boxed{\begin{matrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -3-\lambda \end{matrix}}\right) + \boxed{0}\cdot\det\left(\boxed{}\right)$$

Geben Sie das charakteristische Polynom χ_A von A an:

$$\chi_A(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 - 4\lambda^2 + 7\lambda + 42}$$

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Gegeben sind die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 7 \\ 8 & -4 & -11 \\ -6 & 6 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{und die reguläre Matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & -13 & 10 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda - 4)\,.$$

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A:
   $$\lambda_1 = \boxed{-1}, \qquad \lambda_2 = \boxed{2}, \qquad \lambda_3 = \boxed{4}.$$
   Berechnen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor:
   $$x_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \; x_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$
2. Geben Sie die Eigenwerte der Matrix $C = B^{-1}AB$ an:
   $$\lambda_1 = \boxed{-1}, \quad \lambda_2 = \boxed{2}, \quad \lambda_3 = \boxed{4}.$$
3. Berechnen Sie: $\det B = \boxed{2}$, $\det A = \boxed{-8}$, $\det(B^{-1}A) = \boxed{-4}$, $\operatorname{Sp} C = \boxed{5}$
   .

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & a & 0 \\ \frac{1}{2} & b & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & c & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Geben Sie den zweiten Spaltenvektor der Matrix A so an, dass A orthogonal ist mit $\det A = 1$:

$$(a,b,c) = \boxed{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

Aufgabe 8 (*11 Punkte*)

Gegeben sei die Quadrik $Q = \left\{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0\right\}$.

1. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_1 = 0$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:
$x_2^2 - x_3^2 = -1$	Hyperbel

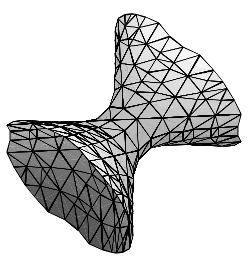
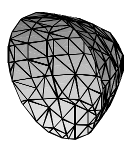
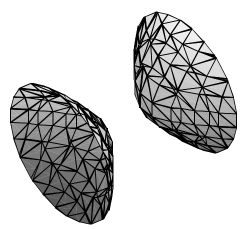
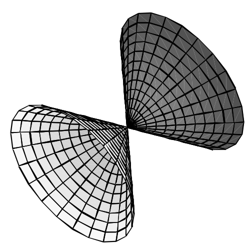
2. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_2 = 4$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:
$x_1^2 + x_3^2 = 17$	Kreis

3. Schneiden Sie die Quadrik Q mit der Ebene $x_1 = -1$.

Gleichung für den Schnitt:	Gestalt des Schnitts:
$x_2^2 - x_3^2 = 0$	Paar schneidender Geraden

4. Kreuzen Sie an, welches Bild die Quadrik Q darstellt:

			
⊗	○	○	○