Name: ______ **Matrikelnr.:** ______ **Fach:** ______

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte							

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
  Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ______ **Gruppennr.:** ______

Aufgabe 2 (*11 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Integrale. Tragen Sie „divergent" ein, falls keine Konvergenz vorliegt.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+2x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

(b) $\displaystyle\int xe^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[(-x-1)e^{-x}\right]}$

(c) $\displaystyle\int_{5/2}^{10/3} \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{7}{3}}$

(d) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]}$

Aufgabe 3 (*11 Punkte*)

Gegeben ist die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 + x} .$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ von f.

$$D = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

Kreuzen Sie den richtigen Ansatz zur Bestimmung der Partialbruchzerlegung von f an.

- [X] $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B + xC}{x^2 + 1}$
- [ ] $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$
- [ ] $f(x) = \frac{A + xB}{x} + \frac{C}{x^2 + 1}$.

Daraus ergibt sich für die verwendeten Konstanten:

$$A = \boxed{-1}$$

$$B = \boxed{-2}$$

$$C = \boxed{2}$$

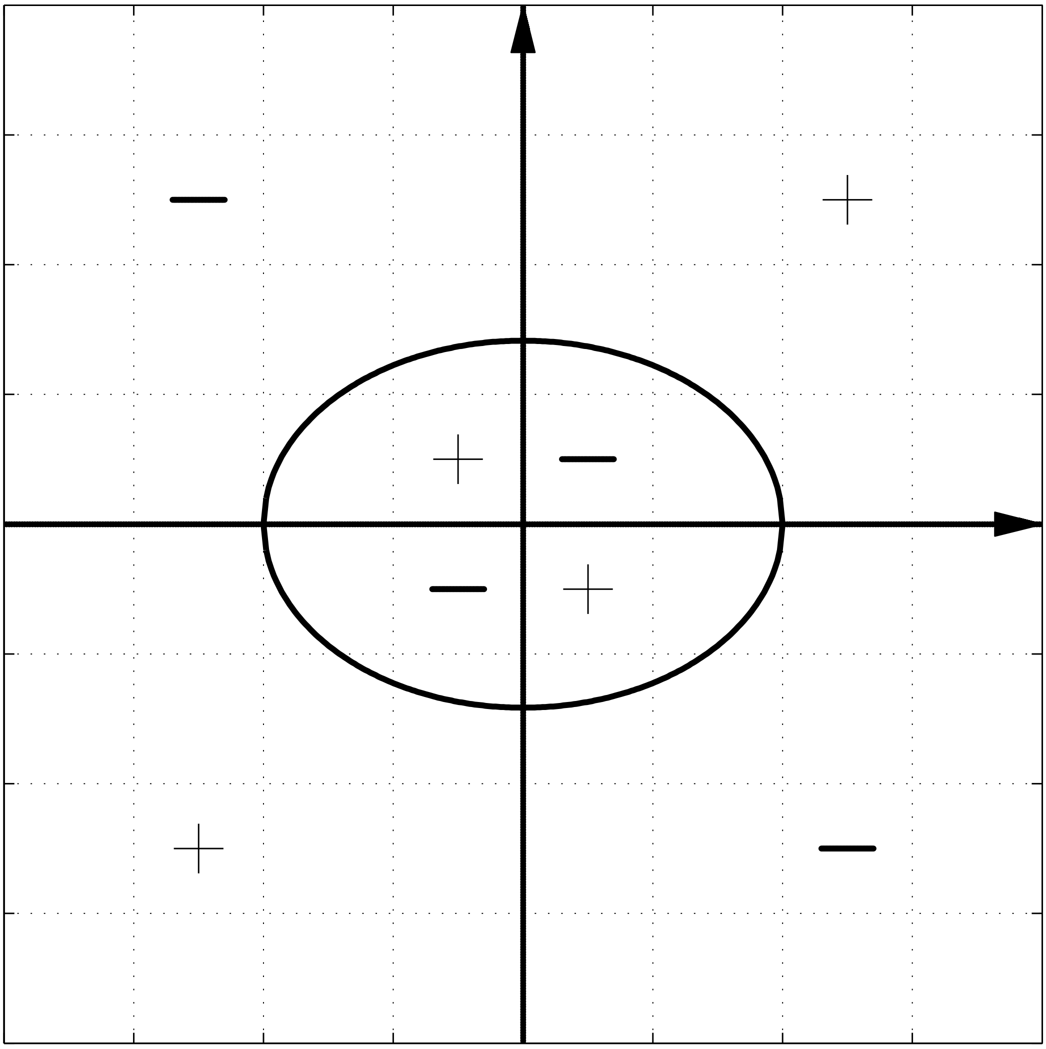
Somit lautet eine Stammfunktion F von f:

$$F(x) = \boxed{\Big[- \ln|x| + \ln(x^2 + 1) - 2\arctan(x) \Big] = \left[\ln\left(\frac{x^2 + 1}{|x|}\right) - 2\arctan(x) \right]}$$

Aufgabe 4 (*11 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto yx^3 + 2xy^3 - 4xy$$

Skizzieren Sie die Gebiete mit $f(x, y) = 0$, $f(x, y) < 0$ bzw. $f(x, y) > 0$ in dem Achsenkreuz unten.



Geben Sie alle kritischen Stellen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ der Funktion f an:

$$(0,0)\,,\ (2,0)\,,\ (-2,0)\,,\ (0,\sqrt{2})\,,\ (0,-\sqrt{2})\,,\ \left(1,\sqrt{\frac{1}{2}}\right),\ \left(1,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right),\ \left(-1,\sqrt{\frac{1}{2}}\right),\ \left(-1,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

Davon sind

(a) Maxima $\left(1,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right),\ \left(-1,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

(b) Minima $\left(1,\sqrt{\frac{1}{2}}\right),\ \left(-1,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

(c) Sattelpunkte $(0,0)\,,\ (2,0)\,,\ (-2,0)\,,\ (0,\sqrt{2})\,,\ (0,-\sqrt{2})$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 5y^2 \\ 17x + y \\ 4z^3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

$$\operatorname{div} f = \boxed{1 + 12z^2},$$

$$\operatorname{rot} f = \left(\boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{17 - 10y} \right)^\top.$$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y\cos(xy) \\ -z^{-2} + x\cos(xy) \\ 2yz^{-3} \end{pmatrix},$$

mit $D \subsetneq \mathbb{R}^3$. Kreuzen Sie an, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit f ein Potential besitzt.

☐ $\Delta f = 0$ ☐ $\operatorname{div} f = 0$ ☒ X $\operatorname{rot} f = 0$ ☐ $\operatorname{grad} f = 0$

Ein Potential von f lautet

$$U(x, y, z) = \boxed{x^2 - \frac{y}{z^2} + \sin(xy) + c}$$