Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

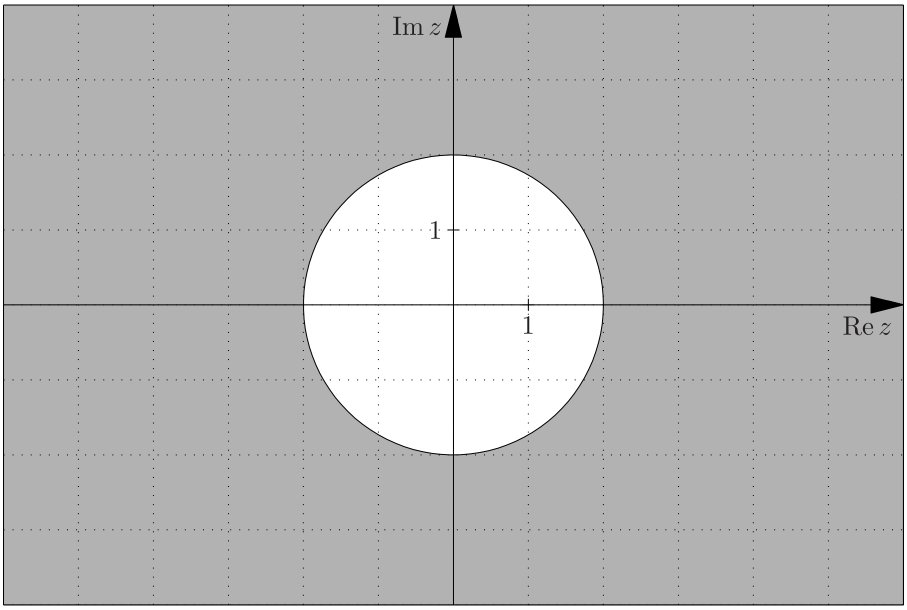
(a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + 3i$ und $z_2 = 2 + i$. Berechnen Sie

$$z_1 z_2 = \boxed{-1 + 7i} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \boxed{1 + i}$$

(b) Es sei $z = -1 + \sqrt{3}i$. Geben Sie die Polarkoordinaten für folgende Ausdrücke an. (φ soll im Bereich zwischen 0 und 2π sein).

$$z = \boxed{2\left(\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)} \qquad z^{25} = \boxed{2^{25}\left(\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie den durch die Ungleichung $\left|\dfrac{z-8}{2z-1}\right| \leqq 2$ für $z \in \mathbb{C}$ angegebenen Bereich in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen A, B, C, D:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^\mathsf{T} \cdot B$, $A \cdot B^\mathsf{T}$ sowie $C \cdot B + D \cdot B$.

$$A^\mathsf{T} \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 20 & 10 & -3 \\ 40 & 10 & 8 \\ -28 & -21 & 14 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad A \cdot B^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 32 & -5 \\ -16 & 12 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B + D \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -12 & -4 & -1 \\ -10 & -5 & \frac{3}{2} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Für welche Zahlen $s \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 0 & 9 & -5 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{lösbar?} \qquad s = \boxed{4}\,.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung für diese s?

$$x = \left(\boxed{\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Sie haben die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle v_1 | v_2 \rangle = \boxed{0}$ und $\langle v_1 | v_3 \rangle = \boxed{24}$.

Bestimmen Sie die Dimension d des Aufspanns $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$: $d = \boxed{3}$.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

Gegeben sind die Vektoren $v = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sowie die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto \langle x \mid v \rangle \, w.$$

Geben Sie das Bild $\varphi(v_0)$ an, wobei $v_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\varphi(v_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 10 \end{matrix}} \end{pmatrix}$.

Gesucht ist nun die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ dieser linearen Abbildung bezüglich der Basen

$\mathcal{B} \colon b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{C} \colon c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ hat $\boxed{3}$ Zeilen und $\boxed{2}$ Spalten.

Die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ lautet:

$${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 14 & 8 \\ 0 & 0 \\ 35 & 20 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

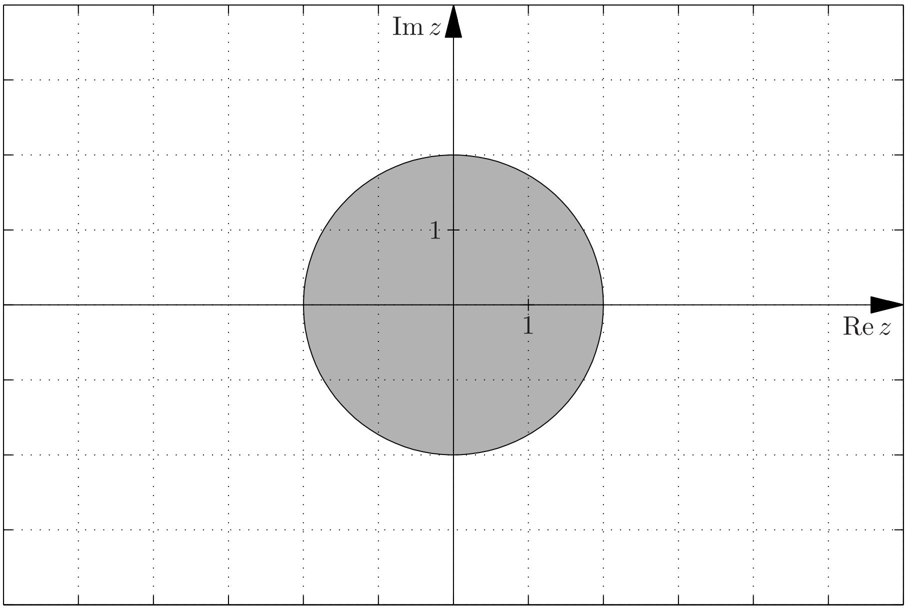
(a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 7 - 4i$ und $z_2 = 3 + 2i$. Berechnen Sie

$$z_1 z_2 = \boxed{29 + 2i} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \boxed{1 - 2i}$$

(b) Es sei $z = \sqrt{3} + i$. Geben Sie die Polarkoordinaten für folgende Ausdrücke an. (φ soll im Bereich zwischen 0 und 2π sein).

$$z = \boxed{2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right)} \qquad z^{25} = \boxed{2^{25}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right)}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie den durch die Ungleichung $\left|\dfrac{z-8i}{2z-i}\right| \geqq 2$ für $z \in \mathbb{C}$ angegebenen Bereich in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen A, B, C, D:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^{\mathsf{T}} \cdot B$, $A \cdot B^{\mathsf{T}}$ sowie $C \cdot B + D \cdot B$.

$$A^{\mathsf{T}} \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 20 & 40 & -28 \\ 10 & 10 & -21 \\ -3 & 8 & 14 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad A \cdot B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 32 & -16 \\ -5 & 12 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B + D \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -4 & -6 & 7 \\ -5 & -5 & \frac{21}{2} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Für welche Zahlen $s \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 9 & -5 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{lösbar?} \qquad s = \boxed{-3}\,.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung für diese s?

$$x = \left(\boxed{\begin{matrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Sie haben die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; \text{und } v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle v_1 | v_2 \rangle = \boxed{-3}$ und $\langle v_1 | v_3 \rangle = \boxed{4}$.

Bestimmen Sie die Dimension d des Aufspanns $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$: $\qquad d = \boxed{2}$.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

Gegeben sind die Vektoren $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $w = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sowie die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto \langle x \mid v \rangle \, w.$$

Geben Sie das Bild $\varphi(v_0)$ an, wobei $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\quad \varphi(v_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -18 \\ -24 \end{matrix}} \end{pmatrix}$.

Gesucht ist nun die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ dieser linearen Abbildung bezüglich der Basen

$\mathcal{B}\colon b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{C}\colon c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ hat $\boxed{2}$ Zeilen und $\boxed{3}$ Spalten.

Die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ lautet:

$${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -6 & -3 & 3 \\ -8 & -4 & 4 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Name: | **Matrikelnr.:** | **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

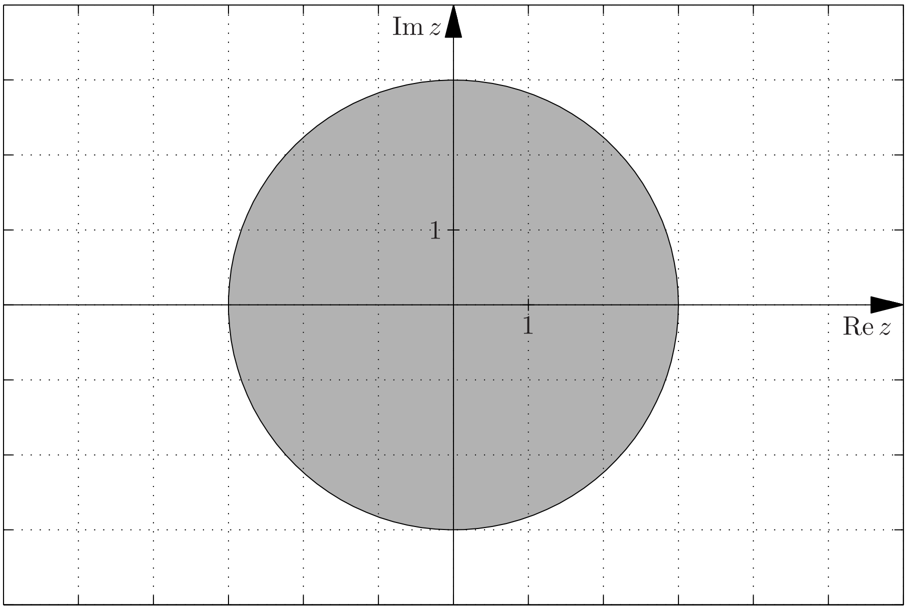
(a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = -3 + 5i$ und $z_2 = -2 - 2i$. Berechnen Sie

$$z_1 z_2 = \boxed{16 - 4i} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \boxed{-\tfrac{1}{2} - 2i}$$

(b) Es sei $z = 1 + \sqrt{3}i$. Geben Sie die Polarkoordinaten für folgende Ausdrücke an. (φ soll im Bereich zwischen 0 und 2π sein).

$$z = \boxed{2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right)} \qquad z^{25} = \boxed{2^{25}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right)}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie den durch die Ungleichung $\left|\dfrac{z-9i}{z-i}\right| \geqq 3$ für $z \in \mathbb{C}$ angegebenen Bereich in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen A, B, C, D:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^{\mathsf{T}} \cdot B$, $A \cdot B^{\mathsf{T}}$ sowie $C \cdot B + D \cdot B$.

$$A^{\mathsf{T}} \cdot B = \left(\boxed{\begin{matrix} 5 & 8 & -2 \\ 32 & -4 & 16 \\ -9 & -19 & 6 \end{matrix}} \right) \qquad A \cdot B^{\mathsf{T}} = \left(\boxed{\begin{matrix} 11 & 4 \\ -15 & -4 \end{matrix}} \right)$$

$$C \cdot B + D \cdot B = \left(\boxed{\begin{matrix} -6 & \frac{13}{2} & -6 \\ 14 & -\frac{15}{2} & 10 \end{matrix}} \right)$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Für welche Zahlen $s \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 0 & 9 & -5 \\ 2 & 3 & s \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{lösbar?} \qquad s = \boxed{5}\,.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung für diese s?

$$x = \left(\boxed{\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{matrix}} \right).$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Sie haben die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle v_1|v_2\rangle = \boxed{1}$ und $\langle v_1|v_3\rangle = \boxed{-3}$.

Bestimmen Sie die Dimension d des Aufspanns $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$: $\quad d = \boxed{3}$.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

Gegeben sind die Vektoren $v = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ sowie die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \colon x \mapsto \langle x \mid v \rangle \, w.$$

Geben Sie das Bild $\varphi(v_0)$ an, wobei $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\qquad \varphi(v_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 9 \end{matrix}} \end{pmatrix}$.

Gesucht ist nun die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ dieser linearen Abbildung bezüglich der Basen

$\mathcal{B} \colon b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{C} \colon c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ hat $\boxed{4}$ Zeilen und $\boxed{2}$ Spalten.

Die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ lautet:

$${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -5 & -1 \\ 0 & 0 \\ -10 & -2 \\ -15 & -3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Name: **Matrikelnr.:** **Fach:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

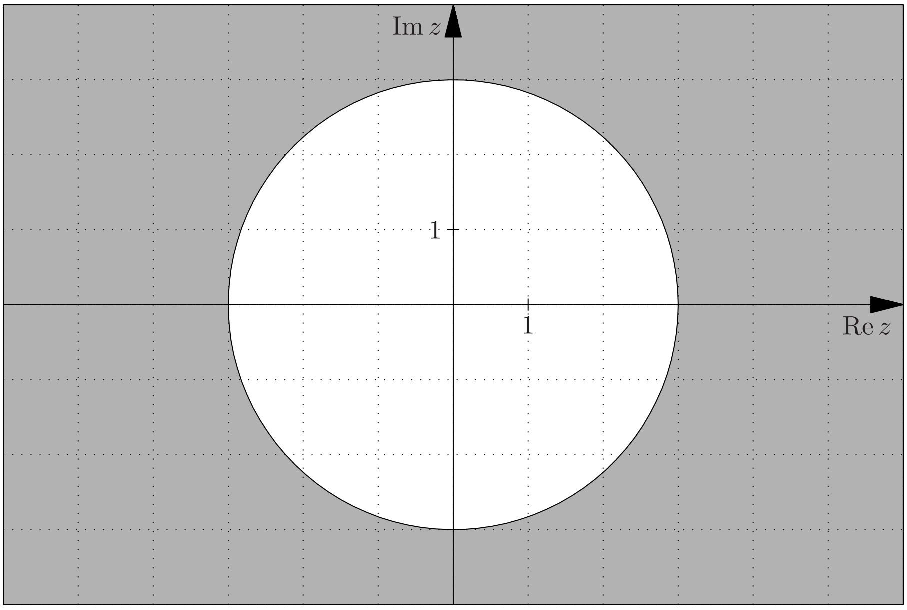
(a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 2 - i$ und $z_2 = 3 + i$. Berechnen Sie

$z_1 z_2 = \boxed{7 - i}$ $\frac{z_1}{z_2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$

(b) Es sei $z = (1+i)\sqrt{2}$. Geben Sie die Polarkoordinaten für folgende Ausdrücke an. (φ soll im Bereich zwischen 0 und 2π sein).

$z = \boxed{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$ $z^{25} = \boxed{2^{25}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Skizzieren Sie den durch die Ungleichung $\left|\dfrac{z-9}{z-1}\right| \leqq 3$ für $z \in \mathbb{C}$ angegebenen Bereich in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen A, B, C, D:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^\mathsf{T} \cdot B$, $A \cdot B^\mathsf{T}$ sowie $C \cdot B + D \cdot B$.

$$A^\mathsf{T} \cdot B = \left(\boxed{\begin{matrix} 5 & 32 & -9 \\ 8 & -4 & -19 \\ -2 & 16 & 6 \end{matrix}} \right) \qquad A \cdot B^\mathsf{T} = \left(\boxed{\begin{matrix} 11 & -15 \\ 4 & -4 \end{matrix}} \right)$$

$$C \cdot B + D \cdot B = \left(\boxed{\begin{matrix} \frac{11}{2} & -2 & -13 \\ -\frac{9}{2} & 6 & 11 \end{matrix}} \right)$$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Für welche Zahlen $s \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 9 & -5 \\ 2 & 3 & s \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{lösbar?} \qquad s = \boxed{-2}\,.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung für diese s?

$$x = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Sie haben die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} \; \text{und } v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle v_1 | v_2 \rangle = \boxed{0}$ und $\langle v_1 | v_3 \rangle = \boxed{86}$.

Bestimmen Sie die Dimension d des Aufspanns $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$: $\qquad d = \boxed{2}$.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

Gegeben sind die Vektoren $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ und $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sowie die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \langle x \mid v \rangle\, w.$$

Geben Sie das Bild $\varphi(v_0)$ an, wobei $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\quad \varphi(v_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$.

Gesucht ist nun die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ dieser linearen Abbildung bezüglich der Basen

$\mathcal{B}$: $b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{C}$: $c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ hat $\boxed{2}$ Zeilen und $\boxed{4}$ Spalten.

Die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ lautet:

$${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 & 9 & 3 & 15 \\ 1 & -3 & -1 & -5 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$