

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int 2x \sqrt{x-1} \, dx = \left[\frac{4}{5} (x-1)^{5/2} + \frac{4}{3} (x-1)^{3/2} \right]$$

$$(b) \int \cos(3x) (\sin(3x))^2 \, dx = \left[\frac{1}{9} (\sin(3x))^3 \right]$$

$$(c) \int_0^{\pi/2} \cos(3x) (\sin(3x))^2 \, dx = -\frac{1}{9}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen.

(a) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto e^{-x} \sin(2y)$

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\begin{array}{c} \boxed{-e^{-x} \sin(2y)} \\ \boxed{2e^{-x} \cos(2y)} \end{array} \right)^{\top}$$

(b) $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^3 \ln(y^3)$

$$\text{grad } g(x, y) = \left(\begin{array}{c} \boxed{3x^2 \ln(y^3)} \\ \boxed{\frac{3x^3}{y}} \end{array} \right)^{\top}$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

(a) Es sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 9x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y + 5.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen der Funktion f :

$$\boxed{(0, 1), (4, 5), (-4, -3)}$$

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix im Punkt $(0, 1)$:

$$Hf(0, 1) = \left(\begin{array}{cc} \boxed{-18} & \boxed{2} \\ \boxed{2} & \boxed{-2} \end{array} \right).$$

(c) Davon sind

Lokale Maxima

$$\boxed{(0, 1)}$$

Lokale Minima

keine

Sattelpunkte

$$\boxed{(4, 5), (-4, -3)}$$

Falls ein Fall nicht vorkommt, schreiben Sie „keine“ in das entsprechende Kästchen.

Aufgabe 5 (3 Punkte) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x \sin(2x).$$

(a) Es gilt

$$f'(0) = \boxed{0} \quad \text{und} \quad f''(0) = \boxed{4}.$$

(b) Das Taylorpolynom der Stufe 2 von f zum Entwicklungspunkt 0 ist also

$$T_2(f, x, 0) = \boxed{2x^2}.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

(a) In der Partialbruchzerlegung

$$\frac{2(x^2 + x + 1)}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

gilt

$$A = \boxed{2}, \quad B = \boxed{0}, \quad C = \boxed{2}.$$

(b) Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^3 + x} dx = \boxed{\ln 3 + 2 \left(\arctan 1 - \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \ln 3 + \frac{\pi}{6}}.$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte bzw. Reihen:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \boxed{0}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \boxed{1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \boxed{1/2}$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+11}}{n!}.$$

(a) Der Konvergenzradius der Reihe ist

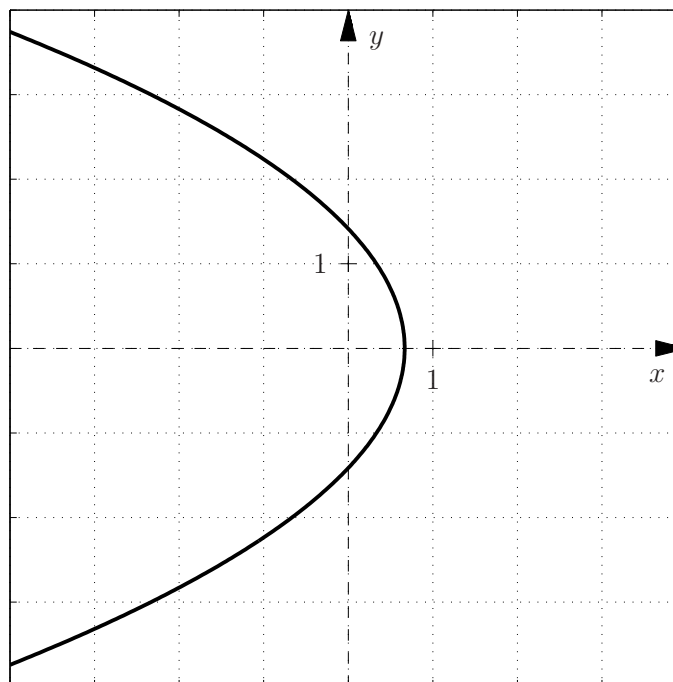
(b) Ein geschlossener Ausdruck für die Reihe ist

Aufgabe 9 (7 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinie $f(x, y) = 0$ für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto y^2 - 2 + 3x$$

in dem Achsenkreuz unten. Beachten Sie die eingetragenen Einheitspunkte.



(b) Berechnen Sie den Gradienten:

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\begin{array}{c} \boxed{3} \\ \boxed{2y} \end{array} \right)^T$$

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkt $(2, 3, 13)$:

 $x +$

 $y +$

 $z +$

 $= 0$

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int \sin(2x) (\cos(2x))^2 dx = \left[-\frac{1}{6} (\cos(2x))^3 \right]$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} \sin(2x) (\cos(2x))^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$(c) \int x \sqrt{x-3} dx = \left[\frac{2}{5} (x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} \right]$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^{-y} \sin(2x)$

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{2e^{-y} \cos(2x)} & \boxed{-e^{-y} \sin(2x)} \end{array} \right)^T$$

(b) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y^3 \ln(x^3)$

$$\text{grad } g(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\frac{3y^3}{x}} & \boxed{3y^2 \ln(x^3)} \end{array} \right)^T$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

(a) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{1}{4}y^4 - 9y^2 - x^2 + 2xy - 2y + 2x + 5.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen der Funktion f :

$$\boxed{(1, 0), (5, 4), (-3, -4)}$$

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix im Punkt $(1, 0)$:

$$Hf(1, 0) = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{-2} & \boxed{2} \\ \boxed{2} & \boxed{-18} \end{array} \right).$$

(c) Davon sind

Lokale Maxima

$$\boxed{(1, 0)}$$

Lokale Minima

keine

Sattelpunkte

$$\boxed{(5, 4), (-3, -4)}$$

Falls ein Fall nicht vorkommt, schreiben Sie „keine“ in das entsprechende Kästchen.

Aufgabe 5 (3 Punkte) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x \sin(3x).$$

(a) Es gilt

$$f'(0) = \boxed{0} \quad \text{und} \quad f''(0) = \boxed{6}.$$

(b) Das Taylorpolynom der Stufe 2 von f zum Entwicklungspunkt 0 ist also

$$T_2(f, x, 0) = \boxed{3x^2}.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

(a) In der Partialbruchzerlegung

$$\frac{3(x^2 + x + 1)}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

gilt

$$A = \boxed{3}, \quad B = \boxed{0}, \quad C = \boxed{3}.$$

(b) Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{3(x^2 + x + 1)}{x^3 + x} dx = \boxed{\frac{3}{2} \ln 3 + 3 \left(\arctan 1 - \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{3}{2} \ln 3 + \frac{\pi}{4}}.$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte bzw. Reihen:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \boxed{-1/2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \boxed{0}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \boxed{1/2}$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+12}}{n!}.$$

(a) Der Konvergenzradius der Reihe ist

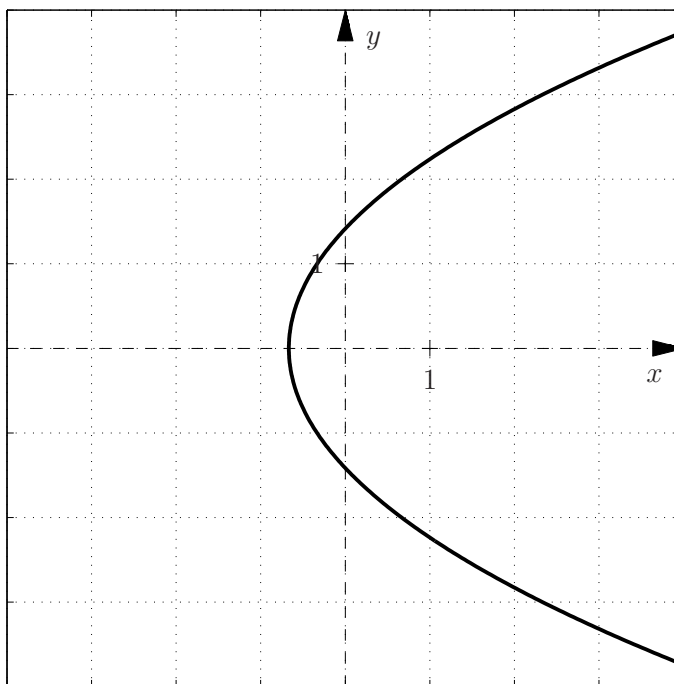
(b) Ein geschlossener Ausdruck für die Reihe ist

Aufgabe 9 (7 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinie $f(x, y) = 0$ für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto y^2 - 2 - 3x$$

in dem Achsenkreuz unten. Beachten Sie die eingetragenen Einheitspunkte.



(b) Berechnen Sie den Gradienten:

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\begin{array}{c} \boxed{-3} \\ \boxed{2y} \end{array} \right)^T$$

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkt $(2, 3, 1)$:

$$\boxed{-3} x + \boxed{6} y + \boxed{-1} z + \boxed{-11} = 0$$

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int 3x \sqrt{x-1} \, dx = \left[\frac{6}{5} (x-1)^{5/2} + 2 (x-1)^{3/2} \right]$$

$$(b) \int \cos(2x) (\sin(2x))^2 \, dx = \left[\frac{1}{6} (\sin(2x))^3 \right]$$

$$(c) \int_0^{\pi/4} \cos(2x) (\sin(2x))^2 \, dx = \frac{1}{6}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^{-x} \cos(2y)$

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\begin{array}{c} \boxed{-e^{-x} \cos(2y)} \\ \boxed{-2e^{-x} \sin(2y)} \end{array} \right)^{\top}$$

(b) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^4 \ln(y^4)$

$$\text{grad } g(x, y) = \left(\begin{array}{c} \boxed{4x^3 \ln(y^4)} \\ \boxed{\frac{4x^4}{y}} \end{array} \right)^{\top}$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

(a) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto -\frac{1}{5}x^4 + 11x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y - 5.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen der Funktion f :

$$\boxed{(0, 1), (5, 6), (-5, -4)}$$

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix im Punkt $(0, 1)$:

$$Hf(0, 1) = \left(\begin{array}{cc} \boxed{22} & \boxed{-2} \\ \boxed{-2} & \boxed{2} \end{array} \right).$$

(c) Davon sind

Lokale Maxima

keine

Lokale Minima

$(0, 1)$

Sattelpunkte

$(5, 6), (-5, -4)$

Falls ein Fall nicht vorkommt, schreiben Sie „keine“ in das entsprechende Kästchen.

Aufgabe 5 (3 Punkte) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x \sin(4x).$$

(a) Es gilt

$$f'(0) = \boxed{0} \quad \text{und} \quad f''(0) = \boxed{8}.$$

(b) Das Taylorpolynom der Stufe 2 von f zum Entwicklungspunkt 0 ist also

$$T_2(f, x, 0) = \boxed{4x^2}.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

(a) In der Partialbruchzerlegung

$$\frac{2(x^2 + x + 1)}{x^3 + x} = \frac{C}{x} + \frac{Ax + B}{x^2 + 1}$$

gilt

$$A = \boxed{0}, \quad B = \boxed{2}, \quad C = \boxed{2}.$$

(b) Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_1^{\sqrt{3}/3} \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^3 + x} dx = \boxed{-\ln 3 - 2 \left(\arctan 1 - \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -\ln 3 - \frac{\pi}{6}}.$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte bzw. Reihen:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \boxed{1}$$

(b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \boxed{0}$$

(c)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \boxed{1/2}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+13}}{n!}.$$

(a) Der Konvergenzradius der Reihe ist

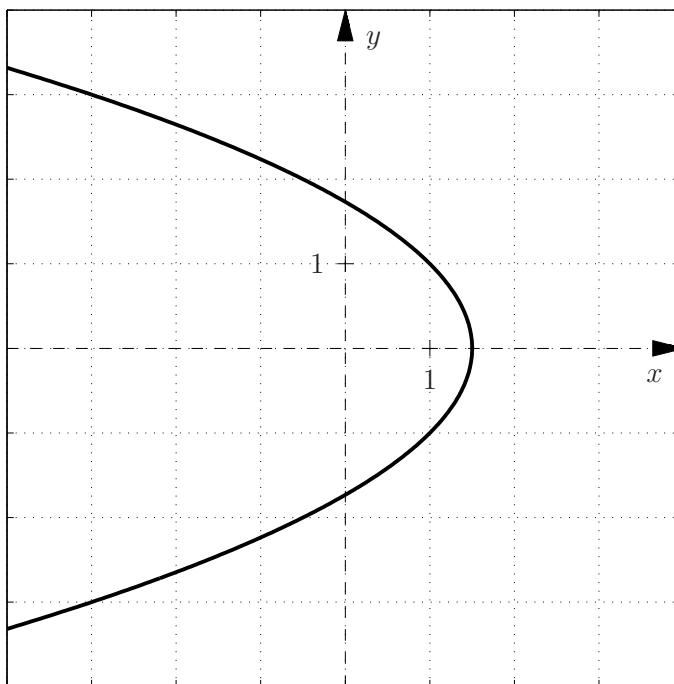
(b) Ein geschlossener Ausdruck für die Reihe ist

Aufgabe 9 (7 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinie $f(x, y) = 0$ für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto y^2 - 3 + 2x$$

in dem Achsenkreuz unten. Beachten Sie die eingetragenen Einheitspunkte.



(b) Berechnen Sie den Gradienten:

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \boxed{2y} \end{array} \right)^T$$

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkt $(3, 2, 7)$:

 $x +$

 $y +$

 $z +$

 $= 0$

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int \sin(3x) (\cos(3x))^2 dx =$

(b) $\int_0^{\pi/3} \sin(3x) (\cos(3x))^2 dx =$

(c) $\int x \sqrt{x-2} dx =$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten der folgenden Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^{-y} \cos(2x)$

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\begin{array}{c} \boxed{-2e^{-y} \sin(2x)} \\ \boxed{-e^{-y} \cos(2x)} \end{array} \right)^T$$

(b) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y^4 \ln(x^4)$

$$\text{grad } g(x, y) = \left(\begin{array}{c} \boxed{\frac{4y^4}{x}} \\ \boxed{4y^3 \ln(x^4)} \end{array} \right)^T$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

(a) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto -\frac{1}{5}y^4 + 11y^2 + x^2 - 2xy + 2y - 2x - 5.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen der Funktion f :

$$\boxed{(1, 0), (6, 5), (-4, -5)}$$

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix im Punkt $(1, 0)$:

$$Hf(1, 0) = \left(\begin{array}{cc} \boxed{2} & \boxed{-2} \\ \boxed{-2} & \boxed{22} \end{array} \right).$$

(c) Davon sind

Lokale Maxima

keine

Lokale Minima

$(1, 0)$

Sattelpunkte

$(6, 5), (-4, -5)$

Falls ein Fall nicht vorkommt, schreiben Sie „keine“ in das entsprechende Kästchen.

Aufgabe 5 (3 Punkte) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x \sin(5x).$$

(a) Es gilt

$$f'(0) = \boxed{0} \quad \text{und} \quad f''(0) = \boxed{10}.$$

(b) Das Taylorpolynom der Stufe 2 von f zum Entwicklungspunkt 0 ist also

$$T_2(f, x, 0) = \boxed{5x^2}.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

(a) In der Partialbruchzerlegung

$$\frac{3(x^2 + x + 1)}{x^3 + x} = \frac{C}{x} + \frac{Ax + B}{x^2 + 1}$$

gilt

$$A = \boxed{0}, \quad B = \boxed{3}, \quad C = \boxed{3}.$$

(b) Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_1^{\sqrt{3}/3} \frac{3(x^2 + x + 1)}{x^3 + x} dx = \boxed{-\frac{3}{2} \ln 3 - 3 \left(\arctan 1 - \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -\frac{3}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{4}}.$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte bzw. Reihen:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \boxed{1/2}$$

(b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \boxed{-1/2}$$

(c)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \boxed{0}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+14}}{n!}.$$

(a) Der Konvergenzradius der Reihe ist

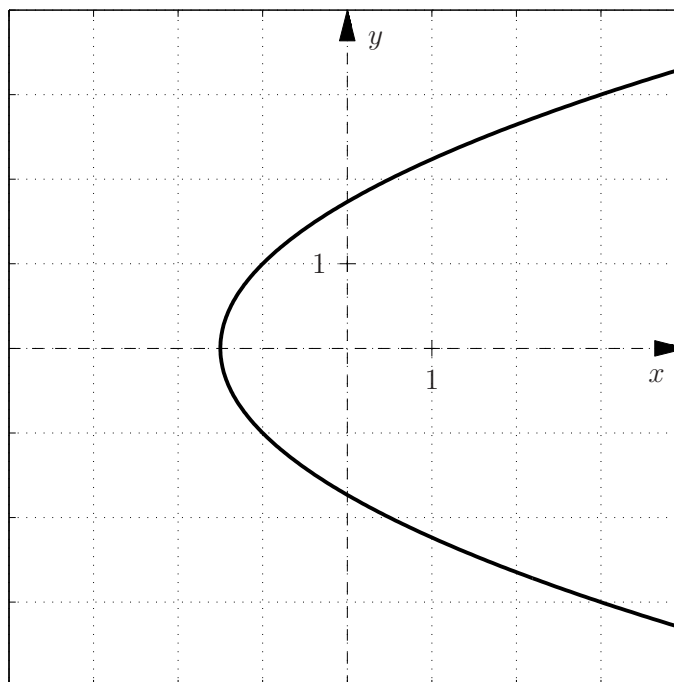
(b) Ein geschlossener Ausdruck für die Reihe ist

Aufgabe 9 (7 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinie $f(x, y) = 0$ für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto y^2 - 3 - 2x$$

in dem Achsenkreuz unten. Beachten Sie die eingetragenen Einheitspunkte.



(b) Berechnen Sie den Gradienten:

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2y \\ \hline \end{array} \right)^T$$

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Graphen der Funktion f im Punkt $(3, 2, -5)$:

 $x +$

 $y +$

 $z +$

 $= 0$