

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 3i$ und $z_2 = 2 - i$. Berechnen Sie:

$$z_1 z_2 = \boxed{11 + 2i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \boxed{1 + 2i}$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

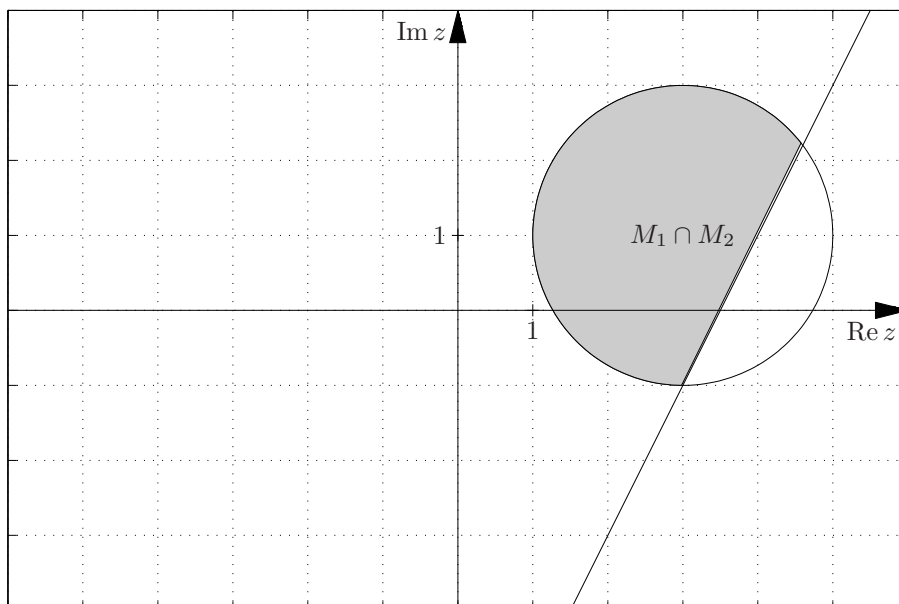
(b) Gegeben ist $z = -\sqrt{3} - i$. Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ mit $0 \leq r$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ an.

$$z = \boxed{2(\cos(7\pi/6) + i \sin(7\pi/6))}$$

$$z^{19} = \boxed{524288(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6))}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sind die Mengen $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3 - i| \leq 2\}$ und $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 - 2i| \leq |z - 6|\}$ in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie $M_1 \cap M_2$.

**Aufgabe 4** (6 Punkte)

- (a) Gegeben sind die Punkte $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (2, 2, 2)$ und $P_3 = (2, 3, 4)$. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_1 , die die Punkte P_1 , P_2 und P_3 enthält.

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right)^\top \mid x \right\rangle = \boxed{0}$$

- (b) Gegeben ist die Ebene

$$E_2 : -3x_1 + 4x_3 = 13$$

und die Punkte $P_4 = (1, 2, 1)$, $P_5 = (3, 4, 4)$, $P_6 = (2, 4, 4)$ und $P_7 = (6, 8, 7)$.

Die Gerade g_1 geht durch die Punkte P_4 und P_5 und die Gerade g_2 geht durch die Punkte P_6 und P_7 .

Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g_1 mit der Ebenen E_2 .

$$S = \left(\begin{array}{c} \boxed{5} \\ \boxed{6} \\ \boxed{7} \end{array} \right)$$

und den kürzesten Abstand δ der Geraden g_2 zur Ebene E_2 .

$$\delta = \boxed{\frac{3}{5}}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie folgende Operationen beziehungsweise schreiben Sie "nicht definiert", falls die angegebene Matrix-Operation nicht definiert ist.

$$(A + B^T) \cdot C^T =$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$C^T \cdot A \cdot B =$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 8 \\ 0 & 8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot C \cdot A =$$

nicht definiert

$$C \cdot (B + A^T) =$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & t-2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie

$$\det A = \boxed{-27}$$

$$\det B = \boxed{2}$$

(b) Berechnen Sie alle $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\det C(t) = t^3$

$$t \in \left\{ \boxed{-3, 1, 2} \right\}$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 4 \\ -3 & 1 & t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie die Menge aller $t \in \mathbb{R}$ an, für die das Gleichungssystem

$$A(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen hat. $t \in \left\{ \boxed{-\frac{7}{4}} \right\}$

(b) Lösen Sie für $t = -5$ das Gleichungssystem

$$A(-5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A sowie die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 11 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rg}(A) = \boxed{2}$$

$$\dim(\text{Kern}(f)) = \boxed{2}$$

Ist f injektiv?

Ist f surjektiv?

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 3i$ und $z_2 = -2 + i$. Berechnen Sie:

$$z_1 z_2 = \boxed{-11 - 2i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \boxed{-1 - 2i}$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

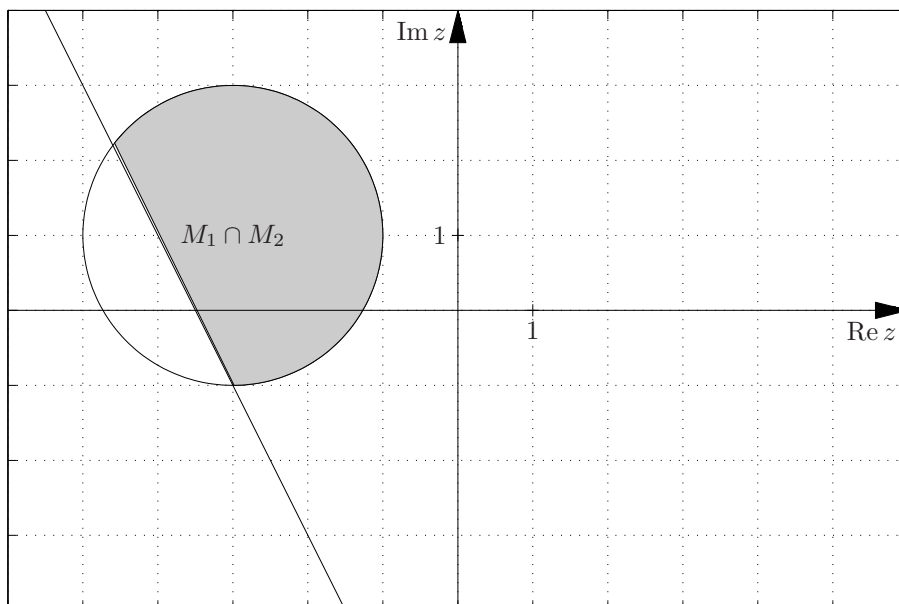
(b) Gegeben ist $z = -\sqrt{3} + i$. Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ mit $0 \leq r$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ an.

$$z = \boxed{2(\cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6))}$$

$$z^{19} = \boxed{524288(\cos(11\pi/6) + i \sin(11\pi/6))}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sind die Mengen $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3 - i| \leq 2\}$ und $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2 - 2i| \leq |z + 6|\}$ in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie $M_1 \cap M_2$.

**Aufgabe 4** (6 Punkte)

- (a) Gegeben sind die Punkte $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (2, 2, 2)$ und $P_3 = (3, 2, 4)$ Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_1 , die die Punkte P_1 , P_2 und P_3 enthält.

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right)^\top \mid x \right\rangle = 0$$

- (b) Gegeben ist die Ebene

$$E_2 : 4x_1 - 3x_3 = 13$$

und die Punkte $P_4 = (1, 2, 1)$, $P_5 = (4, 3, 3)$, $P_6 = (4, 4, 4)$ und $P_7 = (7, 8, 8)$.

Die Gerade g_1 geht durch die Punkte P_4 und P_5 und die Gerade g_2 geht durch die Punkte P_6 und P_7 .

Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g_1 mit der Ebenen E_2 .

$$S = \left(\begin{array}{c} 7 \\ 4 \\ 5 \end{array} \right)$$

und den kürzesten Abstand δ der Geraden g_2 zur Ebene E_2 .

$$\delta = \frac{9}{5}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie folgende Operationen beziehungsweise schreiben Sie "nicht definiert", falls die angegebene Matrix-Operation nicht definiert ist.

$(B + C^T) \cdot A^T =$	$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$	$B^T \cdot A \cdot C =$	$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 10 & 0 \\ -5 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
$A \cdot (C + B^T) =$	$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$	$C^T \cdot B \cdot A =$	nicht definiert

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 6-t & -2t \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie

$$\det A = \boxed{-8}$$

$$\det B = \boxed{-4}$$

(b) Berechnen Sie alle $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\det C(t) = t^3$

$$t \in \left\{ \boxed{-3, -2, 1} \right\}$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 4 \\ -3 & 1 & t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie die Menge aller $t \in \mathbb{R}$ an, für die das Gleichungssystem

$$A(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen hat. $t \in \left\{ \boxed{-\frac{4}{3}} \right\}$

(b) Lösen Sie für $t = -5$ das Gleichungssystem

$$A(-5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 38 \\ -39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A sowie die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 : v \mapsto Av$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rg}(A) = \boxed{3}$$

$$\dim(\text{Kern}(f)) = \boxed{0}$$

Ist f injektiv? $\boxed{\text{ja}}$

Ist f surjektiv? $\boxed{\text{nein}}$

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4 - 3i$ und $z_2 = 1 - 2i$. Berechnen Sie:

$$z_1 z_2 = \boxed{-2 - 11i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \boxed{2 + i}$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

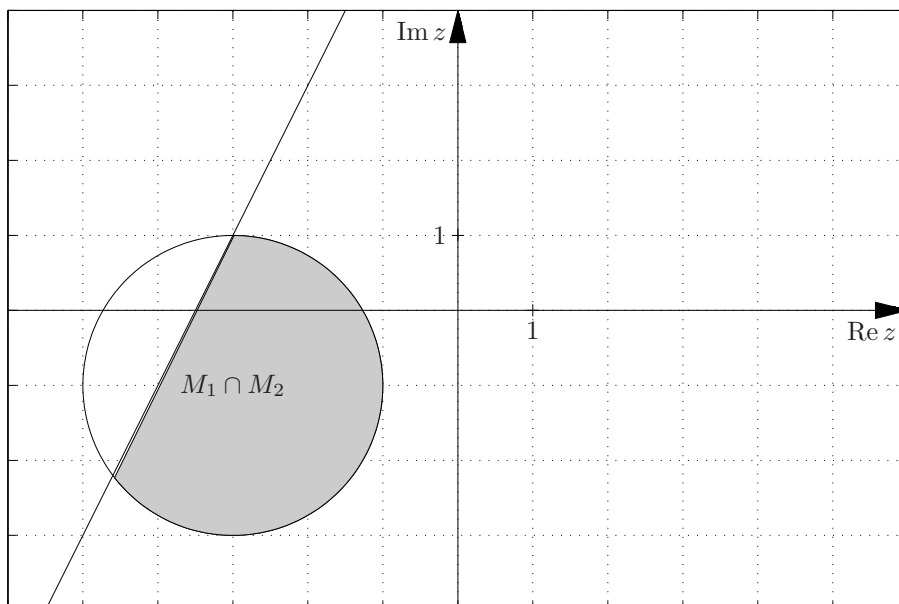
(b) Gegeben ist $z = \sqrt{3} + i$. Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ mit $0 \leq r$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ an.

$$z = \boxed{2(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6))}$$

$$z^{19} = \boxed{524288(\cos(7\pi/6) + i \sin(7\pi/6))}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sind die Mengen $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3 + i| \leq 2\}$ und $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2 + 2i| \leq |z + 6|\}$ in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie $M_1 \cap M_2$.

**Aufgabe 4** (6 Punkte)

- (a) Gegeben sind die Punkte $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (2, 2, 2)$ und $P_3 = (3, 5, 3)$. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_1 , die die Punkte P_1 , P_2 und P_3 enthält.

$$\left\langle \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right)^T \mid x \right\rangle = 0$$

- (b) Gegeben ist die Ebene

$$E_2 : 3x_1 - 4x_3 = 11$$

und die Punkte $P_4 = (1, 2, 1)$, $P_5 = (3, 1, 4)$, $P_6 = (5, 4, 0)$ und $P_7 = (9, 8, 3)$.

Die Gerade g_1 geht durch die Punkte P_4 und P_5 und die Gerade g_2 geht durch die Punkte P_6 und P_7 .

Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g_1 mit der Ebenen E_2 .

$$S = \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$$

und den kürzesten Abstand δ der Geraden g_2 zur Ebene E_2 .

$$\delta = \frac{4}{5}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie folgende Operationen beziehungsweise schreiben Sie "nicht definiert", falls die angegebene Matrix-Operation nicht definiert ist.

$$B^T \cdot A \cdot C =$$

nicht definiert

$$A^T \cdot C \cdot B =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -8 \\ -5 & 0 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(C + B^T) \cdot A^T =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B + C^T) =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} t & 6 - 5t \\ 1 & 2t \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie

$$\det A = \boxed{27}$$

$$\det B = \boxed{4}$$

(b) Berechnen Sie alle $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\det C(t) = t^3$

$$t \in \left\{ \boxed{-2, 1, 3} \right\}$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -8 & 4 \\ -3 & 1 & t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie die Menge aller $t \in \mathbb{R}$ an, für die das Gleichungssystem

$$A(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen hat. $t \in \left\{ \boxed{-\frac{1}{2}} \right\}$

(b) Lösen Sie für $t = -5$ das Gleichungssystem

$$A(-5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -35 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A sowie die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rg}(A) = \boxed{3}$$

$$\dim(\text{Kern}(f)) = \boxed{1}$$

Ist f injektiv?Ist f surjektiv?

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4 - 3i$ und $z_2 = -1 + 2i$. Berechnen Sie:

$$z_1 z_2 = \boxed{2 + 11i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \boxed{-2 - i}$$

Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

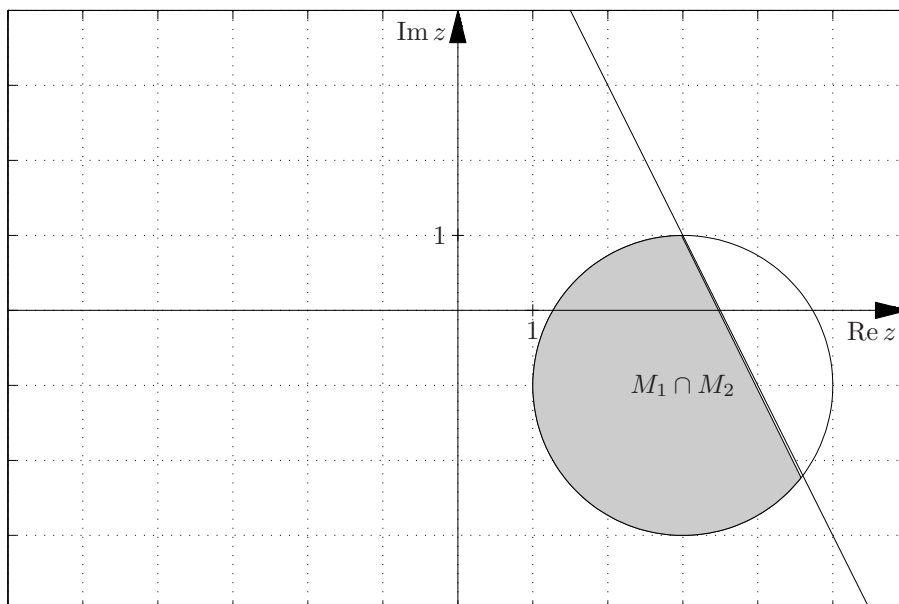
(b) Gegeben ist $z = \sqrt{3} - i$. Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung $r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ mit $0 \leq r$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ an.

$$z = \boxed{2(\cos(11\pi/6) + i \sin(11\pi/6))}$$

$$z^{19} = \boxed{524288(\cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6))}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sind die Mengen $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3 + i| \leq 2\}$ und $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 + 2i| \leq |z - 6|\}$ in der komplexen Zahlenebene. Skizzieren Sie $M_1 \cap M_2$.

**Aufgabe 4** (6 Punkte)

- (a) Gegeben sind die Punkte $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (2, 2, 2)$ und $P_3 = (5, 3, 3)$. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_1 , die die Punkte P_1 , P_2 und P_3 enthält.

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{array} \right)^T \middle| x \right\rangle = \boxed{0}$$

- (b) Gegeben ist die Ebene

$$E_2 : -4x_1 + 3x_3 = 11$$

und die Punkte $P_4 = (1, 2, 1)$, $P_5 = (4, 3, 3)$, $P_6 = (-3, 2, 2)$ und $P_7 = (0, 8, 6)$.

Die Gerade g_1 geht durch die Punkte P_4 und P_5 und die Gerade g_2 geht durch die Punkte P_6 und P_7 .

Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g_1 mit der Ebenen E_2 .

$$S = \left(\begin{array}{c} \boxed{-5} \\ \boxed{0} \\ \boxed{-3} \end{array} \right)$$

und den kürzesten Abstand δ der Geraden g_2 zur Ebene E_2 .

$$\delta = \boxed{\frac{7}{5}}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie folgende Operationen beziehungsweise schreiben Sie "nicht definiert", falls die angegebene Matrix-Operation nicht definiert ist.

$$(B + A^T) \cdot C^T =$$

$$\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot C \cdot B =$$

nicht definiert

$$C^T \cdot B \cdot A =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -10 & -4 \\ -10 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot (A + B^T) =$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 11 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 & 11 \\ t & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie

$$\det A = \boxed{8}$$

$$\det B = \boxed{-2}$$

(b) Berechnen Sie alle $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\det C(t) = t^3$

$$t \in \left\{ \boxed{1, 2, 3} \right\}$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -12 & 4 \\ -3 & 1 & t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie die Menge aller $t \in \mathbb{R}$ an, für die das Gleichungssystem

$$A(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele Lösungen hat. $t \in \left\{ \boxed{-\frac{11}{2}} \right\}$

(b) Lösen Sie für $t = -5$ das Gleichungssystem

$$A(-5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 22 \\ -35 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A sowie die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 : v \mapsto Av$.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 18 \\ 0 & 4 & 8 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rg}(A) = \boxed{2}$$

$$\dim(\text{Kern}(f)) = \boxed{1}$$

Ist f injektiv?

Ist f surjektiv?