

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte										

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 dieser Matrix und zu jedem Eigenwert einen normierten Eigenvektor.

$$\lambda_1 = \boxed{2} \quad v_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \lambda_2 = \boxed{6} \quad v_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen (gegebenfalls komplex) diagonalisierbar sind. Geben Sie jeweils die Diagonalmatrix an oder schreiben Sie „nicht diagonalisierbar“ in das Kästchen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 3+4i & 0 \\ 0 & 3-4i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} :$$

$$\text{nicht diag.}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix A und der Vektor v_1 mit

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 2 \\ 0 & 25 & 0 \\ 2 & 0 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A besitzt drei verschiedene Eigenwerte, wobei zu einem der Eigenwerte der Eigenvektor v_1 gehört. Berechnen Sie je einen normierten Eigenvektor zu den beiden anderen Eigenwerten und geben Sie das in Linearfaktoren zerlegte charakteristische Polynom χ_A der Matrix A an.

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (15 - \lambda)(25 - \lambda)(10 - \lambda)$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Im \mathbb{R}^2 sind das Standardkoordinatensystem \mathbb{E} sowie das Koordinatensystem \mathbb{F} mit

$$\mathbb{F} = \left(\left(\begin{array}{c} 5 \\ -4 \end{array} \right); \left(\begin{array}{c} -3 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array} \right) \right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \cdot v + \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \cdot v + \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$u = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -\frac{4}{13} \\ \frac{3}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} & \frac{12}{13} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie v_1, v_2, v_3 so, dass u, v, w ein Rechtssystem bilden und berechnen Sie für diese Werte $\det(A)$ und A^{-1} .

$$v = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -\frac{48}{65} \\ \frac{36}{65} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \quad \det(A) = \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline \end{array}, \quad A^{-1} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{13} & -\frac{48}{65} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{13} & \frac{36}{65} \\ 0 & \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die erweiterte Matrixbeschreibung A_{erw} der Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_1 + 4x_3 = 0 \right\}.$$

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0 \right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad c = -1.$$

$$-z_1^2 + 3z_2^2 = 0$$

Geben Sie den Ursprung P des Koordinatensystems an, in dem die Quadrik diese Form hat.

$$P = (-2, 1)$$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

Berechnen Sie zur Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0 \right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 1$$

den Rang $r = \text{Rang}(A)$ und $r_{\text{erw}} = \text{Rang}(A_{\text{erw}})$. $r = \boxed{3}$ $r_{\text{erw}} = \boxed{3}$

Um welche Art von Quadrik handelt es sich?

kegelige Quadrik Mittelpunktsquadrik parabolische Quadrik

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte										

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 dieser Matrix und zu jedem Eigenwert einen normierten Eigenvektor.

$$\lambda_1 = \boxed{4} \quad v_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \lambda_2 = \boxed{-2} \quad v_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen (gegebenfalls komplex) diagonalisierbar sind. Geben Sie jeweils die Diagonalmatrix an oder schreiben Sie „nicht diagonalisierbar“ in das Kästchen.

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -3+4i & 0 \\ 0 & -3-4i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} \text{nicht diag.} \end{array}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix A und der Vektor v_1 mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 20 & 0 \\ 6 & 0 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

A besitzt drei verschiedene Eigenwerte, wobei zu einem der Eigenwerte der Eigenvektor v_1 gehört. Berechnen Sie je einen normierten Eigenvektor zu den beiden anderen Eigenwerten und geben Sie das in Linearfaktoren zerlegte charakteristische Polynom χ_A der Matrix A an.

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \chi_A(\lambda) = (20 - \lambda)(-5 - \lambda)(15 - \lambda)$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Im \mathbb{R}^2 sind das Standardkoordinatensystem \mathbb{E} sowie das Koordinatensystem \mathbb{F} mit

$$\mathbb{F} = \left(\left(\begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array} \right); \left(\begin{array}{c} -5 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array} \right) \right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 13 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$u = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -\frac{4}{13} \\ \frac{3}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{12}{13} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie v_1, v_2, v_3 so, dass u, v, w ein Rechtssystem bilden und berechnen Sie für diese Werte $\det(A)$ und A^{-1} .

$$v = \begin{pmatrix} \frac{48}{65} \\ -\frac{36}{65} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix}, \quad \det(A) = -1, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{13} & \frac{48}{65} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{13} & -\frac{36}{65} \\ 0 & -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die erweiterte Matrixbeschreibung A_{erw} der Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_3 + 2 = 0 \right\}.$$

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0 \right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = 3.$$

$$4z_1^2 - 2z_2^2 + 1 = 0$$

Geben Sie den Ursprung P des Koordinatensystems an, in dem die Quadrik diese Form hat.

$$P = (1, -1)$$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

Berechnen Sie zur Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0 \right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = 0$$

den Rang $r = \text{Rang}(A)$ und $r_{\text{erw}} = \text{Rang}(A_{\text{erw}})$. $r = \boxed{2}$ $r_{\text{erw}} = \boxed{4}$

Um welche Art von Quadrik handelt es sich?

kegelige Quadrik Mittelpunktsquadrik parabolische Quadrik

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte										

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 dieser Matrix und zu jedem Eigenwert einen normierten Eigenvektor.

$$\lambda_1 = \boxed{-1} \quad v_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}} \quad \lambda_2 = \boxed{-5} \quad v_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen (gegebenfalls komplex) diagonalisierbar sind. Geben Sie jeweils die Diagonalmatrix an oder schreiben Sie „nicht diagonalisierbar“ in das Kästchen.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 4+3i & 0 \\ 0 & 4-3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} : \text{nicht diag.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix A und der Vektor v_1 mit

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -12 \\ 0 & 30 & 0 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A besitzt drei verschiedene Eigenwerte, wobei zu einem der Eigenwerte der Eigenvektor v_1 gehört. Berechnen Sie je einen normierten Eigenvektor zu den beiden anderen Eigenwerten und geben Sie das in Linearfaktoren zerlegte charakteristische Polynom χ_A der Matrix A an.

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \chi_A(\lambda) = (30 - \lambda)(15 - \lambda)(-15 - \lambda)$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Im \mathbb{R}^2 sind das Standardkoordinatensystem \mathbb{E} sowie das Koordinatensystem \mathbb{F} mit

$$\mathbb{F} = \left(\left(\begin{array}{c} -5 \\ -4 \end{array} \right); \left(\begin{array}{c} 3 \\ -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right) \right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \cdot v + \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \cdot v + \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -13 \\ 22 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$u = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ -\frac{3}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{12}{13} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie v_1, v_2, v_3 so, dass u, v, w ein Rechtssystem bilden und berechnen Sie für diese Werte $\det(A)$ und A^{-1} .

$$v = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} -\frac{48}{65} \\ \frac{36}{65} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \quad \det(A) = \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline \end{array} \quad A^{-1} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{13} & -\frac{48}{65} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{13} & \frac{36}{65} \\ 0 & \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die erweiterte Matrixbeschreibung A_{erw} der Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_1 + 4x_3 = 0 \right\}.$$

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0 \right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad c = 16.$$

$$2z_1^2 - 3z_2^2 + 1 = 0$$

Geben Sie den Ursprung P des Koordinatensystems an, in dem die Quadrik diese Form hat.

$$P = (3, -1)$$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

Berechnen Sie zur Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0 \right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 1$$

den Rang $r = \text{Rang}(A)$ und $r_{\text{erw}} = \text{Rang}(A_{\text{erw}})$. $r =$ $r_{\text{erw}} =$

Um welche Art von Quadrik handelt es sich?

kegelige Quadrik Mittelpunktsquadrik parabolische Quadrik

Name:

Matrikelnr.:

Fach:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte										

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 dieser Matrix und zu jedem Eigenwert einen normierten Eigenvektor.

$$\lambda_1 = \boxed{-1} \quad v_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \lambda_2 = \boxed{-5} \quad v_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen (gegebenfalls komplex) diagonalisierbar sind. Geben Sie jeweils die Diagonalmatrix an oder schreiben Sie „nicht diagonalisierbar“ in das Kästchen.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} :$$

nicht diag.

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} -4 + 3i & 0 \\ 0 & -4 - 3i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix A und der Vektor v_1 mit

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 6 \\ 0 & -45 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

A besitzt drei verschiedene Eigenwerte, wobei zu einem der Eigenwerte der Eigenvektor v_1 gehört. Berechnen Sie je einen normierten Eigenvektor zu den beiden anderen Eigenwerten und geben Sie das in Linearfaktoren zerlegte charakteristische Polynom χ_A der Matrix A an.

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (-45 - \lambda)(15 - \lambda)(-5 - \lambda)$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Im \mathbb{R}^2 sind das Standardkoordinatensystem \mathbb{E} sowie das Koordinatensystem \mathbb{F} mit

$$\mathbb{F} = \left(\left(\begin{array}{c} -5 \\ 4 \end{array} \right); \left(\begin{array}{c} 5 \\ -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right) \right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$u = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ -\frac{3}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{12}{13} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie v_1, v_2, v_3 so, dass u, v, w ein Rechtssystem bilden und berechnen Sie für diese Werte $\det(A)$ und A^{-1} .

$$v = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} \frac{48}{65} \\ -\frac{36}{65} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}, \quad \det(A) = \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline \end{array}, \quad A^{-1} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{13} & \frac{48}{65} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{13} & -\frac{36}{65} \\ 0 & -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die erweiterte Matrixbeschreibung A_{erw} der Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0 \right\}.$$

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0 \right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = 2.$$

$$-z_1^2 + 2z_2^2 + 1 = 0$$

Geben Sie den Ursprung P des Koordinatensystems an, in dem die Quadrik diese Form hat.

$$P = (1, -1)$$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

Berechnen Sie zur Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0 \right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = 0$$

den Rang $r = \text{Rang}(A)$ und $r_{\text{erw}} = \text{Rang}(A_{\text{erw}})$. $r = \boxed{2}$ $r_{\text{erw}} = \boxed{3}$

Um welche Art von Quadrik handelt es sich?

kegelige Quadrik Mittelpunktsquadrik parabolische Quadrik