Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte										

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 dieser Matrix und zu jedem Eigenwert einen normierten Eigenvektor.

$\lambda_1 =$ | $v_1 =$ | $\lambda_2 =$ | $v_2 =$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine zu A konjugierte Diagonalmatrix D sowie eine Transformationsmatrix T so, dass $T^{-1} A\, T = D$ ist.

$D =$ $\boxed{}$ $T =$ $\boxed{}$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Entscheiden Sie jeweils, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben oder unten beschränkt ist. Geben Sie, falls vorhanden, eine obere beziehungsweise untere Schranke an. Falls die Folge nach oben oder unten unbeschränkt ist, schreiben Sie „unbeschränkt“ in das betreffende Kästchen.

$a_n = 200000 - n$	untere Schranke:		obere Schranke:	
$a_n = 60 \cdot \cos(n)$	untere Schranke:		obere Schranke:	
$a_n = (-1)^n\, 2^{1000-n}$	untere Schranke:		obere Schranke:	
$a_n = n \cdot \cos(\pi n)$	untere Schranke:		obere Schranke:	

Aufgabe 5 (*4 Punkte*)

Entscheiden Sie ob die Folgen konvergent, divergent oder bestimmt divergent sind. Bestimmen sie den Grenzwert für die konvergenten Folgen. Falls eine der übrigen Folgen bestimmt divergent ist, schreiben Sie „bestimmt divergent“ in das Kästchen, ansonsten „divergent“ .

$a_n = (-1)^n \, n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ $\boxed{}$ $b_n = \frac{3n^3 + 4n - 10^{10}}{7n^3 + 4n^2}$ $\boxed{}$

$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{(-1)^n}{n}$ $\boxed{}$ $d_n = (n-6)\, \cos(2\,\pi\,n)$ $\boxed{}$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die affine Gestalt (z.B. Parabel, Hyperbel, Ellipsoid, ...) der folgenden Quadriken:

$Q_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 = 0 \right\}$ $\boxed{}$

$Q_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 8 = 0 \right\}$ $\boxed{}$

$Q_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -3x_2^2 + 2x_3^2 + 3 = 0 \right\}$ $\boxed{}$

$Q_4 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x_1 - x_2^2 = 0 \right\}$ $\boxed{}$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = 16$$

$$\boxed{}$$

Geben Sie den Ursprung P des Koordinatensystems an, in dem die Quadrik diese Form hat.

$$P = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

Im $\mathbb{R}^2$ sind das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ sowie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ mit

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{} \cdot v + \boxed{}, \quad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) = \boxed{} \cdot v + \boxed{}$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*)

Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis w_1, w_2, w_3 derart, dass $\mathrm{L}(w_1) = \mathrm{L}(v_1)$, $\mathrm{L}(w_1, w_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$ und $\mathrm{L}(w_1, w_2, w_3) = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$ gilt.

$$w_1 = \boxed{} \qquad w_2 = \boxed{} \qquad w_3 = \boxed{}$$
