Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/4	/4	/5	/2	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die Matrix A der linearen Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto Av$ bezüglich der Standardbasis, wobei α folgende Werte annimmt:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \qquad \alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$$

$$A = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der folgenden Gleichungssysteme:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 4y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & + & 4z & = & -1 \\ 3x & + & y & - & 5z & = & 4 \end{array}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben Sei die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 7 & -1 & 12 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Rang der Matrix A und die Dimension des Kerns von α:

$$\operatorname{Rg} A = \boxed{} \qquad \dim \operatorname{Kern}(\alpha) = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*)

Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

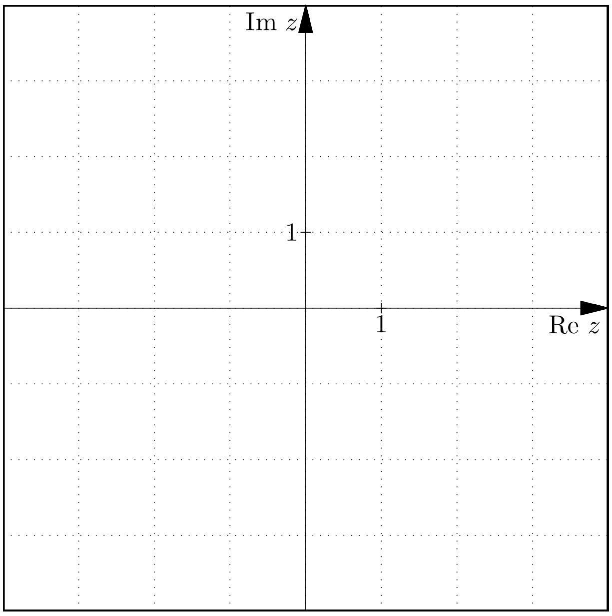
$$(z + i)^3 = -8$$

in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+i| \geqq 2 \right\}, \qquad M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z\overline{z} - \big(\operatorname{Im}(z)\big)^2 \leqq 1 \right\}, \qquad M_3 := M_1 \cap M_2$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Abhängig von α sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$b_{1,\alpha} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad b_{2,\alpha} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_{3,\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bildet $B_\alpha \colon b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis?

Für $\alpha \in$ $\boxed{}$.

(b) Sei nun $\alpha = -1$. Mit E sei wie üblich die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_{B_{-1}}\mathrm{id}_E$ an, die Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B_{-1} umrechnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_E\mathrm{id}_{B_{-1}}$ an, die Koordinaten bezüglich der Basis B_{-1} in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

${}_E\mathrm{id}_{B_{-1}} =$ $\boxed{}$ ${}_{B_{-1}}\mathrm{id}_E =$ $\boxed{}$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardbasis E und Basis B. Weiterhin sind bekannt: die Matrix ${}_B\mathrm{id}_E$, welche Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B umrechnet, sowie die Matrix ${}_E\mathrm{id}_B$, die Koordinaten bezüglich der Basis B in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$${}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das Koordinatentupel des Vektors $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B an:

$${}_Bv = \boxed{}\,.$$

(b) Bestimmen Sie Koeffizienten so, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{} \qquad \det\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

$$\det\begin{pmatrix} \cos(\frac{5\pi}{3}) & \sin(\frac{5\pi}{3}) \\ \sin(\frac{5\pi}{3}) & \cos(\frac{5\pi}{3}) \end{pmatrix} = \boxed{}$$

Aufgabe 10 (*2 Punkte*)

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

$$\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle = \boxed{} \qquad \langle v_2 \,|\, v_1 \rangle + \langle v_1 \,|\, v_1 \times v_2 \rangle = \boxed{}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studiengang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/4	/4	/5	/2	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die Matrix A der linearen Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Av$ bezüglich der Standardbasis, wobei α folgende Werte annimmt:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}, \qquad \alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

$A =$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der folgenden Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 6y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & -3 \\ 4x & + & 4y & + & 4z & = & 12 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & -2 \\ x & - & 2y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben Sei die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 6 & 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Rang der Matrix A und die Dimension des Kerns von α:

$\operatorname{Rg} A = \boxed{}$ $\dim \operatorname{Kern}(\alpha) = \boxed{}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*)

Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

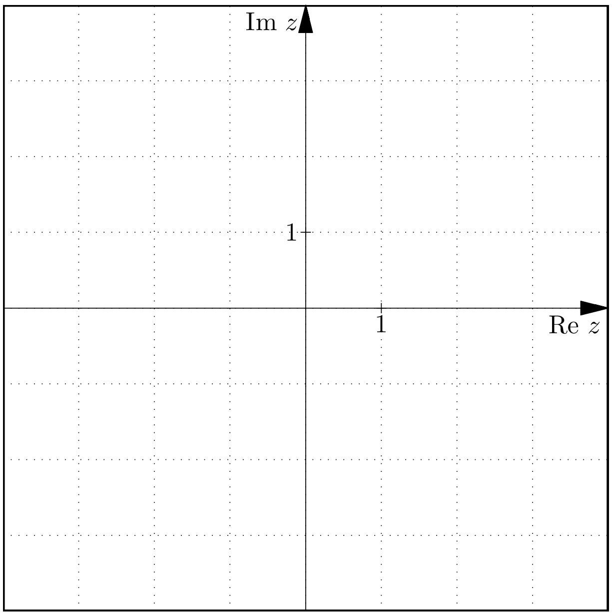
$$(z-1)^3 = -27$$

in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-1| \leqq 2 \right\}, \qquad M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z\overline{z} - \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2 \geqq 1 \right\}, \qquad M_3 := M_1 \cap M_2$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Abhängig von α sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$b_{1,\alpha} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\alpha \\ 1+\alpha \end{pmatrix} \quad b_{2,\alpha} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_{3,\alpha} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bildet $B_\alpha \colon b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis?

Für $\alpha \in$ $\boxed{}$.

(b) Sei nun $\alpha = 2$. Mit E sei wie üblich die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_{B_2}\mathrm{id}_E$ an, die Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B_2 umrechnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_E\mathrm{id}_{B_2}$ an, die Koordinaten bezüglich der Basis B_2 in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

${}_E\mathrm{id}_{B_2} = \boxed{}$ ${}_{B_2}\mathrm{id}_E = \boxed{}$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardbasis E und Basis B. Weiterhin sind bekannt: die Matrix ${}_B\mathrm{id}_E$, welche Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B umrechnet, sowie die Matrix ${}_E\mathrm{id}_B$, die Koordinaten bezüglich der Basis B in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$$ {}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} $$

(a) Geben Sie das Koordinatentupel des Vektors $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B an:

$$ {}_Bv = \boxed{} . $$

(b) Bestimmen Sie Koeffizienten so, dass

$$ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . $$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$ \det \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{} \qquad \det \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{} $$

$$ \det \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & -\cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} = \boxed{} $$

Aufgabe 10 (*2 Punkte*)

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

$$ \langle v_1 \,|\, v_2 \rangle = \boxed{} \qquad \langle v_2 \,|\, v_1 \rangle + \langle v_1 \,|\, v_1 \times v_2 \rangle = \boxed{} $$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/4	/4	/5	/2	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die Matrix A der linearen Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Av$ bezüglich der Standardbasis, wobei α folgende Werte annimmt:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}, \qquad \alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

$A =$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der folgenden Gleichungssysteme:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -7 \\ 2x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 7x & + & y & + & 4z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 21x & + & 3y & + & 12z & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben Sei die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \colon v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Rang der Matrix A und die Dimension des Kerns von α:

$\operatorname{Rg} A = \boxed{}$ $\dim \operatorname{Kern}(\alpha) = \boxed{}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*)

Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

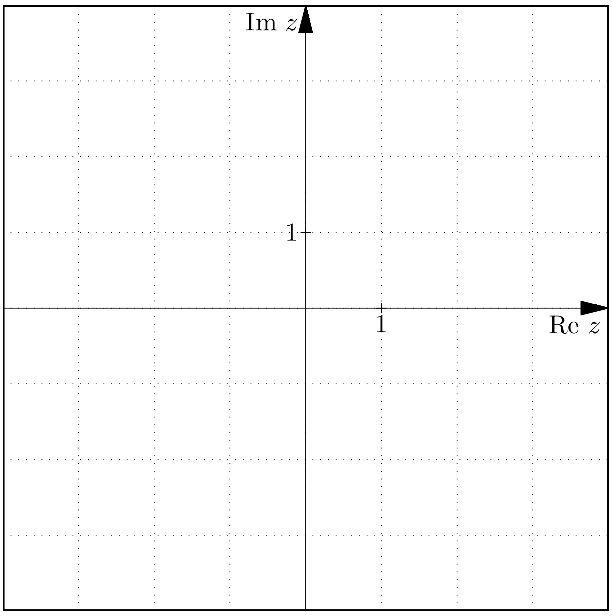
$$(z-i)^3 = -8$$

in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - i| \geqq 2 \right\}, \qquad M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z\overline{z} - \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2 \leqq 1 \right\}, \qquad M_3 := M_1 \cap M_2$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Abhängig von α sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$b_{1,\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad b_{2,\alpha} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_{3,\alpha} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bildet $B_\alpha \colon b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis?

Für $\alpha \in$ $\boxed{}$.

(b) Sei nun $\alpha = -1$. Mit E sei wie üblich die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_{B_{-1}}\mathrm{id}_{E}$ an, die Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B_{-1} umrechnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_{E}\mathrm{id}_{B_{-1}}$ an, die Koordinaten bezüglich der Basis B_{-1} in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

${}_{E}\mathrm{id}_{B_{-1}} =$ $\boxed{}$ ${}_{B_{-1}}\mathrm{id}_{E} =$ $\boxed{}$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardbasis E und Basis B. Weiterhin sind bekannt: die Matrix ${}_B\mathrm{id}_E$, welche Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B umrechnet, sowie die Matrix ${}_E\mathrm{id}_B$, die Koordinaten bezüglich der Basis B in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$$ {}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} $$

(a) Geben Sie das Koordinatentupel des Vektors $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B an:

$$ {}_Bv = \boxed{}\,. $$

(b) Bestimmen Sie Koeffizienten so, dass

$$ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$ \det \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{} \qquad \det \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{} $$

$$ \det \begin{pmatrix} \cos(\frac{5\pi}{3}) & \sin(\frac{5\pi}{3}) \\ \sin(\frac{5\pi}{3}) & \cos(\frac{5\pi}{3}) \end{pmatrix} = \boxed{} $$

Aufgabe 10 (*2 Punkte*)

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

$$ \langle v_1 \,|\, v_2 \rangle = \boxed{} \qquad \langle v_2 \,|\, v_1 \rangle + \langle v_1 \,|\, v_1 \times v_2 \rangle = \boxed{} $$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/4	/4	/5	/2	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

  Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die Matrix A der linearen Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto Av$ bezüglich der Standardbasis, wobei α folgende Werte annimmt:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}, \qquad \alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

$A =$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der folgenden Gleichungssysteme:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ -2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 9 \\ 4x & + & y & - & z & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben Sei die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Rang der Matrix A und die Dimension des Kerns von α:

$\operatorname{Rg} A =$ $\boxed{}$ $\dim \operatorname{Kern}(\alpha) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*)

Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

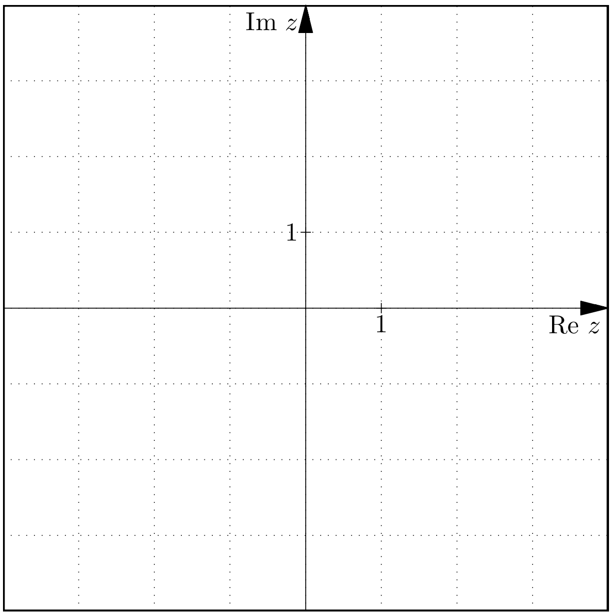
$$(z+1)^3 = -27$$

in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z+1| \leqq 2 \right\}, \qquad M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z\overline{z} - \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2 \geqq 1 \right\}, \qquad M_3 := M_1 \cap M_2$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Abhängig von α sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$b_{1,\alpha} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-\alpha \end{pmatrix} \quad b_{2,\alpha} := \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_{3,\alpha} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bildet $B_\alpha \colon b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis?

Für $\alpha \in$ $\boxed{}$.

(b) Sei nun $\alpha = 0$. Mit E sei wie üblich die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_{B_0}\mathrm{id}_E$ an, die Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B_0 umrechnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_{E}\mathrm{id}_{B_0}$ an, die Koordinaten bezüglich der Basis B_0 in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

${}_{E}\mathrm{id}_{B_0} =$ $\boxed{}$ ${}_{B_0}\mathrm{id}_{E} =$ $\boxed{}$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*)

Gegeben ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardbasis E und Basis B. Weiterhin sind bekannt: die Matrix ${}_B\mathrm{id}_E$, welche Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B umrechnet, sowie die Matrix ${}_E\mathrm{id}_B$, die Koordinaten bezüglich der Basis B in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$$ {}_E\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}_B\mathrm{id}_E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

(a) Geben Sie das Koordinatentupel des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B an:

$$ {}_Bv = \boxed{} . $$

(b) Bestimmen Sie Koeffizienten so, dass

$$ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . $$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$ \det \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{} \qquad \det \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{} $$

$$ \det \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & -\cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} = \boxed{} $$

Aufgabe 10 (*2 Punkte*)

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

$$ \langle v_1 \,|\, v_2 \rangle = \boxed{} \qquad \langle v_2 \,|\, v_1 \rangle + \langle v_1 \,|\, v_1 \times v_2 \rangle = \boxed{} $$