

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/4	/4	/5	/2	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (3 Punkte) Berechnen Sie die Matrix A der linearen Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto Av$ bezüglich der Standardbasis, wobei α folgende Werte annimmt:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge \mathcal{L} der folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} & 2x - 4y + 3z = 1 \\ \text{(a)} \quad & x - 2y + 4z = 3 \\ & 3x - y + 5z = 2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} & x - y + 2z = 1 \\ \text{(b)} \quad & 2x - 2y + 4z = -1 \\ & 3x + y - 5z = 4 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \{ \}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Gegeben Sei die lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4: v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 7 & -1 & 12 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Rang der Matrix A und die Dimension des Kerns von α :

$$\text{Rg } A = \boxed{2} \qquad \dim \text{Kern}(\alpha) = \boxed{1}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z + i)^3 = -8$$

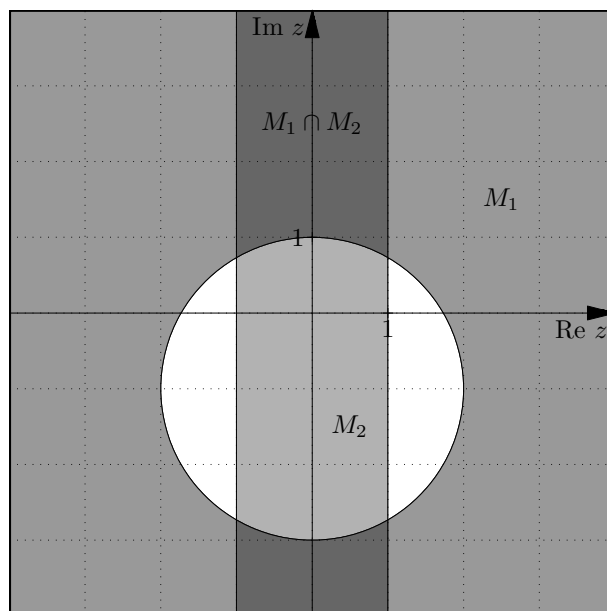
in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$-2 - i, \quad 1 + (\sqrt{3} - 1)i, \quad 1 - (\sqrt{3} + 1)i$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z + i| \geq 2 \right\}, \quad M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (\operatorname{Im}(z))^2 \leq 1 \right\}, \quad M_3 := M_1 \cap M_2$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 7 (5 Punkte) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Abhängig von α sind die folgenden Vektoren des \mathbb{R}^3 gegeben:

$$b_{1,\alpha} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad b_{2,\alpha} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_{3,\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bildet $B_\alpha : b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis?

Für $\alpha \in$
 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
 .

(b) Sei nun $\alpha = -1$. Mit E sei wie üblich die Standardbasis des \mathbb{R}^3 bezeichnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_{B_{-1}} \operatorname{id}_E$ an, die Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B_{-1} umrechnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_E \operatorname{id}_{B_{-1}}$ an, die Koordinaten bezüglich der Basis B_{-1} in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$${}_E \operatorname{id}_{B_{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}_{B_{-1}} \operatorname{id}_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Gegeben ist der Vektorraum \mathbb{R}^3 mit Standardbasis E und Basis B . Weiterhin sind bekannt: die Matrix ${}_B \text{id}_E$, welche Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B umrechnet, sowie die Matrix ${}_E \text{id}_B$, die Koordinaten bezüglich der Basis B in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad {}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das Koordinatentupel des Vektors $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B an:

$${}_B v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie Koeffizienten so, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 (3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-2}$$

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{5}$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\frac{5\pi}{3}) & \sin(\frac{5\pi}{3}) \\ \sin(\frac{5\pi}{3}) & \cos(\frac{5\pi}{3}) \end{pmatrix} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 10 (2 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \boxed{21}$$

$$\langle v_2 | v_1 \rangle + \langle v_1 | v_1 \times v_2 \rangle = \boxed{21}$$

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/4	/4	/5	/2	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (3 Punkte) Berechnen Sie die Matrix A der linearen Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto Av$ bezüglich der Standardbasis, wobei α folgende Werte annimmt:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge \mathcal{L} der folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} 4x - 6y + z = 1 \\ \text{(a)} \quad x + y + z = -3 \\ 4x + 4y + 4z = 12 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \{ \}$$

$$\begin{array}{l} 2x - y + z = 2 \\ \text{(b)} \quad 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ -3 \end{array} \right) \right\}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Gegeben Sei die lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 6 & 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Rang der Matrix A und die Dimension des Kerns von α :

$$\text{Rg } A = \boxed{3} \qquad \dim \text{Kern}(\alpha) = \boxed{1}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z - 1)^3 = -27$$

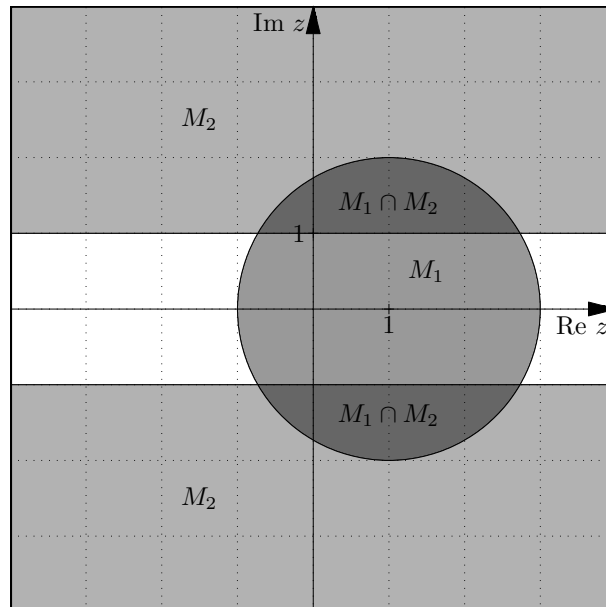
in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$-2, \quad \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i, \quad \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 2\}, \quad M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (\operatorname{Re}(z))^2 \geq 1\}, \quad M_3 := M_1 \cap M_2$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 7 (5 Punkte) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Abhängig von α sind die folgenden Vektoren des \mathbb{R}^3 gegeben:

$$b_{1,\alpha} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \alpha \\ 1 + \alpha \end{pmatrix} \quad b_{2,\alpha} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_{3,\alpha} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bildet $B_\alpha : b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis?

Für $\alpha \in$
 $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 .

(b) Sei nun $\alpha = 2$. Mit E sei wie üblich die Standardbasis des \mathbb{R}^3 bezeichnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_{B_2} \operatorname{id}_E$ an, die Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B_2 umrechnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_E \operatorname{id}_{B_2}$ an, die Koordinaten bezüglich der Basis B_2 in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$${}_E \operatorname{id}_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}_{B_2} \operatorname{id}_E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Gegeben ist der Vektorraum \mathbb{R}^3 mit Standardbasis E und Basis B . Weiterhin sind bekannt: die Matrix ${}_B \text{id}_E$, welche Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B umrechnet, sowie die Matrix ${}_E \text{id}_B$, die Koordinaten bezüglich der Basis B in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das Koordinatentupel des Vektors $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B an:

$${}_B v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie Koeffizienten so, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 (3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-3}$$

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{4}$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & -\cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 10 (2 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \boxed{24}$$

$$\langle v_2 | v_1 \rangle + \langle v_1 | v_1 \times v_2 \rangle = \boxed{24}$$

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/4	/4	/5	/2	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (3 Punkte) Berechnen Sie die Matrix A der linearen Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto Av$ bezüglich der Standardbasis, wobei α folgende Werte annimmt:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge \mathcal{L} der folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} x + 2y - 3z = -7 \\ \text{(a)} \quad 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{array}{l} 7x + y + 4z = 1 \\ \text{(b)} \quad x - y - z = 1 \\ 21x + 3y + 12z = 0 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \{ \}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Gegeben Sei die lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4: v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Rang der Matrix A und die Dimension des Kerns von α :

$$\text{Rg } A = \boxed{3} \quad \dim \text{Kern}(\alpha) = \boxed{0}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z - i)^3 = -8$$

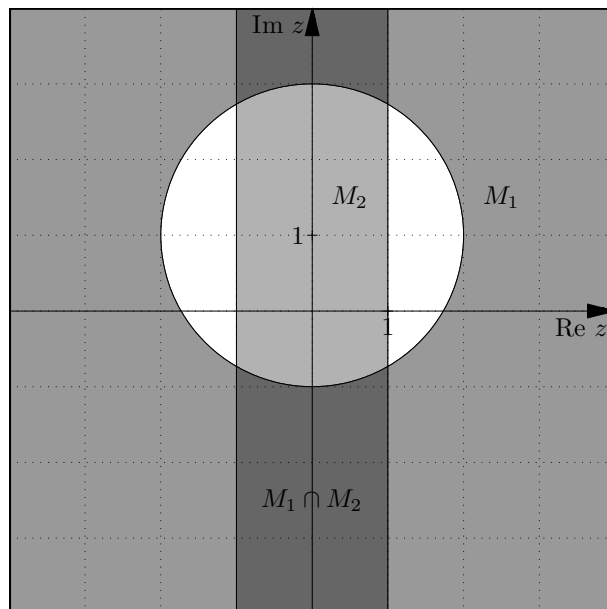
in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$-2 + i, \quad 1 + (1 + \sqrt{3})i, \quad 1 + (1 - \sqrt{3})i$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq 2 \right\}, \quad M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (\operatorname{Im}(z))^2 \leq 1 \right\}, \quad M_3 := M_1 \cap M_2$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 7 (5 Punkte) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Abhängig von α sind die folgenden Vektoren des \mathbb{R}^3 gegeben:

$$b_{1,\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad b_{2,\alpha} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_{3,\alpha} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bildet $B_\alpha: b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis?

Für $\alpha \in$
 $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
 .

(b) Sei nun $\alpha = -1$. Mit E sei wie üblich die Standardbasis des \mathbb{R}^3 bezeichnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_{B_{-1}} \operatorname{id}_E$ an, die Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B_{-1} umrechnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_E \operatorname{id}_{B_{-1}}$ an, die Koordinaten bezüglich der Basis B_{-1} in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$${}_E \operatorname{id}_{B_{-1}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_{B_{-1}} \operatorname{id}_E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Gegeben ist der Vektorraum \mathbb{R}^3 mit Standardbasis E und Basis B . Weiterhin sind bekannt: die Matrix ${}_B \text{id}_E$, welche Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B umrechnet, sowie die Matrix ${}_E \text{id}_B$, die Koordinaten bezüglich der Basis B in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad {}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das Koordinatentupel des Vektors $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B an:

$${}_B v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie Koeffizienten so, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 (3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-4}$$

$$\det \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{3}$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\frac{5\pi}{3}) & \sin(\frac{5\pi}{3}) \\ \sin(\frac{5\pi}{3}) & \cos(\frac{5\pi}{3}) \end{pmatrix} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 10 (2 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \boxed{27}$$

$$\langle v_2 | v_1 \rangle + \langle v_1 | v_1 \times v_2 \rangle = \boxed{27}$$

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/3	/4	/4	/5	/2	/3	/2	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Gruppennr.:

Aufgabe 2 (3 Punkte) Berechnen Sie die Matrix A der linearen Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto Av$ bezüglich der Standardbasis, wobei α folgende Werte annimmt:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge \mathcal{L} der folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} 5x + 2y + z = 5 \\ \text{(a)} \quad -2x - 3y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \{ \}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + z = 5 \\ \text{(b)} \quad 2x + y + 3z = 9 \\ 4x + y - z = 3 \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right) \right\}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Gegeben Sei die lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Rang der Matrix A und die Dimension des Kerns von α :

$$\text{Rg } A = \boxed{3} \qquad \dim \text{Kern}(\alpha) = \boxed{1}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z + 1)^3 = -27$$

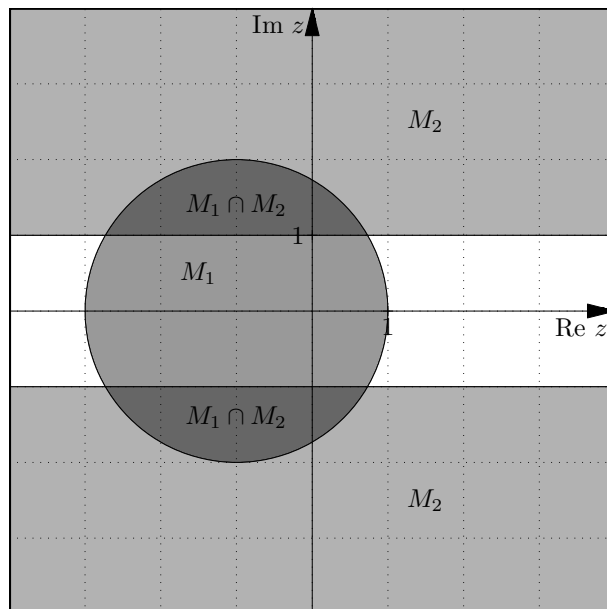
in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$-4, \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i, \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq 2 \right\}, \quad M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (\operatorname{Re}(z))^2 \geq 1 \right\}, \quad M_3 := M_1 \cap M_2$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 7 (5 Punkte) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Abhängig von α sind die folgenden Vektoren des \mathbb{R}^3 gegeben:

$$b_{1,\alpha} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 - \alpha \end{pmatrix} \quad b_{2,\alpha} := \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_{3,\alpha} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bildet $B_\alpha : b_{1,\alpha}, b_{2,\alpha}, b_{3,\alpha}$ eine Basis?

Für $\alpha \in$ $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(b) Sei nun $\alpha = 0$. Mit E sei wie üblich die Standardbasis des \mathbb{R}^3 bezeichnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_{B_0} \operatorname{id}_E$ an, die Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B_0 umrechnet.

Geben Sie diejenige Matrix ${}_E \operatorname{id}_{B_0}$ an, die Koordinaten bezüglich der Basis B_0 in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$${}_E \operatorname{id}_{B_0} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}_{B_0} \operatorname{id}_E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Gegeben ist der Vektorraum \mathbb{R}^3 mit Standardbasis E und Basis B . Weiterhin sind bekannt: die Matrix ${}_B \text{id}_E$, welche Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis B umrechnet, sowie die Matrix ${}_E \text{id}_B$, die Koordinaten bezüglich der Basis B in Koordinaten bezüglich der Standardbasis umrechnet.

$${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie das Koordinatentupel des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B an:

$${}_B v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie Koeffizienten so, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{-\frac{1}{3}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \boxed{-\frac{1}{3}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 (3 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\det \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-5}$$

$$\det \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{2}$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & -\cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 10 (2 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \boxed{30}$$

$$\langle v_2 | v_1 \rangle + \langle v_1 | v_1 \times v_2 \rangle = \boxed{30}$$